

פרק 3

משוואות לינאריות מסדר n

משוואת אוילר מסדר שלישי

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$. x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0, \quad x \neq 0 \quad (1)$$

$$. x^3 y''' + 2x^2 y'' = 0, \quad x \neq 0 \quad (2)$$

$$. x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^3 \ln x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$. y = c_1 |x|^1 + c_2 |x|^2 + c_3 |x|^3 \quad (1)$$

$$. y = c_1 |x|^0 + c_2 |x|^0 \ln|x| + c_3 |x|^1 \quad (2)$$

$$. y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - \frac{3}{4} x \ln x + \frac{x^3}{4} \ln^2(x) \quad (3)$$

משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2) \qquad y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4) \qquad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6) \qquad y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8) \qquad y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11) \qquad y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13) \qquad y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$\begin{cases} y'''' - 3y'' + 6y' - 12y + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15) \qquad \begin{cases} y'' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

16 נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6, אשר אחד

הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.

א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב. מצא את המשוואה.

תשובות סופיות:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y'''' - 6y'''' + 27y'''' - 68y'''' + 135y'''' - 150y'''' + 125y'''' = 0 \quad (17)$$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2} (e^x + 1 - \ln(e^x + 1)) + e^x (-\ln(e^x + 1)) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

משוואות חסרות מסדר שלישי

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y' y'' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3 \quad (1)$$

עם תנאי ההתחלה: $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$

$$\begin{cases} y'' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' - 2(y')^{2y} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y'' - \frac{(y'')^2}{y'} = y'' - 2(y')^{2y} \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 3y'''y - y'y'' &= 0 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (y'y''' - 2(y'')^2)y^2 &= -(y')^4 \\ y > 0 \\ y(1) = y'(1) = y''(1) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (2)$$

$$y = x^3 \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \ln|-3+4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$y = \tan x - 1 \quad (3)$$

$$y = e^{x-1} \quad (5)$$

הוורונסקיאן ושימושו

שאלות:

(1) האם קיימת מד"ר מהצורה $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$, בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1,1]$, כך שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$, הן פתרונות שלה?

(2) נתונות הפונקציות: $y_1(x) = 4 - x$, $y_2(x) = 4 + x$, $y_3(x) = 20 + x$.

א. חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות.

ב. קבע האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty, \infty)$.

ג. ענה שוב על סעיף ב' בידיעה ששלוש הפונקציות הן פתרון של המד"ר $y'' = 0$.

(3) פתור את הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמים בקטע I ,

ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .

הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 3 בעלת מקדמים רציפים בקטע I ,

כך ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשום משוואה לינארית, הומוגנית מסדר שלישי עם מקדמים רציפים

שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הם פתרונות שלה.

תשובות סופיות:

(1) לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודה אחת $x = 0$.

(2) א. $W = 0$. ב. הפונקציות תלויות. ג. הפונקציות תלויות.

(3) א. שאלת הוכחה. ב. $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$, $x \neq 0$.

שיטה אופרטורית

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 4e^x - 10e^{-2x} \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 10e^{4x} + 2e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^4 - 6D^3 + 13D^2 - 12D + 4)y = 10e^x + 4e^{2x} \quad (3)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = 24e^x + 81e^{4x} \quad (4)$$

$$(D^6 + D^4 + D^2)y = 104\sin(2x+1) + \cos(x+10) \quad (5)$$

$$(D^5 - 8D^4 + 22D^3 - 28D^2 + 17D - 4)y = -5\sin 2x \quad (6)$$

$$(D^4 - 3D^3 + 6D^2 - 12D + 8)y = 30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 48\cos^2 x - 16 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} - e^x + e^{-2x} \quad (1)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-5x} + \frac{5}{81}e^{4x} - \frac{1}{18}xe^x - \frac{1}{30} \quad (2)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x} + 5x^2e^x + 2x^2e^{2x} \quad (3)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} - \frac{1}{3}x^4e^x + xe^{4x} \quad (4)$$

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{3x} + c_6e^{-3x} - 2\sin(2x+1) - \cos(x+10) \quad (5)$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x + c_5e^{4x} + \frac{1}{500}[4\sin 2x - 22\cos 2x] \quad (6)$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x + \frac{5\sin x + 25\cos x}{26} + \frac{-3\cos 2x - 18\sin 2x}{37} + 1 \quad (7)$$