

פרק 1

משוואות מסדר ראשון

הפרדת משתנים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} (1-x)y' &= y^2 & \text{(2)} & & \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{y} & \text{(1)} \\ y(2) &= 1 ; (x-1)\frac{y}{dx} &= 4y & \text{(4)} & yy'\sqrt{1+x^2} &+ x\sqrt{1+y^2} &= 0 & \text{(3)} \\ y(1) &= -1 ; \frac{dy}{dx} &= xy + 3y - 3x - 9 & \text{(5)} & (x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx &- (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy &= 0 & \text{(6)} \\ \frac{dx}{dt} &= x^2 - 2x + 2 & \text{(8)} & & dy &= 2t(y^2 + 4)dt & \text{(7)} \\ y(0) &= 4 ; \frac{dy}{dx} &= y \sec^2 x & \text{(10)} & y(\pi) &= 1 ; y' + y^2 \sin x &= 0 & \text{(9)} \\ y(0) &= 1 ; \frac{dy}{dx} &= \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} & \text{(11)} \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 & \text{(2)} & & y &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} & \text{(1)} \\ \frac{1}{4} \ln|y| &= \ln|x-1| & \text{(4)} & & \sqrt{1+y^2} &= -\sqrt{1+x^2} + c & \text{(3)} \\ y &= 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} & \text{(6)} & & \ln|y-3| &= \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 & \text{(5)} \\ x &= 1 + \tan(t+c) & \text{(8)} & & y &= 2 \tan(2t^2 + k) & \text{(7)} \\ \ln|y| &= \tan x + \ln 5 & \text{(10)} & & y &= -\frac{1}{\cos x} & \text{(9)} \\ & & & & \frac{1}{-2y^2} &= \sqrt{1+x^2} - 1.5 & \text{(11)} \end{aligned}$$

משוואות הומוגניות

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8) \quad y(1) = 0 ; (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 : \text{נתונה המשוואה} \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות:

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

שיטת ההצבה:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$. y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואה מדויקת

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{-xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{-xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0 \quad (7)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות:

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2) \qquad 0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4) \qquad y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6) \qquad \ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$k = 1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות:

(1) הראה שהמשוואה $x^2 y^3 + x(1 + y^2) y' = 0$ אינה מדויקת,

ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(2) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$

אינה מדויקת, ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(3) הראה שהמשוואה $(x+2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת,

ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה xe^x .

פתור את המשוואות הבאות:

(4) $(x^2 + y^2 + x) dx + (xy) dy = 0$

(5) $(x - x^2 - y^2) dx + y dy = 0$

(6) $(2xy^3 + y^4) dx + (xy^3 - 2) dy = 0$

(7) $(y^2 - y) dx + x dy = 0$

(8) $(y - xy^2) dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$

(9) $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

10 נתונה מד"ר לא מדויקת: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

א. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכח: אם $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11 נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$.

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.

כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה: $\mu(xy)$.

12 נתונה המשוואה $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$.

מצא את גורם האינטגרציה בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13 נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14 נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$.

מצא את גורם האינטגרציה של המשוואה בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.

כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

15 נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

א. מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא

פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזר בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה

$$(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$$

16 נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

מצא תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה

שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

תשובות סופיות:

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

שאלת הוכחה (10)

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב. if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א. (15)}$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2) \qquad \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4) \qquad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6) \qquad y(0) = 1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8) \qquad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

משוואת ברנולי

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואת ריקטי

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = -(1+x+x^2) - (2x+1)y - y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

תשובות:

$$y(x) = x + \frac{1}{-x+C} \quad (2)$$

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

הצבות שונות ומשוונות

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' = \cos(y-x) \quad (1)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right) \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה:

$$. p = y' = \frac{dy}{dx} \text{ בתת-פרק זה מסמנים}$$

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות סופיות:

$$. (y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$. (\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$. \left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$. y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$. y = \frac{1}{2} cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$. 6 \left(\frac{c}{y^2} \right)^2 y^2 + 3 \left(\frac{c}{y^2} \right) x - y = 0 \quad (6)$$

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות:

(1) נתונה הבעיה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$.

א. הוכיחו ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.

קבע באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$.

א. הוכח שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכח שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכח שלבעיה קיים פתרון יחיד ומצא אותו.

(3) פתור את הבעיה $y(0) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$.

(4) נתונה הבעיה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$.

א. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראה שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------|----------------|-------------------|
| | ב. שאלת הסבר | (1) א. שאלת הוכחה |
| ג. שאלת הוכחה | ב. שאלת הוכחה | (2) א. שאלת הוכחה |
| | | (3) $y(x) = 0$ |
| | ב. שאלת הוכחה. | (4) א. שאלת הוכחה |