

## פרק 7

# שימושים של משוואות דיפרנציאליות

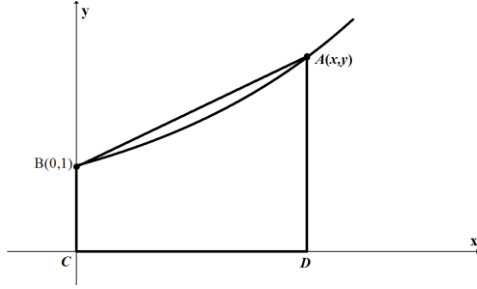
### בעיות גיאומטריות

#### שאלות:

- (1) על עקום מסוים ידוע שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום שווה ל- $-\frac{x}{y}$ . מצא את משוואת העקום.
- (2) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(1, 3)$  ושיפוע המשיק אליו בנקודה שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ . מצא את משוואת העקום.
- (3) מצא את משוואת העקום העובר דרך הנקודה  $(1, 2)$  ושבכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא  $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ .
- (4) מצא את משוואת העקום שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.
- (5) מצא את משוואת העקום ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.
- (6) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(2, 4)$ . נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $A(x, y)$  שעליו ובין שיפוע הישר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים שווה לשיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$ .
- (7) מצא את משוואת העקום המאונך לישר העובר רך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3, 4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

8) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו וציר  $x$  נחצה על ידי ציר  $y$ .

9) מצא את העקום העובר דרך הנקודה  $(0,1)$  כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר  $y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו  $M(x, y)$  והקטע  $OM$  מהראשית  $O$  ל- $M$  הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו הקטע  $MN$  היא הנקודה בה המשיק הני"ל חותך את ציר ה- $y$ ). צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.



10) נתון עקום העובר בנקודה  $(0,1)$ . בכל נקודה  $A$  שעל העקום שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$  הנראה בציור. מהי משוואת העקום?

### תשובות סופיות:

2)  $2xy + x^2 = 7$

4)  $x^2 + y^2 = k$

6)  $y = 2xe^{x-2}$

8)  $2x^2 + y^2 = k$

10)  $y = 2e^{x^2/4} - 1$

1)  $x^2 + y^2 = k$

3)  $x^3 - 3y^2x = 11$

5)  $y^2 = ax$

7)  $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$

9)  $2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות:

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות הבאות:

(1)  $2 \ln x + \ln y = c$

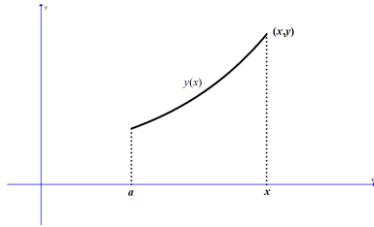
(2)  $xy = c$

(3)  $x^2 + 2y^2 = c$

ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$ , בנקודה  $(1, 2)$  שעליה.

(4)  $x^2 + y^2 = cx$

(5) מצא את משפחת העקומות היוצרות זווית  $45^\circ$  של עם משפחת המעגלים  $x^2 + y^2 = c$ .

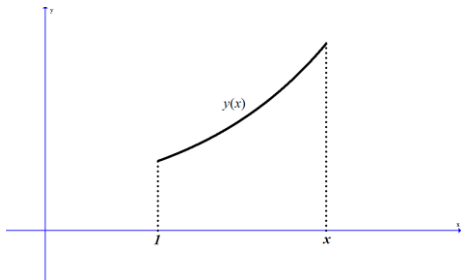


(6) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה.

ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך

הקשת בין הנקודות  $(a, y(a))$  ו- $(x, y(x))$ .

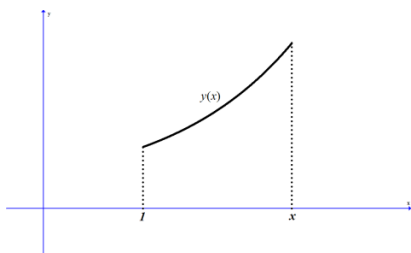
מצא את משוואת העקום.



(7) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה.

ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה

ששטחו של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



(8) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה.

ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה

שהשטח של  $S$  שווה ל- $y(x) = 2$ ?

**תשובות סופיות:**

$$2\ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (5)$$

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (6)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

כך (8)

לא (7)

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות:

נניח שכמות  $y(t)$  גדלה (או דועכת) אקספוננציאלית (מעריכית).  
 כלומר, בכל רגע קצב הגידול שלה פרופורציונלי לערכו.  
 נניח שבזמן התחלתי  $t = 0$  הכמות היא  $y_0$  ונניח שקבוע הפרופורציה הוא  $k$ .  
 מצא נוסחה עבור הכמות בכל זמן  $t$ .

- 1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.  
 ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.  
 א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?  
 ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?  
 ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?  
 \*הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (בכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- 2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים ואחרי 4 שנים היו 440 אלף תושבים.  
 א. מצא את אחוז הגידול השנתי.  
 ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 550 אלף תושבים.
- 3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.  
 כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5000 ש"ח.  
 א. כמה כסף הפקיד האדם?  
 ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?
- 4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונה היו 1000 חיות. בספירה שנייה שנעשתה כעבור 20 חודשים היו 1400 חיות בר.  
 מצא אחרי כמה חודשים החל מהספירה הראשונה היו בשמורה 2000 חיות בר?
- 5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5750 שנים.  
 ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.  
 א. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?  
 ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם מכמות התחלתית של 100 גרם?
- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב-4% כל שבוע.  
 בבריכה השנייה יש 200 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב-10% כל שבוע.  
 א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?  
 ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

### תשובות סופיות:

	2106 שנים	(1)
ב. 15.92 שנים	א. 0.02	(2)
ב. 13.41 שנים	א. 4093.65	(3)
	40.77 חודשים	(4)
ב. 19188 שנים	א. 88.69 גרם	(5)
ב. 14.6 שבועות	א. 3.04 שבועות	(6)

## בעיות שונות

### שאלות:

- (1) בזמן  $t = 0$  יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי המלח בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים מוזרמים לתוך המיכל, בקצב של 25 ליטר לדקה ושהתמיסה המוערבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.
- א. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות?  
 ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- (2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$  כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה לחרתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג וההתנגדות (ק"ג) שווה ל- $2v$  כאשר  $v$  נמדדת ב-מטר/שניה.
- א. מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.  
 ב. מצא כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שניה.  
 ג. מצא את המהירות הסופית.
- (3) חוק הקירור של ניוטון קובע כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אויר קבועה השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?  
 ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- (4) נתון מיכל בצורת גליל שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
- נסמן ב- $h(t)$  את גובה פני המים וב- $k$  את קבוע הפרופורציה.
- א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים,  $h(t)$ . מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?  
 ב. ידוע כי  $k = -2\pi$ . פתור את המד"ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

- (5) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס"מ.  
 א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .  
 ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $1/64$  מנפחו ההתחלתי?
- (6) מבלון מלא אוויר שרדיוסו  $R$  מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא  $3V(t)$  כאשר  $V(t)$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .  
 הוכח כי כעבור  $\ln 2$  שניות נפח הבלון ייקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.

### תשובות סופיות:

- (1) א. 26.75 ק"ג      ב. 0.942 דקות
- (2) א. 4.09 מטר/שניה      ב. 72 שניות      ג. 10 מטר/שניה
- (3) א.  $43\frac{1}{3}^{\circ}$       ב. 1.13 שעות
- (4) א.  $h(0) = 4 ; \pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$       ב.  $h = (2-t)^2 ; t = \sqrt{2} + 2$
- (5) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$       ב. 4.5 שעות
- (6) שאלת הוכחה.