

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות:

- (1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית $(p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$:
 א. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (משוואת הרמיט).
 ב. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$ (משוואת בסל).

(2) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית :

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראה שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית :

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתור את בעיות שטורם-ליוביל הבאות :

(עבור כל בעיה עליך למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכח שהבעיה היא בעיית שטורס-ליוביל רגולרית.
ב. פתור את הבעיה.

(9) פתור את בעיית שטורס-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א' ונקבל:}$$

- i. פתח את הפונקציה $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$,
לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורס-ליוביל זו.
התחל את הטור מ- $n = 1$.
ii. מה סכום הטור ב- $x = 0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x = 0$?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א' ונקבל:}$$

- פתח את הפונקציה $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$, לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורס-ליוביל זו.

(10) פתור את בעיית ש.ל. הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- ב. פתח את הפונקציה $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$, לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכח שהבעיה הנתונה היא בעיית שטורס-ליוביל רגולרית.
 ב. מצא את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.
 ג. הראה שפונקציות עצמיות שונות של הבעיה הן אורתוגונליות.

ד. פתח את $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$ לטור פונקציות עצמיות.

- ה. הראה שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.
 ו. חשב את סכום הטור מסעיף ד' עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.
 ז. מצא את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

זוויות שכדאי להכיר:

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$