

פרק 2

משוואות לינאריות מסדר שני

משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (2) \qquad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4) \qquad 2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6) \qquad xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (8) \qquad 2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

משוואות לינאריות הומוגניות, עם מקדמים קבועים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|--|
| $y'' - 4y' = 0$ (2) | $y'' - 100y = 0$ (1) |
| $4z'' + z' - 5z = 0, z(0) = 1, z'(0) = 1$ (4) | $y'' - 8y' + 7y = 0$ (3) |
| $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0$ (6) | $y'' - 2y' + y = 0$ (5) |
| $y'' + 10y = 0$ (8) | $y'' + 4y = 0$ (7) |
| $5y'' + 8y' + 4y = 0$ (10) | $y(0) = 0, y'(0) = 1, y'' - 2y' + 10y = 0$ (9) |
- (11) נתונה המד"ר: $yy'' + (y')^2 = 0$.

- א. הראה כי $y_1 = 4$ ו- $y_2 = \sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.
 ב. הראה כי הפתרון $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
 האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות:

- | | |
|--|---|
| | $y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$ (1) |
| | $y = c_1 + c_2 e^{4x}$ (2) |
| | $y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$ (3) |
| | $z = e^x$ (4) |
| | $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ (5) |
| | $x(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2}$ (6) |
| | $y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$ (7) |
| | $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ (8) |
| | $y = e^2 \sin 3x$ (9) |
| | $y = e^{-4x/5} \left[c_1 \cos\left(\frac{2}{5}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \right]$ (10) |
- (11) הוכחה.

משוואות לינאריות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטת השוואת מקדמים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- $$y'' - 2y' + y = e^{2x}, y(0) = 2, y'(0) = 7 \quad (2)$$
- $$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$
- $$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$
- $$y'' - y' - 2y = 4\sin 2x \quad (3)$$
- $$y'' + 3y' = 9x \quad (6)$$
- $$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$
- $$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$
- $$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$
- $$z'' + z = \sin x \quad (8)$$
- $$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$
- $$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$
- $$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות:

- $$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$
- $$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$
- $$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$
- $$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$
- $$c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (6) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$
- $$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$
- $$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (8)$$
- $$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$
- $$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$
- $$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$
- $$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

משוואות לינאריות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציית הפרמטרים

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2) \qquad y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0; \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4) \qquad y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6) \qquad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

משוואות לינאריות לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - השיטה האופרטורית

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

בשאלות אלו הסימון הוא: $(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)$.

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2) \quad (D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4) \quad (D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6) \quad (D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

משוואות ליניאריות עם מקדמים לא קבועים - שיטת משוואת אוילר

שאלות:

(1) מד"ר לינארית, מסדר שני, כללית, משוואת אוילר הומוגנית.

א. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, (x \neq 0)$

ב. $x^2 y'' + 3xy' + y = 0, (x \neq 0)$

ג. $x^2 y'' + xy' + y = 0, (x \neq 0)$

(2) מד"ר לינארית, מסדר שני, כללית, משוואת אוילר לא הומוגנית.

א. $x^2 y'' - xy' + y = x^2, (x > 0)$

ב. $x^2 y'' + xy' = x \ln x, (x > 0)$

תשובות סופיות:

(1) א. $y = c_1 |x|^2 + c_2 |x|^3$ ב. $y = c_1 |x|^{-1} + c_2 |x|^{-1} \ln |x|$ ג. $y = c_1 \cos(\ln |x|) + c_2 \sin(\ln |x|)$

(2) א. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + x^2$ ב. $y = c_1 + c_2 \ln x + x \ln x - 2x$

משוואות לינאריות כלליות – שיטת ד'אלמבר – שיטת הפתרון השני

שאלות:

(1) פתור $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ כאשר ידוע $y_1(x) = e^{2x}$.

(2) פתור $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

- (3) הסבר את שיטת הפתרון השני לפתרון מד"ר לינארית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגם על המד"ר $(1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}$, $(0 < x < 1)$, כאשר ידוע $y_1(x) = e^{2x}$ פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות:

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושו

שאלות:

- (1) האם ייתכן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$ הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$.
- (2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ בקטע $(-4, \infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה- מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$ בקטע $(-\frac{1}{2}, \infty)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$ בקטע $[-4, 4]$.
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2 בעלת מקדמים רציפים בקטע ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשום משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x > 0$ שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות:

(1) לא.

(2) $W = -2x$.

(3) כן.

(4) א. $W = 0$ ב. שאלת בדיקה ג. לא. ד. לא.(5) א. שאלת הוכחה ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות:

(1) נתונה המשוואה $y'' - 4y = 12x$.
א. פתור את המשוואה.

ב. מצא פתרון המקיים:
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסה למצוא פתרון המקיים:
$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תן דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.
האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:
$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראה כי $y_1(x) = 0$ ו- $y_2(x) = x^2$, הם פתרונות של הבעיה.
האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שהפונקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות:

(1) א. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$ ב. $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו ל: www.GooL.co.il

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.