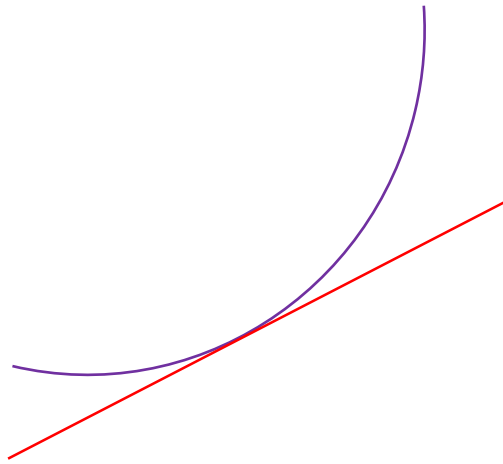


חשבון
דיפרנציאלי
ואינטגרלי
I



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר <http://www.gool.co.il> הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: [חדו"א 1](#)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

- 4..... פרק 1 - פונקציה ממשית
- 5..... פתרונות
- 6..... פרק 2 - גבול של פונקציה
- 10..... פתרונות
- 11..... פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים
- 11..... רציפות
- 13..... משפט ערך הביניים (של קושי)
- 13..... פתרונות
- 14..... פרק 5 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)
- 15..... פתרונות
- 16..... פרק 6 - כלל לופיטל
- 18..... פתרונות
- 19..... פרק 7 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
- 19..... פונקציות של שני משתנים
- 20..... פתרונות
- 21..... פרק 8 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)
- 22..... פתרונות
- 23..... פרק 9 - פונקציות הומוגניות, משפט אוילר

פרק 1 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות : $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הוא אי זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3\sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2\sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מופצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

* יש הקוראים לפונקציה "מופצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות

(1)

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 \quad (5) & x \neq 0, 1, -1 \quad (4) & x \text{ כל } (3) & x \neq \pm 2 \quad (2) & x \text{ כל } (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 \quad (10) & -1 < x < 1 \quad (9) & x \text{ כל } (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 \quad (7) & x \geq 4 \quad (6) \\
 x \neq \pi/4 \cdot k \quad (15) & x \neq \pi/20 + \pi/10 k \quad (14) & 0 < x \neq 1 \quad (13) & x \text{ כל } (12) & 0 < x \neq 1 \quad (11) \\
 & & -2 < x < 0 \quad (18) & 3 < x < 5 \quad (17) & x \text{ כל } (16)
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lllll}
 x \quad (6) & x - 8 \quad (5) & \frac{4}{x-4} \quad (4) & x^2 - 4 \quad (3) & 4 \quad (2) & -3 \quad (1)
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{llll}
 y \neq 3, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (3) & y \neq 1, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2) & y \text{ כל } , \quad f^{-1}(x) = 3x+1 & (1) \\
 & & , f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} & (4) \\
 & & & y \geq -4
 \end{array}$$

(4)

זוגיות - 2, 3, 5, 8 אי זוגיות - 1, 4 כלליות - 6, 7

(5)

$$\begin{array}{llll}
 \pi \quad (4) & 3\pi \quad (3) & \pi/2 \quad (2) & 2\pi \quad (1)
 \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{ll}
 y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) & y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) & y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)
 \end{array}$$

פרק 2 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+2}\right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת): $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$(a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(11) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות

									(1)
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									(2)
$\frac{8}{17}$ (9	27 (8	3 (7	32 (6	-3 (5	$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1	(3)
	$-\frac{8}{3}$ (8	$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$-\frac{1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	(6)
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	(7)
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	(8)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	(9)
								0 (10	
					-1 (5	1 (4	ϕ (3	ϕ (2	4 (1
									(10)
	$\pm\infty$ (7	$\sin \pi / 4$ (6	1 (5	5 (4	0 (3	9 (2	28 (1		

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 3 - רציפות ומשפט ערך הביניים

רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן :
(בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.
למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x+x^2} & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה : על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. (5) הוכח או הפרך :

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד :

$$x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות :

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

(13)

$$\cdot \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות

(1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי: $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנקי $x = 1$. לא רציפה בנקי $x = 2$. (1) (2) $k = 1$. (2) $k = 4$.

(3) $k = \frac{2}{3}$. (4) $k = -1$. (1) (3) $a = 0, b = \frac{1}{2}$. (2) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$.

(3) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$. (4) $a = e/3, b = -e/3$. (1) (4) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג

ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1, 1]$. (13) א. $f(0) = -1, f(2) = 5$. ב. לא.

פרק 5 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

- (1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .
- (5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.
- (6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.
- (7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.
- (8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.
- (9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.
 (א) $(2, -3)$ $y = x^2 - 2x + 1$ (ב) $(-3, 1)$ $y = \sqrt{x}$
- (10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:
 $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
- (11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

(8) $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

(9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$.

(11) 71.57°

(12) 71.56°

פרק 6 - כלל לופיטל

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל לופיטל

אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות**(1)**

$$\frac{5}{6} (7) \quad \frac{3}{2} (6) \quad \frac{1}{6} (5) \quad 4 (4) \quad n-1 (3) \quad \frac{20}{17} (2) \quad \frac{5}{6} (1)$$

$$2 (14) \quad -\frac{1}{2} (13) \quad \frac{1}{6} (12) \quad \frac{1}{2} (11) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) (10) \quad 1 (9) \quad -\frac{3}{2} (8)$$

$$\frac{1}{2} (21) \quad \frac{1}{2} (20) \quad \frac{1}{6} (19) \quad \frac{a}{b} (18) \quad \frac{a}{b} (17) \quad 1 (16) \quad 1 (15)$$

$$1 (28) \quad 1 (27) \quad -\frac{3}{4} (26) \quad -\frac{1}{2} (25) \quad -\frac{1}{3} (24) \quad \frac{1}{3} (23) \quad \frac{1}{8} (22)$$

$$0 (35) \quad \infty (34) \quad 0 (33) \quad \infty (32) \quad \frac{1}{2} (31) \quad \frac{1}{2} (30) \quad \frac{2}{3} (29)$$

$$0 (42) \quad 0 (41) \quad 0 (40) \quad 0 (39) \quad 0 (38) \quad 0 (37) \quad 1 (36)$$

$$\frac{1}{2} (49) \quad \ln\frac{3}{5} (48) \quad 0.5 (47) \quad 0 (46) \quad 2.5 (45) \quad 6 (44) \quad 0 (43)$$

$$1 (56) \quad e^2 (55) \quad 1 (54) \quad 1 (53) \quad 1 (52) \quad e (51) \quad -\frac{1}{2} (50)$$

$$1 (63) \quad e (62) \quad 1 (61) \quad 1 (60) \quad e^{-1/2} (59) \quad e^{1/3} (58) \quad e^3 (57)$$

$$e^{-1/6} (65) \quad e (64)$$

(2)

$$0.75 (3) \quad 0.25 (2) \quad 1 (1)$$

פרק 7 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \quad \text{לדני תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות

- | | | | | | |
|------------------|--------------------------------------|------|------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| $Max(0, \pm 1)$ | $\min(\pm 1, 0)$ | (2) | $Max(\pm 1, ml)$ | $\min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (1) |
| $Max(\pm 2, 1)$ | $\min(\pm 2, 1)$ | (4) | $Max(2, 3)$ | $\min(-2, -3)$ | (3) |
| | $Max(9, 36)$ | (6) | | $Max(6, 2)$ | (5) |
| $Max(\pm 1, ml)$ | $\min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$ | (8) | | $(6, 2)$ | (7) |
| | $\min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$ | (10) | | $7/\sqrt{45}$ | (9) |
| | $Max(2, 3)$ | (12) | | $Max(6, 2)$ | (11) |
| | | | $\min\{2K + L\}$ | $;$ | $\sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$ (13) |

פרק 8 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$ וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6\$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8\$.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכף.
- (3) $(0, 0)$ אוכף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוכף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום . $(4, 4)$ מקסימום .
- (6) $(4, 4)$ מקסימום .
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום .
- (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$.
- (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך . נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 9 - פונקציות הומוגניות, משפט אוילר

שאלה 1

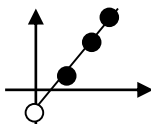
- א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m \right)^{1/m}$ הומוגנית. הנח כי m קבוע חיובי.
- ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.
- ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

שאלה 2

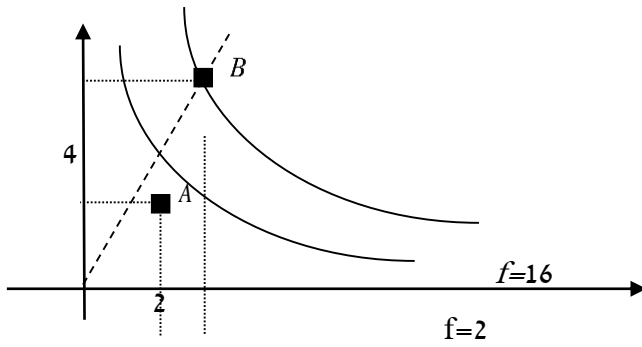
- תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m המקיימת $f(6, 3) = 243$ ו- $f(2, 1) = \sqrt{27}$.
- א. מצא את סדר ההומוגניות, m .
- ב. בנקודה $(6, 3)$ עוברת עש"ע של f . מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל. המשיק הוא $2x + 3y = 21$. מצא את $f_x(1, 0.5)$, $f_y(2, 1)$, $f_x(2, 1)$.

שאלה 3

- תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
- על הפונקציה g ידוע כי $g(4) = 5$, $g(1) = 3$, $g'(8) = 2$.
- המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) כך: $t = \frac{4y}{x}$.
- מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) באופן הבא: $u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$.



- א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1. מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?
- ב. הוכח כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת. צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.
- ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?
- ד. הוכח כי $u_x(1, 2) = -16$.



שאלה 4

הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3.
הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B .

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$ על ידי $u(x, y) = (f(x, y))^2$.

ג.1. לפי כללי הגזירה מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f_x(x, y)$. הסבר זאת בקצרה.

ג.2. הוכח כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$. היעזר ב-1 ובנתונים על f .