

# פרק 6

## התמרת לפלס

### התמרת לפלס והתמרה הפוכה

#### שאלות

חשב את התמרות לפלס הבאות בעזרת טבלת התמרות לפלס:

$$L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t+1}\right) \quad (2) \qquad L(t^2 + 4t - 2) \quad (1)$$

$$L(\cosh 4t) \quad (4) \qquad L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3)$$

$$L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6) \qquad L(\sinh 10t) \quad (5)$$

$$L(\sin^2 t) \quad (8) \qquad L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7)$$

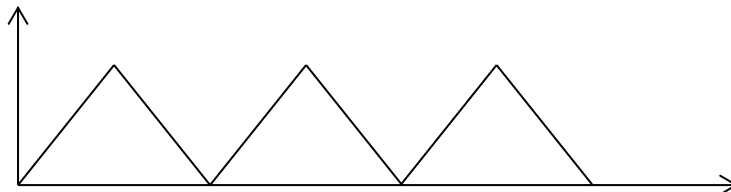
$$L(t^2 \sin 4t) \quad (10) \qquad L(\cos^2 4t) \quad (9)$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12) \qquad L(t^4 e^{2t}) \quad (11)$$

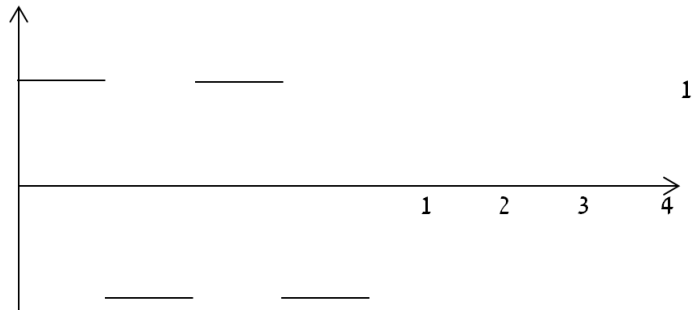
(13) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה:  $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

(14) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה:  $g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$

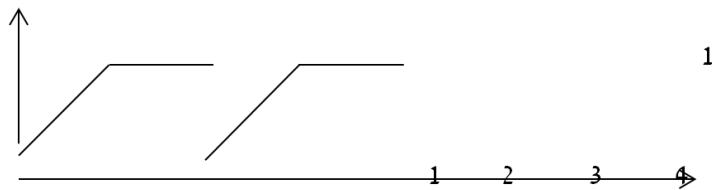
(15) מצא את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16 מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17 מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18 הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה  $u(t)$  ואת ההזזה שלה  $u(t-k)$ .

19 שרטט את הפונקציה  $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ , כאשר  $u(t)$  פונקציית המדרגה.

20 רשום את הפונקציה  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$  בעזרת פונקציית המדרגה.

21 רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה  $u(t)$ , של הפונקציה  $u(t-k)$  ושל הפונקציה  $f(t-k)u(t-k)$ .

22 חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

23 חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

24 פתור את הסעיפים הבאים :

א. הגדר ושרטט את פונקציית הדלתא  $\delta(t)$ .

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה  $\delta(t-a)$  ?

**תשובות סופיות**

- $$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} \quad (8)$$
- $$\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3} \quad (10)$$
- $$\frac{4}{(s-2)^2+16} \quad (12)$$
- $$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$
- $$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad (7)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+64} \quad (9)$$
- $$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$
- $$\frac{1-e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$
- $$\frac{1-2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$
- $$\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (15)$$
- $$\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \quad (16)$$
- $$\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (17)$$
- $$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$
- . (19)
- $$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$
- $$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$
- $$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \aleph \quad (22)$$
- $$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16 \frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$
- $$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

## התמרת לפלס הפוכה

### שאלות

חשב את ההתמרות הבאות:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad \text{(2)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{(1)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad \text{(4)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad \text{(3)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad \text{(6)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad \text{(5)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad \text{(8)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad \text{(7)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad \text{(10)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad \text{(9)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad \text{(12)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad \text{(11)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad \text{(14)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad \text{(13)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad \text{(16)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad \text{(15)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad \text{(18)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad \text{(17)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right) \quad \text{(20)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad \text{(19)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad \text{(22)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad \text{(21)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad \text{(24)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad \text{(23)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

$$F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s} \quad \text{נתון (30)}$$

חשב את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$  כאשר  $f(t) = L^{-1}(F(s))$ .

פתור בשתי דרכים שונות.

הערה:  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  ,  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ .

(31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

**תשובות סופיות:**

- |   |  |
|---|--|
| $\frac{t^3}{3!}$ (2)                                      | 1 (1)  |
| $\frac{1}{3} \sin 2t$ (4)                                 | $e^{10t}$ (3)  |
| $e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t$ (6)                         | $\cos 2t$ (5)  |
| $\frac{1}{4} t \sin 2t$ (8)                               | $e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$ (7)                                |
| $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$ (10)                      | $\frac{1}{4} t \sin 2t$ (9)  |
| $1 - 2e^{-5t}$ (12)                                       | $\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$ (11)  |
| $1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$ (14)           | $3e^{-3t} - 2e^{-2t}$ (13)   |
| $e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t}$ (16)                | $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$ (15)   |
| $-6 + 5t + 6e^{-2t}$ (18)                                 | $e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t}$ (17)   |
| $2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t}$ (20)                    | $4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t}$ (19)  |
| $\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75} t$ (22) | $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2} t$ (21)   |
| $\cos t + e^{-2t}$ (24)                                   | $\sin t + 2e^{3t}$ (23)  |
|   | $\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$ (25)  |
|   | $e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$ (26) |
|   | $3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3)$ (27)   |
|   | $u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2) \sin(t+2)$ (28)   |
|   | $u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)})$ (29)   |
|   | $f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3$ (30)  |
|   | - (31)   |
| $0.5t - \frac{1}{4} \sin 2t$ (33)                         | $-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t$ (32)  |
| $\frac{1}{2}(-2 \cos t + 2 - t \sin t)$ (35)              | $\frac{1}{4} e^{4t} (t-1) + \frac{1}{4}$ (34)  |

## פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$y(0) = 0; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4}; 4y'' - 4y' = te' + e' \quad (5)$$

$$y(0) = y'(0) = 0; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$\text{כאשר } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$y(0) = y'(0) = 0; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר}$$

$$y(0) = y'(0) = 0; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3; y'' + 4y' + 5y = 10\cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0; y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -3; y'' + 3y' + 10y = 4\delta(t - 2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0; y'' + 4y' = \delta(t - 2\pi) - \delta(t - \pi) \quad (12)$$

**תשובות סופיות**

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad \mathbf{(2)}$$

$$y(t) = t^2 \quad \mathbf{(4)}$$

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad \mathbf{(1)}$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad \mathbf{(3)}$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad \mathbf{(5)}$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad \mathbf{(6)}$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad \mathbf{(7)}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2) \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad \mathbf{(8)}$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad \mathbf{(9)}$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} \sin(t) \quad \mathbf{(10)}$$

$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad \mathbf{(11)}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad \mathbf{(12)}$$