פרק 4

מערכת משוואות ליניאריות

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות:

נתונה מטריצה A , מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A .

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

תשובות סופיות:

1) $x=0,\ x=1,\ \ x=2,\ v_{x=0}=(-1,0,1),\ v_{x=1}=(0,1,0),\ \ v_{x=2}=(1,0,1)$

2) $x=6,\ \ x=2,\ \ x=-4,\ v_{x=6}=(0,0,1),\ \ v_{x=2}(1,1,1),\ \ v_{x=-4}=(-1,1,0)$

3) $x_1=2,\ x_2=3,\ \ x_3=3,\ \ v_{x=2}=(1,1,1),\ \ v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)\ \ x^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$

4) $x=1,\ x=3,\ x=-2,\ \ v_{x=1}=(-1,4,1),\ v_{x=3}=(1,2,1),\ \ v_{x=-2}=(-1,1,1)$

5) $x=1,\ x=4,\ \ x=-1,\ \ v_{x=1}=(1,-2,1),\ v_{x=4}=(1,1,1),\ \ v_{x=-1}=(-1,0,1)$

6) $x=-1,\ x=3\ \ \ v_{x=-1}=(-1,2),\ \ v_{x=3}=(1,2)$

7) $x_{1,2}=1\pm 2i,\ \ v_{x=1+2i}=(1+i,2),\ \ v_{x=1-2i}=(1-i,2)$

8) $x=1,\ x=1+\sqrt{3}i,\ x=1-\sqrt{3}i,\ \ v_{x=1}=(1,1,1)$,
$v_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right),\ \ v_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים- שיטת הלכסון

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

2) $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$

3) נתון $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

הוכח כי $z(t)=y(t)$.

4) $\begin{cases}x'=x-y+4z\\y'=3x+2y-z\\z'=2x+y-z\end{cases}$

5) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

6) נתון $\underline{x}'=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\underline{x}$ כך ש- $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$.

חשב: $\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}$.

7) $\begin{cases}y_1'+5y_1-2y_2'=0\\3y_2'-4y_1'-5y_2=0\end{cases}$.

8) $\vec{x}'(t)=A\cdot\vec{x}(t)$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

9) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

10) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}-7&-4&-4\\2&-1&4\\-1&-2&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

11) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

12) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}0&3&1\\-1&4&0\\-1&2&2\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

13) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

14) $\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}\underline{x}(t)$

הערה:

בשאלות 8,9 יש להגיע לפתרון המרוכב מהפתרון ממשי.

תשובות סופיות:

1) $\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2) $\underline{x}(t)=e^{6t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

3) $z(t)=y(t)$

4) $\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

5) $\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

6) 0

7) $\underline{x}(t)=c_1e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\sin 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\cos 2t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$

8) $\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]+c_2e^{t}\left[\sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right]$

9) $$\underline{x}(t)=c_1e^{0t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\t\end{pmatrix}$$

10) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-2t+1\\2t-1\\t\end{pmatrix}$$

11) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\t-1\\0.5t^2\end{pmatrix}$$

12) $$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2t-1\\t\\t\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{bmatrix}t^2-t+2\\\frac{t^2}{2}+1\\\frac{t^2}{2}\end{bmatrix}$$

13) $$\underline{x}(t)=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\t\end{pmatrix}+c_3e^{1t}\begin{pmatrix}0\\1\\t-1\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}+c_4e^{1t}\begin{pmatrix}1\\t-2\\\frac{t^2}{2}-t+1\\\frac{t^3}{6}\end{pmatrix}$$

14) $$\underline{x}(t)=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_3e^{2t}\begin{pmatrix}-2t+1\\-4t\\-2t\end{pmatrix}$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא-הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1)
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned}$$
, (a קבוע).

3)
$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4)
$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned}$$

5) המר את המשוואה $y''' + y'' - 2y = t^2$ במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

6)
$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות:

1) $$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$$

2) עבור $a=-1$ נקבל: $$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}$$

עבור $a\neq 1$ נקבל: $$\underline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{1+a}\begin{pmatrix}e^{at}\\-2e^{at}\end{pmatrix}$$

3) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+c_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+(3t+2)\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}-(3t+1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+(-3t+1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

4) $$\underline{x}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}te^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{9}e^{t}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

5) $$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\t^2\end{pmatrix}$$

6) $$\underline{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}-2e^{-5t}\\e^{-5t}\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\2e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}(-2t+1)e^{-t}\\(2t-1)e^{-t}\\te^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\t\\t-1\end{pmatrix}$$

מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} \\ y'-z''+3z=x^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y''+z'=e^{-2x} \\ y+z=\sin x \end{cases}$ בהינתן $z(0)=y(0)=y'(0)=0$.

3) $\begin{cases} x'=4x-2y+e^t \\ y'=6x-3y+e^{-t} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1'=x_1+x_2+\sin 2t \\ x_2'=x_1+x_2+\cos 2t \end{cases}$

5) $\begin{cases} z''-3z'+2z+y'-y=0 \\ z'-2z+y'+y=0 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $y=\frac{1}{12}e^{3x}-\frac{2}{3}x^3-2c_2e^x+2c_3e^{-x}+kx+l$, $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+\frac{1}{24}e^{3x}+x^2$

2) $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{6}e^{-2x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$, $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

3) $y=2c_1+\frac{3}{2}c_2e^t+6te^t-\frac{3}{2}e^t-\frac{5}{2}e^{-t}$, $x=c_1+c_2e^t+4te^t-e^{-t}$

4) $x_2=-c_1+c_2e^{2t}+\frac{1}{4}\sin 2t$, $x_1=c_1+c_2e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t$

5) $y=2c_1+\frac{1}{2}c_2e^x$, $z=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}$