סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא לסטטיסטיקה ואקונומטריקה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

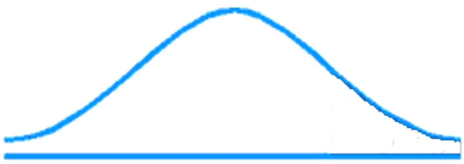
גול זה בול. בִּשְׁבִילְךָ!

תוכן

פרק 1 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד.
פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

נוסחת פונקציית הצפיפות: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטים שמתחת לעקומה.
כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.
התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות Z.

$Z \sim N(0,1^2)$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.
לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :

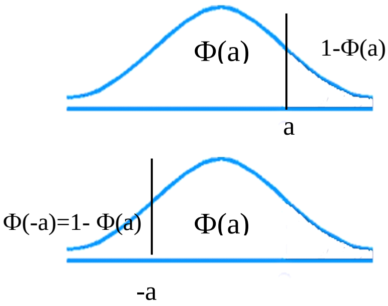
$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

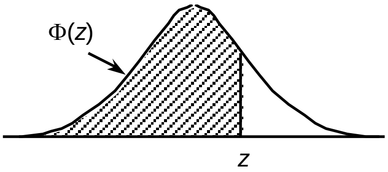
$$Z \sim N(0,1^2)$$

שימוש בטבלה

P



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי Φ(z)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
Φ(z)	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

<u>דוגמה</u> : (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?

ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?

ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?

ד. מהו המשקל ש90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
   א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ.?
   ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
   ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
   ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
   ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות .
   א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
   ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
   ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
   ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג .
   א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
   ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
   ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
   ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
   ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל – 140 ק"ג?

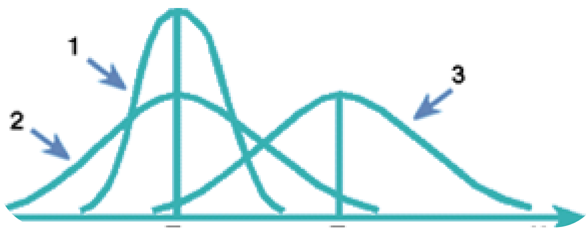
4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
   א. מצאו את העשירון העליון.
   ב. מצאו את האחוזון ה95.
   ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטיליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225 .
   א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?
   ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
   ג. מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
   ד. מהו האחוזון ה- 20?
   ה. מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
   א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
   ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
   ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
   א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
   ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
   ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
   ד. מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
   ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל בינהן.



א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

א. בעשירון העליון.

ב. בממוצע.

ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00 . מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה . מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב . ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976 .

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

שאלה 1
א. 89.25%
ב. 2.28%
ג. 0
ד. 50%

שאלה 3
א. 26.43%
ב. 89.44%
ג. 39.44%
ד. 0.383
ה. 100%

שאלה 5
א. 119.2
ב. 80.8
ג. 112.6
ד. 87.4

שאלה 7
א. 500
ב. 100
ג. 0.3446
ד. 733
ה. 267

שאלה 8
א. 3
ב. בממוצע.
ג. 1

שאלה 9
א. 0.1587
ב. 0.0228
ג. 0.8563
ד. 0.3975

שאלה 10
א. 1925
ב. 0.2266
ג. 0.1587

שאלה 11
א. 0.1359
ב. 0.675
ג. 100
ד. 0.25

פרק 2 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ, כמו כן הגובה של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס״מ וסטיית תקן של 8 ס״מ.

מה הסיכוי שגבר אקראי מהמדינה יהיה גבוה מאישה אקראית? (0.7823)

תרגילים:

1. המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
כמו כן המשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?

2. ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪ . ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?

3. צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?

4. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

5. לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמאלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמאלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נימכר ב- 2 ₪ וליטר חלב עזה נימכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל- 30 ליטר ?
ג. מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

פתרונות:

שאלה 1

0.2177

שאלה 2

א. תוחלת 7000, סטיית תקן 2247.

ב. 0.3264

ג. 9881

שאלה 3

א. תוחלת 300, שונות 576.

ב. 0.3372

ג. 294

שאלה 4

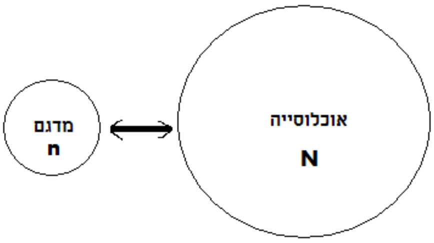
א. תוחלת 3000 מ״ל וסטיית תקן 40 מ״ל.

ב. 0.0062

פרק 3 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

רקע:

אוכלוסייה – קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.



למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם – חלק מתוך האוכלוסייה.

למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.

הדגימה בקורס תהייה דגימה מקרית הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכויי להיכלל במדגם.

סטטיסטי – גודל המחושב על המדגם.

פרמטר – גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים

למשל:

	סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)
ממוצע	$\overline{X}$	μ
פרופורציה (שכיחות יחסית)	$\widehat{p}$	P

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

<u>דוגמה</u> <u>(פתרון בהקלטה):</u>

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים . הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקריי?

תרגילים :

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".

נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

מתכננים לדגום מאוכלוסיה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N=1000$	

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

3. נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה ?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

פרק 4 - התפלגות הדגימה

ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה , אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה :

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה : σ.

א. תכונות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה :

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב-n . תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי :

$$V(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן :

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

ב. דגימה מהתפלגות נורמאלית

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

$$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

ג. משפט הגבול המרכזי

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול ($n \geq 30$)
ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלית $\bar{x} \sim\succ N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

תרגילים :

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
   א. מי האוכלוסייה?
   ב. מה המשתנה?
   ג. מהם הפרמטרים?
   ד. מהו גודל המדגם?
   ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?
   ו. מהי טעות התקן?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים :

מספר מקלטים	מספר המשפחות
0	500
1	2500
2	3500
3	3000
4	500
	סך הכול $N=10000$

נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

א. בנו את פונקצית ההסתברות של x.

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x.

ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק״ג ?
ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק״ג?
ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5. הגובה של המתגייסים לצה״ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס״מ וסטיית תקן של 10 ס״מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס״מ?
ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס״מ?
ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס״מ?
ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ״ק וסטיית תקן של 10 סמ״ק.
א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ״ק?
ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ755 סמ״ק?
ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ״ק?
ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

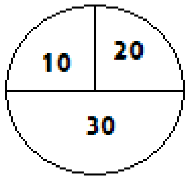
8. משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4 .

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקצית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ- 8500 ₪?

11. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב- 50 ההטלות?

12. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ .

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקצית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
P(X)	¼	¼	¼	¼

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50 . מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ- 5?

14. נתון ש $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם : $\bar{X}$

לכן $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה : (בחר בתשובה הנכונה)

א. 0

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש X מתפלג כלשהו עם תוחלת : μ ושונות σ^2.

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :
(בחר בתשובה הנכונה)

א. $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ב. $\mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

ד. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

16. נתון ש $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ אזי :

(בחר בתשובה הנכונה)

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו $\bar{X}$ קבוע.

ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו μ קבוע.

ד. μ ו $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17. משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.
   א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
   ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

פתרונות:

שאלה 2

א.

X	0	1	2	3	4
P(x)	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05 \ \sigma^2 = 0.9475 \ \sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05 \ \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$

$\sigma(\overline{X}) = 0.486$

שאלה 3

$\mu_{\bar{x}} = 3.5$

$\sigma(\overline{X}) = 1.21$

שאלה 4

א. 0.8413

ב. 0.0013

ג. 0

ד. 0.1974

שאלה 6

א. 0.0465

ב. 27.71

ג. 0.2628

שאלה 7

א. 0

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

<u>שאלה 8</u>

א. 0.5468

ב. 0.6826

<u>שאלה 9</u>

א.

	10	20	30
P(x)	0.25	0.25	0.5

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

<u>שאלה 10</u>

0.0475

<u>שאלה 11</u>

0.1814

<u>שאלה 12</u>

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

<u>שאלה 14</u>

התשובה ב

<u>שאלה 15</u>

התשובה ד

<u>שאלה 16</u>

התשובה ג

<u>שאלה 17</u>

א. 2.429

ב. 0.25

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם

רקע:

בפרק זה נדון על התפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.

Y- מספר ההצלחות במדגם (למשל , מספר המובטלים במדגם)

$\hat{p}=\frac{y}{n}$ - פרופורציית ההצלחות במדגם (למשל , שיעור המובטלים במדגם)

למשל,

$n=200$

מספר המובטלים : $Y=20$

פרופורציית המובטלים במדגם $\hat{p}=\frac{20}{200}=0.1$

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.

נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת , השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{P})=p$$

$$V(\hat{P})=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית :

אם $np\geq 5 \& nq\geq 5$ אזי $\hat{p}\sim\succ N(p,\frac{pq}{n})$

$$Z_{\hat{p}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1. $n \cdot p \geq 5$
  2. $n \cdot (1-p) \geq 5$
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1. $n \cdot p \geq 10$
  2. $n \cdot (1-p) \geq 10$
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.
- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות.
נדגמו 200 תלמידי תיכון.

א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית $(\hat{p})$ של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

תרגילים:

1. במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
   א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
   ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
   ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?

2. נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
   ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
   ג. יותר מ – 27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

3. לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.
   א. מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל 40% יש סמארטפון?
   ב. מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמאטרפון?
   ג. מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמרטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
   ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

4. נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
   א. מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
   ב. מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמתית ביותר מ-4%?
   ג. כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
   ד. מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?

5. נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ל"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6. נתון ש $X \sim B(n,p)$ נגדיר את המשתנה הבא : $\hat{P}=\dfrac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש :

$$E(\hat{P})=p$$

$$V(\hat{P})=\frac{P(1-P)}{n}$$

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

פתרונות:

שאלה 1

א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064

ב. 0.5

ג. 0.3446

שאלה 2

א. 0.0618

ב. 0.0618

ג. 0.8238

שאלה 3

א. 0.5

ב. 0

ג. 0.8968

ד. גדלה

שאלה 4

א. 0.0062

ב. 0.0456

פרק 5 - מושגים בסיסיים באמידה

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת.

כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל- μ .

כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p .

בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת , ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ.
- שגיאת אמידה : $|\hat{\theta}-\theta|$ - ההפרש בין האומד לאמת(הפרמטר).

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכנסת ה- 19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

מה הפרמטר בדוגמה זו?

מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל θ : $E(\hat{\theta})=\theta$
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו , כלומר : $\sigma(\hat{\theta})=S.E$

<u>להלן פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:</u>

<u>ממוצע האוכלוסייה</u>: μ

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}$

$E(\bar{x})=\mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל μ.

כמו כן טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=SE$

<u>פרופורציה באוכלוסייה</u>: p

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p}=\frac{y}{n}$

$E(\hat{p})=p$ לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל p.

כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P})=\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$

<u>שונות האוכלוסייה</u>: σ^2

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

$E(S^2)=\sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל σ^2.

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$$

<u>**הערה:**</u> אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

<u>דוגמה: (פתרון בהקלטה)</u>

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה. להלן התוצאות שהתקבלו:

2,1,3,2,1,4,5,2,1,3

אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

תרגילים:

1. מתוך 500 טירונים נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה ? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

2. לפי נתוני היצרן מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה . במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א.מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה ? מהם הפרמטרים שלה?

ב.מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

3. נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו :

168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצא אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצא אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצא אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

4. נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו :

$\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

5. במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה. דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
א. סטיית התקן של האוכלוסייה.
ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
ג. סטיית התקן של המדגם.
ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6. משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 . אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה :

א.3

ב.2.5

ג. 1.581

ד.אין מספיק נתונים לדעת.

7. במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב- $n-1$?

א. כאשר n קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות .
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל- μ היא :

א. 16
ב. 8
ג. 4
ד. 2

9. מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.

ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.

ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.

ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

פתרונות:

שאלה 3

א. 177.9
ב. 64.1
ג. 0.4

שאלה 4

א. 8.1
ב. 3.16

שאלה 5

התשובה היא ד.

שאלה 6

התשובה היא ג.

שאלה 7

התשובה היא ד.

שאלה 8

התשובה היא ד.

שאלה 9

התשובה היא ג.

פרק 6 - אמידה נקודתית

אומד חסר הטיה

רקע:

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל θ : $E(\hat{\theta})=\theta$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

X	1	2	3
הסתברות	2θ	$1-6\theta$	4θ

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות : X_1 ו- X_2

א. הראו שהאומד $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$ הוא אומד מוטה ל- θ.

- הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$, כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1.

ג. תקנו את T_1 כך שיהיה אומד חסר הטיה.

- אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא : $T_3=1.5X_1-X_2-1$. האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג?

- אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל- θ אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$ רק אם g תהיה
לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

- אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה: σ^2 : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X.

<u>תזכורות חשובות</u>:

- אם $Y = aX + b$ אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b \qquad V(Y) = a^2 \cdot V(X) \qquad \sigma_Y = |a|\sigma_x$$

- אם $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקרים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

אם $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים <u>בלתי תלויים</u> בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$$

תרגילים:

1. הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת - μ, נלקח מדגם של 5 ציונים $X_1, \ldots, X_5$. שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $$T_1 = \frac{X_1 + \ldots + X_5}{5}$$

חוקר ב' הציע: $$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2}$$

חוקר ג' הציע: $$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2}$$

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
ב. הצע תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.
ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100. חשב את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.
ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

2. כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של 2n נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad T_2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$$

א. בִדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3. $X \sim B(n, p)$ כלומר X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n.
א. פתחו אומד חסר הטיה ל-P.
ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד.
ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$.
ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$

4. בתיק מניות שתי מניות . מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר פרמטר לא ידוע θ , $0 \le \theta \le 2$.

פונקציית ההסתברות של X – מספר המניות שיעלו ביום מסוים :

$$P(X=0)=1-\frac{\theta}{2} \qquad P(X=1)=\frac{\theta}{3} \qquad P(X=2)=\frac{\theta}{6}$$

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל- θ שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום במשך שלושה ימים X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ״ל והם בלתי תלויים).

5. בקרב המטפלות בת״א מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מיקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא :

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב- 3 תינוקות הוא θ.

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת״א , נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד , אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצא אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות .

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם .

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת״א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת״א.חשבו אומדנים.

6. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות :

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז 5T אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ .

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2.

7. במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים . במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p , מכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$. דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, Y - מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$

ב. $\frac{Y}{20}$

ג. $\frac{X+Y}{60}$

ד. $\frac{2X+Y}{80}$

8. יהי T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.

א. מצא אומד חסר הטיה ל- θ^2 המתבסס על T_1 ו- T_2.

ב. מצא אומד חסר הטייה ל- $\theta(1-\theta)$ המתבסס על T_1 ו- T_2.

9. נתון ש X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2. נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה
אוכלוסיה.

א. הראה ש $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל μ כאשר $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות $X_1 \cdot X_2$ הראה שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2 .

10. $X_i \sim N(\mu,1)$ כאשר $i=1,2...,n$

נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו. מצא אומד חסר הטיה ל- μ^2 .

פתרונות:

שאלה 1

א. T_1 ו- T_2

ב. $\frac{2}{3}T_3$

ג. $T_2 = 110 \quad T_1 = 76.6$

ד. T_1

שאלה 2

ב. T_2

שאלה 3

א. $\frac{x}{n}$

ב. $1-\frac{x}{n}$

ג. x

שאלה 4

א. $\frac{3x}{2}$

ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$

שאלה 5

א. $1-\frac{x}{2}$

ג. 0.125

ה. לשונות 0.917

שאלה 6

א. נכון.

ב. לא נכון.

שאלה 7

תשובה: ב

<u>שאלה 8</u>

א. $T_1 \cdot T_2$

ב. $T_1 - T_1 \cdot T_2$

<u>שאלה 9</u>

הוכחה

פרק 7 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה)

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה , אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי. מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה זה לבנות רווח סמך .

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא $1-\alpha$.

$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך.

כך ש : $P(A \le \mu \le B) = 1-\alpha$

A- גבול התחתון של רווח הסמך

B- הגבול העליון של רווח הסמך

$L = B - A$ - אורך רווח הסמך

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל- 590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

מהי אוכלוסיית המחקר?

מה המשתנה באוכלוסייה?

מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

מהו רווח הסמך?

מה אורך רווח הסמך?

מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה

הפרמטר שנרצה לאמוד : μ

האומד נקודתי : $\bar{x}$

התנאים לבניית רווח הסמך :

1 $X \sim N$ או $n \geq 30$

2 σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה

הנוסחה לרווח הסמך :

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה.

מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה.

נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

<u>שגיאת האמידה המקסימלית:</u>

$$\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ε-נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

<u>דוגמה</u>: (פתרון בהקלטה)

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

<u>קשרים מתמטיים ברווח הסמך:</u>

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון $(1-\alpha)$ גבוהה יותר כך $z_{1-\alpha/2}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

תרגילים :

1. חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של -95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800.
   א. מי האוכלוסייה במחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
   ד. מה רווח הסמך לפרמטר?
   ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?
   ו. מה אורך רווח הסמך?
   ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

2. מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנה את רווח הסמך.

3. מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
   א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
   ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
   ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

4. דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
   א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95 % לתוחלת השכר במשק.
   ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
   ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב50%?
   ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?
5. בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (99,105). שחזרו את :
   א. ממוצע המדגם.
   ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
   ג. רמת הסמך.

6. זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

7. חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא : $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
א. מהו ממוצע המדגם?
ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5 ?

8. חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, מי מהמשפטים הבאים אינו יהיה נכון.
א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

9. חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל $48 < \mu < 54$ מה נכון בהכרח :
א. $\mu = 51$
ב. $\overline{X} = 6$
ג. $\overline{X} = 51$
ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

10. איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה? (בחר בתשובה הנכונה)
א.רמת הביטחון.
ב. סטיית התקן באוכלוסייה.
ג. מספר המשתתפים.
ד. סטיית התקן במדגם.

פתרונות :

שאלה 2

$4920.6<\mu<4979.4$

שאלה 3

א. $223.42<\mu<236.58$

ב. $222.16<\mu<237.84$

שאלה 5

א. 102

ב. 3

ג. 0.9544

שאלה 6

א. $3.58<\mu<4.42$

ב. יקטן פי 2

ג. גדל

שאלה 7

א. 87

ב. 5

ג. 0.9544

שאלה 8

א. 139

ב. $21<\mu<25$

שאלה 9

התשובה היא : ב

שאלה 10

התשובה היא : ג

שאלה 11

התשובה היא : ד

קביעת גודל מדגם באמידת תוחלת עם שונות אוכלוסייה ידועה

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה : σ
ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים , נציב בנוסחה הבאה :

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה :87)

תרגילים:

1. משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל
המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

2. מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת
האמידה המרבית תהיה 0.5.
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
א. כמה מתגייסים יש לדגום?
ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד
הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?

3. יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ. חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל $-\mu$
ברמת ביטחון של 0.95 כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ. מהו גודל המדגם הנדרש?

פתרונות :

שאלה 1

780

שאלה 2

א. 139

ב. הדבר יקטין את ε פי 2.

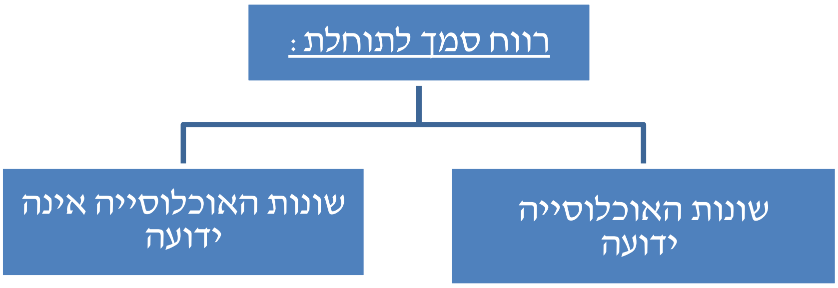
שאלה 3

$n = 62$

רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה) כששונות האוכלוסייה אינה ידועה

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים :



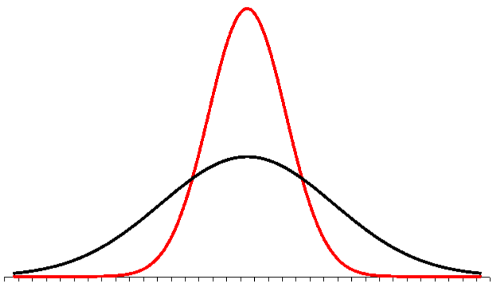
בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה (σ^2) אינה ידועה לנו .מקרה יותר פרקטי .

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול

רווח סמך : $\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

האומד לשונות : $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2_i - n\bar{X}^2}{n-1}$

התפלגות T :



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן df=n-1. ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח' . להלן התוצאות שהתקבלו בדקות : 4.7,5.2,4.6,5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

<u>פתרון :</u>

$4.39<\mu<5.51$

תרגילים:

1. מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95 % לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
ג. בהמשך לסעיף א, אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99 % כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

2. במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי: גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן S=13 ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90 % לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

3. אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 27,34,32,40,30 .
א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים ?

4. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

5. נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

6. נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x} = 13.8$, $S = 2$
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

7. שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר **μ**. לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10 . שניהם קבעו אותה רמת סמך.

סטטיסטיקאי א : הניח $\sigma = 20$

סטטיסטיקאי ב : חישב לפי המדגם וקיבל **S =20**

למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר? (בחר בתשובה הנכונה)

א. סטטיסטיקאי א

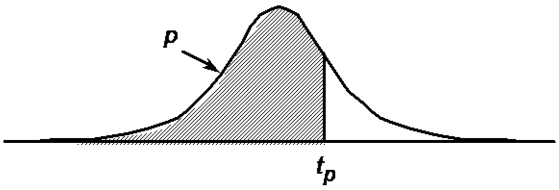
ב. סטטיסטיקאי ב

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

8. נתון ש : $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765 . מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

נספח : טבלת התפלגות T



P

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

פתרונות:

שאלה 1

א. $79.88 < \mu < 89.72$

שאלה 4

א. $96.63 < \mu < 107.37$

ב. $96.90 < \mu < 107.10$

שאלה 5

$3.149 < \mu < 3.351$

שאלה 8

90%

פרק 8 - רווח סמך לפרופורציה

רקע:

מטרה : לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי : $\hat{p}=\frac{y}{n}$ (Y- מספר ההצלחות שבמדגם)

רווח הסמך ל p : $\hat{p}\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

התנאי לבנות את רווח הסמך הינו מדגם של לפחות 30 תצפיות(לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10)

האומד לטעות התקן : $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

מתקיים ש : $\hat{P}=\frac{A+B}{2}$ $\qquad$ $L=2\varepsilon$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

1. במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים. מתוכם התקבל ש 24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

פתרון:

א. $7.5\%<p<16.5\%$

ב. 2.29%

תרגילים:

1. נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.
ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95 % למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד
בפועל.

2. במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.
א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי היי-טק).
ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?

3. במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים: $0.08 < p < 0.18$
א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?
ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

4. במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו.
510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?

5. במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?

6. ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95% . אורכו הינו 8.3156%.
מהו גודל המדגם שנלקח?

<u>פתרונות:</u>

<u>שאלה 3</u>

א. 52

ב. 0.997

<u>שאלה 5</u>

א. $22.5\%<p<30.9\%$

ב. $45.91\%<p<60.72\%$

<u>שאלה 6</u>

200

קביעת גודל מדגם באמידת פרופורציה

רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת:

החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$.

החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε (או את אורך רווח הסמך).

$L=2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.

ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר (p) לאומד ($\hat{p}$).

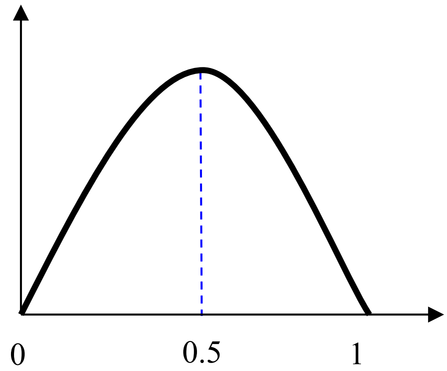
$\varepsilon = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

נקבל ש: $n\ge\left(\frac{2\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L}\right)^2$

הבעיה שאין אנו יודעים את $\hat{p}$.

נתבונן בביטוי $\hat{p}(1-\hat{p})$:



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על $\hat{p}$ נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור $\hat{p}=0.5$

$$n\ge\left(\frac{2\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{0.5\cdot0.5}}{L}\right)^2\Rightarrow n\ge\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L}\right)^2$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

<u>פתרון :</u>

א. 423

ב. 271

תרגילים:

1. הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?

2. משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
ב. חזרו על סעיף א. אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.

3. ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.
א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?

4. השאלות הבאות מתייחסות לסעיף 4 :
א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
ג. על סמך סעיף ב׳. האם תקבל את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?

5. משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
א. כמה מחוסנים יש לדגום ?
ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבל ש 15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98% ? מדוע הוא קטן מ3% ?

פתרונות:

שאלה 1

1068

שאלה 3

א. 601

ב. 108000 ₪.

פרק 9 - רווח סמך להפרש פרופורציות

רקע:

המטרה: לאמוד את $p_1 - p_2$: הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

האומד הנקודתי: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

התנאי לבניית רווח הסמך: כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבודקים לפחות 10).

רווח סמך:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה x. מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה y. מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?

פתרון:

(33% ,47%)

תרגילים:

1. מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת. מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.

א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק .

2. במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן.

קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B.

בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצבם השתפר. בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצבם השתפר.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.

ב. האם על סמך סעיף א ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?

3. נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית.

נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל- 65% מתוכן מכשיר DVD בבית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

פתרונות:

שאלה 2

א. $0.093 < P_A - P_B < 0.307$

שאלה 3

א. $0.625 < p < 0.7754$

פרק 10 - רווח סמך להפרש תוחלות ממדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה ידועות

רקע:

מטרה : לאמוד את פער התוחלות : $\mu_1-\mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי : $\bar{x}_1-\bar{x}_2$

התנאים לבניית רווח הסמך :

1. $\sigma^2{}_1,\sigma^2{}_2$ ידועות.

2. $X_1,X_2\sim N$ או $n_1,n_1>30$

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך :

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2{}_1}{n_1}+\frac{\sigma^2{}_2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$ לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נדגמו 100 תושבים מאזור a והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪.

כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור b וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪.

לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪.

אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור a לאזור b .

תרגילים:

1. מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?

2. ציוני .I.Q מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה״ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.

ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?

3. חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א׳ התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב׳ התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25 . עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

פתרונות :

שאלה 1

(-20,90)

שאלה 3:

רמות בטחון הגבוהות מ : 0.9476

כששונויות האוכלוסייה אינן ידועות אך שוות והמדגמים בלתי תלויים

רקע:

מטרה: לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1-\mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1-\bar{x}_2$

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2{}_1=\sigma^2{}_2$.
2. $X_1, X_2 \sim N$
3. מדגמים בלתי תלויים.

השונות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

דרגות החופש: $d.f=n_1+n_2-2$

רווח סמך:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2}\cdot\sqrt{\frac{S^2{}_p}{n_1}+\frac{S^2{}_p}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$ לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה :

	תל אביב	באר שבע
מספר האקדמאים	20	10
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.

הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

פתרון : (1357,1643)

תרגילים:

1. נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים.

כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם :

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב . רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

2. להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג $N(\mu_x,\sigma^2)$ ומשתנה Y שמתפלג $N(\mu_y,\sigma^2)$.

25	21	20	22	X
12	17	25	18	Y

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

פרק 11 - רווח סמך לתוחלת ההפרש במדגם מזווג

רקע:

מדגם מזווג : מדגם אחד שבו יש n צמדים.

כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים : X ו-Y.

ניצור משתנה חדש :

$$D = x - y$$

הפרמטר שנרצה לאמוד : μ_D

התנאים לבניית רווח הסמך :

- $x, y \sim N$
- המדגם מזווג

נוסחת רווח הסמך :

$$\bar{D} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש : $d.f = n - 1$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.

לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.

מְצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

תרגילים:

1. נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו- ב':

סמסטר א	סמסטר ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א לבין סמסטר ב.

ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?

ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

2. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל.
נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

המדינה	בזק-X	קווי זהב-Y
ארה"ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.3
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

פרק 12 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

רקע:

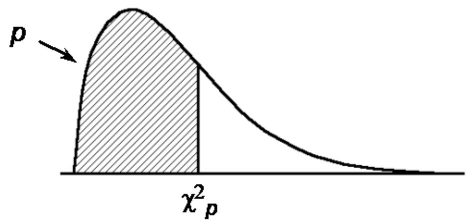
בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה.

<u>התנאי לבניית רווח הסמך</u>: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית , למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול.

רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת <u>חי בריבוע</u>.

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש.

דרגות החופש במקרה זה יהיו: n-1



<u>רווח הסמך לשונות</u>: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}$

כאשר $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2_i - n\cdot\bar{X}^2}{n-1}$ אומד לשונות הלא-ידועה.

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7,5.2,4.6,5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

<u>פתרון:</u>

$0.039 < \sigma^2 < 1.708$

תרגילים :

1. חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות : 18,17,21,26,28.
בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95 % לשונות זמן התגובה.

2. נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א.
במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית :
א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

3. ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ. להלן התוצאות שהתקבלו :

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.
א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

4. באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות :

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון ש $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$

א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

פתרונות :

שאלה 2

א. $30.285 < \mu < 31.315$

ב. $0.837 < \sigma < 1.607$

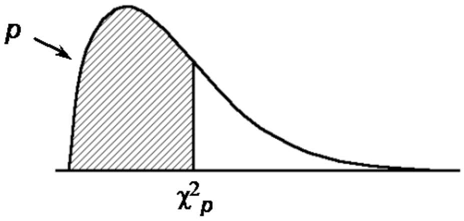
תשובה 3

א. לממוצע 104, לשונות 100.

ב. $99.32 < \mu < 108.68$

ג. $7.94 < \sigma < 13.7$

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p



df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	$0.0^{4}393$	$0.0^{3}157$	$0.0^{3}982$	$0.0^{2}393$	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

פרק 13 - רווח סמך ליחס שוניות

רקע:

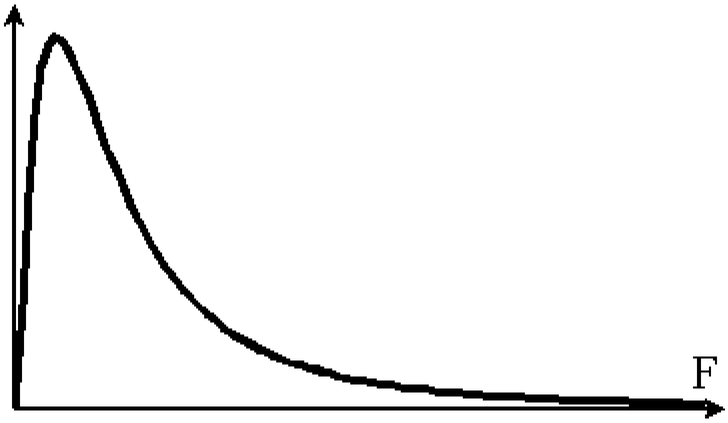
נרצה לאמוד את ההבדל בין שתי שונויות משתי אוכלוסיות שונות.

הפרמטר יהיה : $\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2}$: כלומר היחס בין השונויות.

התנאים :

- $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים גדולים.
- מדגמים בלתי תלויים.

רווח הסמך יבנה על סמך התפלגות הנקראת התפלגות F. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ומושפעת משתי דרגות החופש זו של המונה וזו של המכנה.



$df_1 = n_1 - 1$

$df_2 = n_2 - 1$

רווח הסמך יהיה :

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \le \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2} \le \frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות:

במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000. כמות הסטודנטים שנדגמו 16.

במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000.

נניח שההוצאה החודשית לבילוי בכל קבוצת גיל מתפלג נורמאלית.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% ליחס בין השונויות.

תרגילים:

1. בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת שונות החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות. מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:

סוג המתכת	A	B
N	8	10
$\sum X_i$	16	30
$\sum X_i^2$	60	198

יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.

א. בנו רווח סמך ליחס השונויות של רמות החוזק בין שני סוגי המתכות ברמת סמך של 90%.

ב. בנו רווח סמך ליחס סטיות התקן של רמות החוזק בין שני סוגי המתכות ברמת סמך של 90%.

ג. האם בבטחון של 90% ניתן לומר שסטיות התקן של שני סוגי המתכות שונות?

2. מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת.
במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$$

אמוד ברמת בטחון של 95% פי כמה גדולה השונות של הגברים באוכלוסייה מהשונות של הנשים.
מה יש להניח לצורך פתרון?

טבלת התפלגות F. ערכי החלוקה F_p של התפלגות $F(m, n)$

m — דרגות חופש המונה; n — דרגות חופש המכנה

		m										
p	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
.95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244
.975		648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977
.99		4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106
.995		16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426
.95	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41
.975		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41
.99		98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42
.995		198.50	199.01	199.16	199.24	199.30	199.33	199.36	199.38	199.39	199.39	199.42
.95	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74
.975		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34
.99		34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05
.995		55.55	49.80	47.47	46.20	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.68	43.39
.95	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91
.975		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75
.99		21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37
.995		31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.98	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70
.95	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68
.975		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52
.99		16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89
.995		22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38
.95	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00
.975		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37
.99		13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72
.995		18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03
.95	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57
.975		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67
.99		12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47
.995		16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18
.95	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28
.975		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20
.990		11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67
.995		14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01

p	n	m: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
.95	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07
.975		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87
.99		10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11
.995		13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23
.95	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91
.975		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62
.99		10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71
.995		12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66
.95	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69
.975		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16
.995		11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91
.95	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48
.975		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67
.995		10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25
.95	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28
.975		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68
.95	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09
.975		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18
.95	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92
.975		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50
.995		8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74
.95	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83
.975		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54
.95	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75
.975		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36

פרק 14 - תרגול מסכם ברווחי סמך

1. מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית . בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps . מהירות מתחת ל- 10 Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה.
התוצאות שהתקבלו במדגם : ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה.בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים :
א. תוחלת מהירות הגלישה.
ב. סטיית תקן של מהירות הגלישה.
ג. הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.

2. 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה. להלן התפלגות התשובות :

מספר פעמים	0	1	2	3	4	5
מספר אנשים	86	34	28	22	20	10

א. תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום . $\alpha = 0.05$
ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה" $\alpha = 0.1$

3. חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא $81 < p < 91$ רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.
א. כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?
ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
ג. בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 95% על סמך תוצאות המדגם

4. ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040$$
$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$

א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה- IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?

ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?

ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם הינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

5. להלן תוצאות מדגם שבדק עבור כל משפחה האם יש לה בבית מכשיר טאבלט.

אזור מגורים	גוש דן	שאר הארץ
גודל המדגם	200	240
מספר משפחות בעלי טאבלט	160	168

א. בנו רווח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.

ב. בנו רווח סמך לפרופורצית משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

6. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2cm$$
$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832cm^2$$

א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.

ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

7. בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B.לצורך פתרון נניח שסטית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?

ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

8. להלן מדגם של שכר הדירה בש"ח של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב :

שנת 2012	8000	7500	7000	6500	7500
שנת 2013	8000	8200	7800	6800	7700

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי . ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

פתרונות:

שאלה 1

א. $80.65 \le \mu \le 93.35$

ב. $13.5 \le \sigma \le 22.9$

ג. $0.225 \le p \le 0.575$

שאלה 2

א. $1.21 \le \mu \le 1.65$

ב. $10.85\% \le p \le 19.15\%$

שאלה 3

א. 70

ב. 99.88%

ג. $83\% \le p \le 89\%$

שאלה 4

א. $97.4 \le \mu \le 106.6$

ב. לא

ג. יגדל

שאלה 5

א. $0.5\% < p_1 - p_2 < 19.5\%$

ב. $0.704 \le p \le 0.768$

שאלה 6

א. $170.8 \le \mu \le 181.6$

ב. $8.8 \le \sigma \le 14.3$

<u>שאלה 7</u>

א. $-372 \le \mu_A - \mu_B \le 772$

ב. $6467 \le \mu \le 7133$

<u>שאלה 8</u>

$-21 \le \mu_{2013} - \mu_{2012} \le 821$

פרק 15 - בדיקת השערות כללית

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.

בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות :

השערת האפס המסומנות ב- H_0

והשערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו , את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה .

למשל ,

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל – 10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי . חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה , אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי.

לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל:

H_0 : התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

H_1 : התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל -10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה :

הכלל יוצר אזור שניקרא אזור דחייה (דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה) ואזור קבלה (קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה). כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .

בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. נשנה את כלל ההכרעה אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת . נבצע מדגם חדש אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

<u>הגדרת הטעויות:</u>

<u>טעות מסוג ראשון</u>- להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

<u>טעות מסוג שני</u>- להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

מה הן הטעויות האפשריות במחקר של התרופות? (בהקלטה)

<u>נגדיר את ההסתברויות הבאות:</u>

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות)

α=P(H_0 לדחות את | H_0 נכונה)= P_{H_0}(H_0 לדחות)

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

β =P(H_0 לקבל את | H_1 נכונה)=P_{H_1}(H_0 לקבל)

רמת בטחון:

$(1-\alpha)$ =P(H_0 לקבל את | H_0 נכונה)= P_{H_0}(H_0 לקבל)

עוצמה:

$\pi=(1-\beta)$ =P(H_0 לדחות את | H_1 נכונה) =P_{H_1}(H_0 לדחות)

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש- 5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א- השערת האפס) או ש- 7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב- השערה אלטרנטיבית).
כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל ההחלטה הבא: אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' (H_1).

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

תרגילים:

1. אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?

2. ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון. ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו- 9 לימון.הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?

3. יהי X מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X יקבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k)=\frac{1}{n}$ עבור $k=1,2,......,n$

נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X:

$$H_0: n=4$$
$$H_1: n=6$$

כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם X>3.

חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?

4. איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.2	0.2	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בנוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?

ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמק!

5. במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל 7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?

ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

6. להלן השערות:

$H_0 : X \sim t(5)$ (התפלגות t עם 5 דרגות חופש)

$H_1 : X \sim Z$ (התפלגות נורמאלית סטנדרטית)

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כלל ההחלטה?

ב. מהי העוצמה של כלל ההחלטה?

7. במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמאלית.

א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?

ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?

1. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.
2. מצב חרום מוגדר כעת בתוחלת של 7500 יחידות.
3. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6700.

8. במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל ?

ב. מהי העצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

9. זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות.
חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ 35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".
א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?
ב. על סמך תוצאות המדגם. מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32דקות?
ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

10. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120.
מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.
א. מהי רמת המובהקות של המחקר?
ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות ?
ג. כיצד התשובות לסעיף א ו ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

11. קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים , ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.
א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?
ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?

12. מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת.
חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

13. מספר המכוניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסונית. בשנה שעברה המכוניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכוניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסת המכוניות לחניון גדל השנה. מנהל החניון החליט לספור את מספר המכוניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכוניות שיספרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.
א. רשום את השערות מנהל החניון ואת כלל ההחלטה שלו. האם כלל ההכרעה הגיוני?
ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה ?
ג. מהי העוצמה של כלל ההחלטה , אם כיום קצב כניסת המכוניות לחניון גדל ל- 4 מכוניות בדקה?

14. עודד עובד במפעל שבו מתחילים לעבוד בשעה 8:00. עודד בדרך כלל מאחר לעבודה והמנהל החליט לרשום את שעת בואו לעבודה. המנהל טוען שמשך האיחור של עודד (דקות), X, היא משתנה אחיד $U(0, 60)$. עודד טוען שהוא לא מגיע באיחור כה גדול, אלא שהתפלגות X היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת איחור של 20 דקות.
לבדיקת טענת המנהל (H_0) כנגד טענת עודד(H_1), המבוסס על משך האיחור של חגי ביום אחד.
מוצאים שני כללי הכרעה :
כלל 1 : דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לפחות 40 דקות.
כלל2 : דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לכל היותר 20 דקות.
חשב את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההכרעה. מי עדיף?

פתרונות:

שאלה 2

$\alpha = \frac{1}{3}$ $\beta = \frac{2}{5}$

שאלה 3

$\alpha = 0.25$ $\beta = 0.5$

שאלה 4

א. $\alpha = 0.2$ $\beta = 0.8$

ב. $\alpha = 0.2$ $\beta = 0.3$

ג. כלל ב'

שאלה 5

ב. 0.00781

ג. 0.1678

שאלה 6

א. 0.05

ב. 0.022

שאלה 7

א. 0.0228

ב. 0.0918

ג. 0.9082

שאלה 8

א. 0.055

ב. 0.383

שאלה 10

א. 0.2981

ב. 0.3974

ג. קטן

שאלה 11

א. 0.0113

ב. 0.0495

<u>שאלה 12</u>

חוקר א

<u>שאלה 13</u>

ב. 0.1428

ג. 0.566

פרק 16 - בדיקת השערות על פרמטרים

הקדמה

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים :

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו , את השגרה הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג : נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה .

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא **כלל הכרעה :**
הכלל יוצר אזור שניקרא **אזור דחייה** (דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה) **ואזור קבלה** (קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה). כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .

אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α.

שלב ה:

בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו :

להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$n = 20$

$\overline{X} = 3120$

$S = 280$

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

תרגילים:

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
   א. מהי אוכלוסיית המחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר הנחקר?
   ד. מהן השערות המחקר?

2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק . אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
   א. מהי אוכלוסיית המחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר הנחקר?
   ד. מהן השערות המחקר?

3. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
   א. מהי אוכלוסיית המחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר הנחקר?
   ד. מהן השערות המחקר?

4. בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.
   א. מהי אוכלוסיית המחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר הנחקר?
   ד. מהן השערות המחקר?

<u>טעויות בבדיקת השערות</u>

<u>רקע:</u>

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא **<u>כלל הכרעה</u>** :

הכלל יוצר אזור שניקרא **<u>אזור דחייה</u>** (דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה) ו**<u>אזור קבלה</u>** (קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה). כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .

בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. נשנה את כלל ההכרעה אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת . נבצע מדגם חדש אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו :

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

<u>הגדרת הטעויות:</u>

<u>טעות מסוג ראשון</u>- להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

<u>טעות מסוג שני</u>- להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

<u>דוגמה</u> : (פתרון בהקלטה)

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט. אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

תרגילים:

1. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק . אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
   א. רשמו את השערות המחקר.
   ב. מה מסקנת המחקר?
   ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

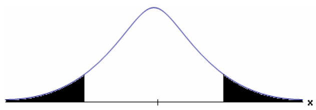
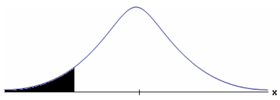
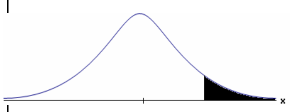
2. במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
   א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
   ב. מה סוג הטעות האפשרית?

3. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
   א. מהי אוכלוסיית המחקר?
   ב. מה המשתנה הנחקר?
   ג. מה הפרמטר הנחקר?
   ד. מה השערות המחקר?
   ה. מה מסקנת המחקר?
   ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

פרק 17 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

כאשר שונות האוכלוסיה ידועה

רקע:

השערת האפס : **השערת אלטרנטיבה:**	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן :

$$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה :

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדוק את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

תרגילים:

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהייה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק . אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

   א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

   ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3. מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ.מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4. המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

5. לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
   קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6. במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחר בתשובה הנכונה.
   א. הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
   ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
   ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
   ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

7. חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח: (בחר בתשובה הנכונה)

   א. השערת האפס הייתה נדחית.
   ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
   ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

8. שני סטטיסטיקאים בדקו השערות $H_0 : \mu = \mu_0$ כנגד $H_1 : \mu > \mu_0$ עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות. שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.
   א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
   ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

פתרונות :

שאלה 1:

נקבל H_0

שאלה 2:

נדחה H_0

שאלה 3:

נדחה H_0

שאלה 4:

נדחה H_0

שאלה 5:

נקבל H_0

שאלה 6:

ב

שאלה 7:

ג

שאלה 8:

א. אותה מסקנה

ב. לא ניתן לדעת.

סיכוי לטעויות ועוצמה כאשר שונות האוכלוסייה ידועה

רקע:

	הכרעה		
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

נגדיר את ההסתברויות הבאות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות)

$\alpha=P($לדחות את H_0 | נכונה $H_0)=P_{H_0}($לדחות $H_0)$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$\beta=P($לקבל את H_0 | נכונה $H_1)=P_{H_1}($לקבל $H_0)$

רמת בטחון:

$(1-\alpha)=P($לקבל את H_0 | נכונה $H_0)=P_{H_0}($לקבל $H_0)$

עוצמה :

$\pi=(1-\beta)=P($לדחות את H_0 | נכונה $H_1)=P_{H_1}($לדחות $H_0)$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני :

השערת האפס : **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
תנאים:	3. σ ידועה 4. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β :	$P_{H_1}(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1}(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1}(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

התפלגות ממוצע המדגם : $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

התקנון : $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

<u>דוגמה</u> : (פתרון בהקלטה)

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

תרגילים:

1. נתון ש $X \sim N(\mu,\sigma^2=1)$

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ :

$$H_0: \mu = 5$$
$$H_1: \mu = 7$$

מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0 ?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

2. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א?

3. להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200$$
$$H_1: \mu \neq 200$$
$$\sigma = 30$$
$$n = 225$$

א. רשום כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א מהי העצמה אם התוחלת שווה ל- 195?

ג. הסבר ללא חישוב איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהייה 5%?

4. מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשום את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.

ד. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

5. להלן השערות של מחקר

$$H_0 : \mu = 50$$
$$H_1 : \mu = 58$$

מעוניינים לדגום 100 תצפיות . ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.

א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10% . מהי רמת המובהקות?

ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו) ?

1. סטיית התקן הייתה יותר גדולה .
2. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

<u>השאלות שלהלן הן שאלות רב בררתיות. בחר בכל שאלה את התשובה הנכונה ביותר:</u>

6. אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א ו-ב נכונות.

7. חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

8. מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

	α	$1-\beta$
א.	גדולה	גדולה
ב.	גדולה	קטנה
ג.	קטנה	גדולה
ד.	קטנה	קטנה

9. נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

א. הן α, והן $(1 - \beta)$, יקטנו.

ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $(1 - \beta)$ יגדל.

ג. α יגדל ואילו $(1 - \beta)$ יקטן.

ד. הן α והן $(1 - \beta)$ יגדלו.

10. ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120 . רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137.
על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה ?
א. טעות מסוג ראשון.
ב. טעות מסוג שני.
ג. טעות מסוג שלישי.
ד. אין טעות במסקנתו.

פתרונות :

שאלה 1:

א. מעל 6.645

ב. 0.3632

שאלה 2:

א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$

ב. נדחה H_0

ג. 1

שאלה 3:

א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$

ב. 0.8051

ג. תקטן.

שאלה 4:

א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$

ב. 0.0885

ג. תקטן.

ד. תקטן.

שאלה 6:

ד

שאלה 7:

ג

שאלה 8:

ג

שאלה 9:

א

שאלה 10:

ב

קביעת גודל מדגם כששונות האוכלוסיה ידועה

רקע:

השערות המחקר הן :
$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1$$

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי :

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.

נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 17$.

כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

תרגילים:

1. במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

2. משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות : כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?)

3. השערות המחקר הן :
$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1$$

כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הוכח שגוגל המדגם הרצוי לכך יהיה :

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

פתרונות :

שאלה 1:

41

שאלה 2 :

78

שאלה 3:

הוכחה

מובהקות התוצאה (p-value) בבדיקת השערות על תוחלת עם שונות ידועה

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v .

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$p_v = P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

אם ההשערה היא דו צדדית:

$p_v = 2P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \ne \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	5. σ ידועה 6. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \ge \bar{x})$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \le \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \le \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \ge \bar{x})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

תרגילים:

1. לפניך השערות של מחקר:

$$H_0 : \mu = 70$$
$$H_1 : \mu > 70$$

המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:

$$n = 100$$
$$\bar{x} = 74$$

מהי מובהקות התוצאה?

2. השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪ . מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3. אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ – 100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?

4. מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס״מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס״מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס״מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס״מ , כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5. אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאוד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון ? לא נכון? נמק.

6. בבדיקת השערות התקבל שה- *p-value=0.02* .
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה.
א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

7. מובהקות התוצאה (PV) היא גם : (בחר בתשובה הנכונה)
א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8. בבדיקת השערות מסוימת התקבל p value=0.0254 לכן (בחר בתשובה הנכונה):
א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0.
ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0.
ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0.
ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0.

פתרונות :

שאלה 1:

0.0228

שאלה 2:

עבור כל רמת מובהקות סבירה.

שאלה 3:

ב. 0.1056

ג. 0.1056

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

שאלה 4:

א. 0.0006

ב. יקטן.

ג. נכריע שאין כיול.

שאלה 5:

נכון

שאלה 6:

תשובה :א

שאלה 7:

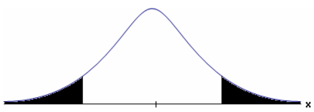
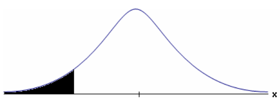
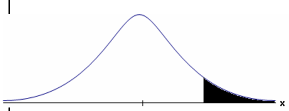
תשובה : א

שאלה 8:

תשובה : ג

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כאשר שונות האוכלוסייה אינה ידועה

רקע:

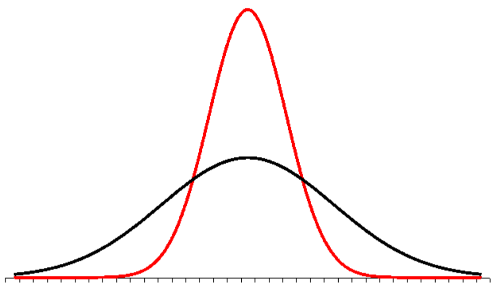
השערת האפס : **השערת אלטרנטיבה:**	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	7. σ אינה ידועה 8. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה : נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0-t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן :

$$t_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X^2_i-n\bar{X}^2}{n-1}$$

<u>התפלגות T:</u>



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן df=n-1. ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.
כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.
א. מהן השערות המחקר?
ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

תרגילים:

1. משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90,95,100,80,125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2. משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16 .האם בישראל ממוצע הציונים שונה מבארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4. באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .

5. ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.

ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.

רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t.

מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6. נתון ש $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_0 : \mu < \mu_0$$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.

בחר בתשובה הנכונה :

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

פתרונות:

שאלה 1:

נדחה H_0

שאלה 2:

נדחה H_0

שאלה 3:

נקבל H_0

שאלה 4:

נקבל H_0

שאלה 5:

התשובה היא : ב

שאלה 6:

התשובה היא : ג

מובהקות התוצאה (p-value) כאשר שונות האוכלוסייה לא ידועה

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא :

אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$p_v = P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

אם ההשערה היא דו צדדית :

$p_v = 2P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס : **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	9. σ אינה ידועה 10. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \ge \bar{x})$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \le \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \le \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \ge \bar{x})$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם : 27,34,32,40,30 . הנח שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשום את השערות המחקר.

ב. מצא חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% ?

תרגילים :

1. קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים :

   1008,1024,996,1005,997

   א. רשמו את השערות המחקר.

   ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

   ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2. חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.

   מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר ?

3. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית . במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות :

   $$\bar{x} = 176.2$$

   $$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

   מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6% ?

<u>פתרונות :</u>

<u>שאלה 3:</u>

נקבל H_0

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על μ :

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל μ :

אם μ_0 נופל ברווח ← נקבל את H_0

אם μ_0 לא נופל ברווח ← נדחה את H_0

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0: \mu = 80$$
$$H_1: \mu \neq 80$$
$$\alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל : $79 < \mu < 84$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

תרגילים :

1. חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = 90$$
$$H_1 : \mu \neq 90$$

החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא : $(87,97)$.
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע״ס רווח הסמך? נמקו.

2. חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ״ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4מ״ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ״ג לסמ״ק.
א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ״ג לסמ״ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבר.

3. יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ״ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ״ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של של 5 מ״ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
א. בנה רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

פתרונות :

שאלה 1:

1. נקבל השערת H_0

שאלה 2:

א. $112.87 \le \mu \le 118.13$

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

שאלה 3:

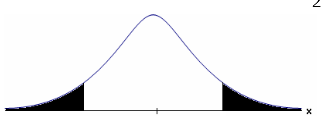
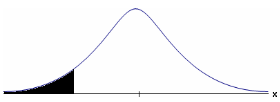
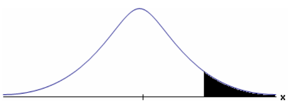
א. $191.8 \le \mu \le 200.2$

ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

פרק 18 - בדיקת השערות על פרופורציה

התהליך

רקע:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \,\&\, n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של:	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן:

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תרגילים:

1. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?

2. במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק ? בדקו ברמת מובהקות של 10%.

3. הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?

4. קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
   א. רשמו את ההשערות.
   ב. בדוק את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
   ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?

5. חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
   א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
   ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.

6. שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות:

$$H_0 : p = p_0$$
$$H_1 : p > p_0$$

חוקר א השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0. שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם.

בחר בתשובה הנכונה:

א. $\alpha_1 = \alpha_2$

ב. $\alpha_1 > \alpha_2$

ג. $\alpha_1 < \alpha_2$

ד. המצב המתואר לא אפשרי.

<u>פתרונות :</u>

<u>שאלה 1:</u>

נדחה H_0

<u>שאלה 2:</u>

נדחה H_0

<u>שאלה 3:</u>

נקבל H_0

<u>שאלה 4:</u>

ב. נקבל H_0

ג. המסקנה לא תשתנה.

<u>שאלה 5:</u>

א. נדחה H_0

ב. המסקנה לא תשתנה.

<u>שאלה 6:</u>

התשובה היא : ג.

סיכוי לטעויות ועוצמה

רקע:

	הכרעה		
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

נגדיר את ההסתברויות הבאות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

α=P(לדחות את H_0 | נכונה H_0)= P_{H_0}(לדחות H_0)

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

β =P(לקבל את H_0 | נכונה H_1)=P_{H_1}(לקבל H_0)

רמת בטחון:

$(1-\alpha)$ =P(לקבל את H_0 | נכונה H_0)= P_{H_0}(לקבל H_0)

עוצמה :

$\pi=(1-\beta)$ =P(לדחות את H_0 | נכונה H_1) =P_{H_1}(לדחות H_0)

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \,\&\, n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
חישוב β :	$P_{H_1}(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$	$P_{H_1}(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$	$P_{H_1}(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$

כאשר : $\hat{P} \sim N(p\, , \frac{p(1-p)}{n})$

והתקנון : $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.

ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

תרגילים:

1. משרד הבריאות פרסם ש 10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
   א. רשמו את השערות המחקר , וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.
   ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?
   ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?
   ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?

2. אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
   א. נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10% מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?

3. בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
   א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.
   ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

4. מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת.
חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

5. חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחר בתשובה הנכונה)
   א. השערת האפס נכונה.
   ב. השערת האפס נדחתה.
   ג. השערת האפס לא נדחתה.
   ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

6. קבע אם הטענה הבאה נכונה:
"בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני"

פתרונות:

שאלה 1:

ב. 0.9015

ג. תגדל

ד. טענה לא נכונה.

שאלה 2:

0.4404

שאלה 3:

א. 0.1446

ב. תקטן.

שאלה 4:

חוקר א.

שאלה 5:

התשובה הנכונה היא ג.

שאלה 6:

נכונה.

קביעת גודל מדגם

רקע:

השערות המחקר הן :

$$H_0 : p = p_0$$
$$H_1 : p = p_1$$

מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β.

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי :

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta}\sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השמש. בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

תרגילים:

1. משרד התמ"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%. לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%.

כדי לבדוק מי מביניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:

- אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.
- אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.

2. מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42.

אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר. כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%.

פתרונות:

שאלה 1:

891

שאלה 2:

224

מובהקות התוצאה

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v .

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$p_v = P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

אם ההשערה היא דו צדדית:

$p_v = 2\,P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \ge 5 \,\&\, n(1-p_0) \ge 5$		
p-value	אם $\hat{p} > p_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$ אם $\hat{p} < p_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \le \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \ge \hat{p})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n})$

והתקנון:

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

תרגילים:

1. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.
   א. מהי מובהקות התוצאה?
   ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?

2. נהוג לחשוב ש 60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש 41 קמו במהלך הלילה.
   א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?
   ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
   ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?
   ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?

3. במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש 60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.

4. בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-}value=0.02$.
   מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5% : (בחר בתשובה הנכונה)
   א. יקבל את השערת האפס
   ב. ידחה את השערת האפס.
   ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

5. קבע אם הטענה הבאה נכונה:
   "במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך *p-value* של 3% לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי) היינו מקבלים ערך *p-value* של 6%"

6. במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

פתרונות :

שאלה 1:

א. 0.0455

שאלה 2:

א. 0.0548

ב.0.0548

ג. מעל 0.0548

ד. נכריע לטובת טענת המחקר.

שאלה 3:

$p_v = 0$

שאלה 4:

התשובה הנכונה : ב

שאלה 5:

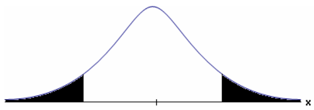
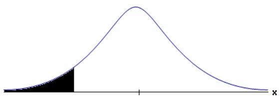
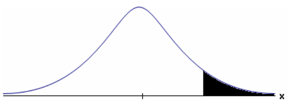
הטענה נכונה

שאלה 6:

0.7486

פרק 19 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

רקע:

השערת האפס : **השערת אלטרנטיבית:**	$H_0: p_1-p_2=0$ $H_1: p_1-p_2\neq 0$	$H_0: p_1-p_2=0$ $H_1: p_1-p_2<0$	$H_0: p_1-p_2=0$ $H_1: p_1-p_2>0$
תנאים:	1.מדגמים בלתי תלויים	2. מדגמים גדולים	
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של :	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}<-Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}>Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן :

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\underset{H_0}{=}\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

כאשר הפרופורציה המשוקללת: $\hat{p}=\frac{y_1+y_2}{n_1+n_2}=\frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0	$\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n_2}}$ או $\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1-\hat{p}_2<0-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1-\hat{p}_2>0+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n_2}}$

התפלגות של $\hat{p}_1-\hat{p}_2$: $\hat{p}_1-\hat{p}_2\sim N(p_1-p_2,\frac{p_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2})$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

$$Z_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\underset{H_0}{=}\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}+\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה. נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה. האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מובהקות של 10%.

תרגילים:

1. במדגם של 200 גברים. 8% מהם היו מובטלים. המדגם של 180 נשים 10% מהן היו מובטלות האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

2. אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה. במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.
   א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?
   ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?

3. נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.
   א. מהי מובהקות התוצאה?
   ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4. במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.
   א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הווירוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.
   ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
   ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הווירוס גבוה ב10% משיעור הפרות בצפון עם הווירוס?
   ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

פתרונות:

שאלה 1:

לא נדחה את H_0

שאלה 2:

א. נדחה H_0

ב. נדחה H_0

שאלה 3:

א. 0.0139

ב. נדחה H_0

שאלה 4:

ב. נדחה H_0

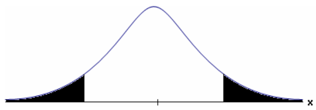
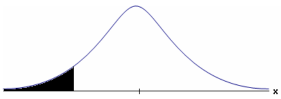
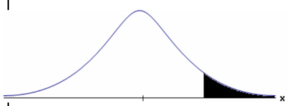
ג. 0.8238

ד. תגדל

פרק 20 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות

רקע:

השערת האפס: **השערת אלטרנטיבית:**	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	1. מדגמים בלתי תלויים 2. $\sigma_1, \quad \sigma_2$ ידועות 3. $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■ - דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן:

$$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

התפלגות הפרש הממוצעים:

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

התקנון:

$$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

<u>דוגמה</u> : (פתרון בהקלטה)

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים.
מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע.
נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

תרגילים :

1. מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.

2. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

3. במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.
א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4. במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע.
מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים. ו-12 ס"מ אצל הגברים.
א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?
ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

פתרונות:

שאלה 1:

נדחה H_0

שאלה 2:

לא נדחה את H_0

שאלה 3:

א. 0

ב. נדחה H_0

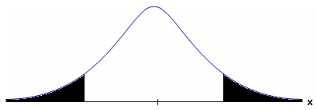
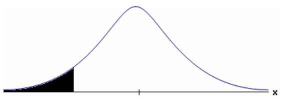
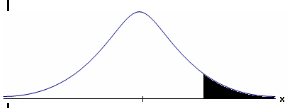
שאלה 4:

א. נדחה H_0 אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.

ב. 0.6331

כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות

רקע:

השערת האפס : **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	4. מדגמים בלתי תלויים 5. $\sigma_1 ,\quad \sigma_2$ לא ידועות אך שוות 6. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית		
אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ $\quad t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} < -t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} > t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$ ■ - דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן :

$$t_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-c}{\sqrt{\frac{S_p{}^2}{n_1}+\frac{S_p{}^2}{n_2}}}$$

השונות המשוקללת :

$$S_p{}^2=\frac{(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}$

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים.

לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש.

<u>להלן תוצאות המדגם:</u>

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות.

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

תרגילים:

1. להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (מטרים רבועים):

2012	120	112	95	130	90	94	120
2013	100	82	91	105	74	69	

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2. נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל
הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3. להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100.
אורך החיים נמדד בשעות.

הקבוצה	2-60W	1-100W
$\overline{x}$	1007	956
S	80	72
n	13	15

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W 60דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W 100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W 60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

פתרונות :

שאלה 1:

לא נדחה H_0

שאלה 2:

שאלה 3:

א. נדחה H_0

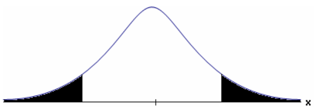
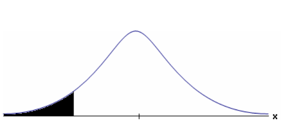
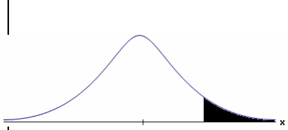
ב. רמות מובהקות של לפחות 5%

ג. לא נדחה H_0

פרק 21 - בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים

רקע:

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0: \ \mu_D = C$ $H_1: \ \mu_D \neq C$	$H_0: \ \mu_D = C$ $H_1: \ \mu_D < C$	$H_0: \ \mu_D = C$ $H_1: \ \mu_D > C$
תנאים:	7. σ_D אינה ידועה 8. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה את H_0 אם מתקיים:	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ או $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן:

$$t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

$$S_D^{\ 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D^2_{\ i} - n\bar{D}^2}{n-1}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".

לצורך בדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.

להלן המחירים :

המוצר	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

תרגילים:

1. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ״ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה.
להלן התוצאות:

המדינה	X	Y
ארה״ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.2
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

2. מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלג נורמלית.

3. נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב׳. להלן הציונים שלהם בסמסטר א׳ ו-ב׳:

סטטיסטיקה א	סטטיסטיקה ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א׳ . הנח שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם , מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10% ?

4. לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

5. בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

5.2	7.0	6.9	5.4	משקל במכשיר 1
5.0	7.1	6.9	5.3	משקל במכשיר 2

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

6. כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.
המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

פתרונות:

שאלה 1:

לא נדחה H_0

שאלה 2:

לא נדחה H_0

שאלה 3:

א. $0.1 \leq pv \leq 0.25$

ב. 0.25

ג. לא נדחה H_0

שאלה 4:

התשובה היא ד.

שאלה 5:

התשובה היא ד.

שאלה 6:

התשובה היא ג.

<u>פרק 22 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות</u>

<u>רקע:</u>

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על $\mu_1-\mu_2$:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=C$$
$$H_1:\mu_1-\mu_2\neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל $\mu_1-\mu_2$:

אם C נופל ברווח ← נקבל את H_0

אם C לא נופל ברווח ← נדחה את H_0

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג. להלן השערותיו:

$$H_0:\mu_D=80$$
$$H_1:\mu_D\neq 80$$
$$\alpha=5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%

$$78<\mu_D<83$$

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

תרגילים:

1. נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א	סטטיסטיקה ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א לבין סמסטר ב.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

2. הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו $-$ 3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

מרצה X	82	90	68
מרצה Y	68	81	64

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות אמריקאיות:

3. סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \;;\; H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05 .

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

4. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו :

$-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.

לכן מסקנת המחקר היא :

א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.

ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.

ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D.

פתרונות:

שאלה 1:

א. $-3.8 \le \mu_D \le 19$

ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

שאלה 2:

א. $-8.5 \le \mu_X - \mu_Y \le 26.5$

ב. נכריע שאין הבדל.

שאלה 3:

התשובה היא ג.

שאלה 4

התשובה היא א.

פרק 23 - בדיקת השערות

א. בדיקת השערות על שונות

1. זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו 38,72,90,110,50 . ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית.

2. הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית על ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23 .

   א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

   ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדיקת השערות על שתי שונויות.

1. מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה:

$$\sum(y_i-\overline{y})^2=204$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum(x_i-\overline{x})^2=200$$

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?

2. ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות חסרת הטיה- 190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות חסרת הטיה- 118.

   א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.

   ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

<u>פתרונות :</u>

<u>פרק א' - בדיקת השערות על שונות</u>

<u>שאלה 1</u>	**<u>שאלה 2</u>**
נדחה H_0	א. נדחה H_0

<u>פרק ב' - בדיקת השערות לשתי שוניות</u>

<u>שאלה 1</u>	**<u>שאלה 2</u>**
נקבל H_0	א. נקבל H_0 ב. נקבל H_0

פרק 24 - מבחני חי בריבוע

א. מבחן טיב התאמה

1. במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו- 17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2. מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

3. משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה. ע"ס תוצאות המדגם האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

4. בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

מספר הסוללות הפגומות	0	1	2	3 ומעלה
שכיחות	276	104	12	8

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20% . בדוק ברמת מובהקות של 5%.

ב. מבחן אי תלות

1. במפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן
המשמרות לפי מדגם שנעשה :

	יום	ערב	לילה
פגומים	50	60	70
תקינים	600	700	800

האם קיים קשר בין טיב המוצר למשמרת שלו? הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

2. בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

3. בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים:

צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
מספר הפריטים	15	20	15	50

כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B :

צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
מספר הכדורים	60	20	10	20

א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 3:1:1:1 לטובת הכחול.

ב. בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החניות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

תשובות סופיות - מבחני חי בריבוע

פרק א'- מבחן טיב התאמה

שאלה 1 נקבל H_0	**שאלה 2** נקבל H_0
שאלה 3 נקבל H_0	**שאלה 4** נדחה H_0

פרק ב' – מבחן לאי תלות

שאלה 1	**שאלה 2**
נקבל H_0	נדחה H_0
שאלה 3	
א. נקבל H_0 ב. נדחה H_0	

פרק 25 - ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי:

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות ($\mu_1,......,\mu_k$) של k אוכלוסיות שונות.

ולכן בניתוח שונות השערות המחקר הן:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = . . . = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1 :$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך הן:

1. בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
2. כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2.
3. המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor)

משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels) .

כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה:

נסמן ב- n_i – את גודל המדגם בקבוצה i.

$n = \sum_1^k n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים)

$\overline{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון, ... $\overline{X}_k$ - ממוצע המדגם ה-k-י.

$\overline{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הקבוצות $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\overline{X}_i - \overline{X}\right]^2$

סכום ריבועים בתוך הקבוצות $SS_W = \sum_{i=1}^{k} [n_i - 1] \bullet \hat{S}_i^{\,2}$

סכום ריבועים כללי: $SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \overline{X}]^2$

SST = SSB + SSW

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה :

<u>טבלת ניתוח שונות</u>

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B-בין הקבוצות	SSB	k - 1	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W-בתוך הקבוצות	SSW	n - k	$\frac{SSW}{n-k}$	
T-סה"כ	SST	n - 1		

$$F=\frac{SS_B/(k-1)}{SS_W/(n-k)}\sim F(k-1,n-k)$$

איזור דחיית H_0 : $F>F_{(k-1),n-k):1-\alpha}$

תרגילים:

1. מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה.
לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש .אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש : קבוצה 1קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן".
כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

2. בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
להלן הציונים שהתקבלו :

בית הספר	"המתמיד"	"רבין"	"הסי"
	78	98	85
	65	62	83
	70	55	74
	90	80	85
	56		75

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (FACTOR) כמה רמות יש לו?
ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
ד. מלאו את טבלת ANOVA.
ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

3. מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות . בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.

ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות ?

4. שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות.

כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

5. להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

6. להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלם את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7. חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage) . המינונים שניתנו הם : 10 מ"ג , 20 מ"ג ו- 30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse).

הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000
Within Groups	126.000	12	10.500		
Total	540.400	14			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

pulse
Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

pulse

Tukey HSD[a]

dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
30.00	5	71.0000	
20.00	5		80.2000
10.00	5		83.4000
Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב- 2.

ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמק!

ד. לטבלת ה ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

8. בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים.
לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו.
ענו על הסעיפים הבאים :

א. כמה בתי ספר יש בעיר?
ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
ג. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
ד. בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים ? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe[a]

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

פתרונות סופיים חלקיים - ניתוח שונות חד כיוונית

2. אם חישבת נכון ה F הסטטיסטי יוצא: 0.58

3. נדחה את השערת האפס.

4. להלן טבלת הניתוח השונות המתקבלת:

	Sum of Squares	df	Mean Square	F
Between Groups	126.000	2	63.000	.756
Within Groups	750.000	9	83.333	
Total	876.000	11		

5. נקבל את השערת האפס.

6. א. 165.5 ב. 2 ג. 178.725 ד. 9.375 ה. 18.36

7. א. נדחה את השערת האפס. ב. לא משתנה. ג. כן

8. א. 5 ב. 25 ג. כן

פרק 26 – מבוא לקורס

אין תרגילים

פרק 27- אומדי הריבועים הפחותים

שיטת האמידה של α ושל β נקראת שיטת הריבועים הפחותים

Ordinary Least Squares (OLS)

השאלה הנשאלת בשיטת אמידה זו היא: איזה $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ יביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה.

ובתרגום מתימטי:

$$\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \hat{u}_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t\right)\right]^2 = ?$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$.

	מודל עם חותך ושיפוע $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	מודל ללא חותך $Y_t = \beta X_t + u_t$	מודל רק עם חותך $Y_t = \alpha + u_t$
חישוב האומדים	$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(Y_t - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$	$\hat{\alpha} = \bar{Y}$
תוחלת האומדים	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$ $E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$	$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$
שונות האומדים	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{S_{XX}}$ $V\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}\right)$	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{T} X_t^2}$	$V\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma_u^2}{T}$

****<u>הערה חשובה:</u> בתהליך הגזירה של פונקציית הריבועים הפחותים מתקבלות "המשוואות הנורמליות":**

<u>עבור המודל הקלאסי (עם חותך):</u>

בגזירה של α מתקבלת המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{u}_t = 0$

בגזירה של β מתקבלת המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$

<u>עבור מודל ללא חותך:</u>

מתקבלת משוואה נורמאלית אחת מגזירת β בלבד: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$

המשוואות הנורמאליות צריכות להתקיים על מנת שפונקציית הריבועים הפחותים תתקיים ($\sum \hat{u}_t^2 = \min$ **)**

תירגול:

כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

א. נסחו את בעית ה-OLS.

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS (המשוואות הנורמאליות).

ג. מצאו נוסחה לקבלת האומדים $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$.

ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים ($\bar{X}, \bar{Y}$ **)**

ה. בהנחה והיינו בוחרים אומד אחר ל- β **שאינו אומד הריבועים הפחותים, מה היה יחס הביטויים:** $\sum e_i$ **ו-** $\sum e_i^2$ **של אומד זה ביחס לאומד הריבועים הפחותים?**

כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \beta x_i + u_i$.

א. נסחו את בעית ה-OLS.

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.

ג. מצאו נוסחה לקבלת $\hat{\beta}$.

ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה <u>אינו</u> עובר דרך נקודת הממוצעים ($\bar{X}, \bar{Y}$ **)**

ה. מהו התנאי שבו אומד הריבועים הפחותים שמצאתם בסעיף ג יהיה זהה לנוסחה של אומד הריבועים הפחותים שנמצא בשאלה הקודמת (במודל עם חותך)?

חוקר רצה לחקור האם ציוני IQ משפיעים על הציון באקונומטריקה ולכן אסף

תצפיות מ-5 סטודנטים:

e_i	IQ	SCORE
1	100	80
1-	110	75
1	110	80
2	103	90
3-	102	85

איזה מבין המודלים הבאים נאמד?

א. $\hat{score}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot IQ_i$

ב. $\hat{score}_i = \hat{\beta} \cdot IQ_i$

ג. $\hat{score}_i = \hat{\alpha}$

ד. $\hat{score}_i = \bar{y}$

נבדק הקשר שבין שכר לשעה שעובד מסוים מרוויח אצל מעסיק מסוים (X)

לבין כמות העובדים שמועסקים אצל אותו מעסיק (Y) (הניחו שכר שווה בין העובדים אצל אותו המעסיק).

לשם כך נדגמו 10 מעסיקים באופן מקרי ונתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 35$$

$$\bar{y} = 5.8$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 19{,}100$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 440$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2858.85$$

מהי תחזית כמות העובדים המועסקים אצל מעסיק מסוים המשתכרים 25 ₪ לשעה?

ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה:

כדי שהנוסחאות הנ"ל יהיו נכונות וכדי שתכונות האומדים (שיפורטו בהמשך) יתקיימו, צריכים להשמר מספר כללים. כללים אלו נקראים ההנחות הקלאסיות. קיימות 7 הנחות כאלה:

1) קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.

מוסבר=α+β מסביר+u

מקדם β: שיפוע הקו המתאר את הקשר בין המסביר למוסבר.

כדי שהקשר יהיה ליניארי שיפוע β צריך להיות קבוע.

**** שימו לב כי ישנם מודלים בהם הקשר בין X ל-Y הוא לא ליניארי אבל בין המסביר למוסבר כן נקבל קו ישר ששיפועו קבוע, כמו למשל במודל:** $y = \alpha + \beta \ln x + u$.

2) קיימים לפחות שני ערכי X ששונים זה מזה: $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X})^2 \neq 0$

המשמעות הסטטיסטית של הנחה זו היא כי X הוא משתנה ולא קבוע. כלומר, יש לו פיזור או שונות השונה מ-0.

הבעיה ב-X קבוע היא ששונותו שווה ל-0 וכאשר $S_X^2 = 0$ **הקשר בין ה-X ל-Y שווה גם הוא ל-0.**

3) תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית: $E(u_t) = 0$ **לכל** t

לכל ערך X באוכלוסיה יש פיזור מקרי של ערכי Y ושל טעויות או "קריזות" (u), כל אחת מקריזות אלו איננה ניתנת לחיזוי אך בממוצע הן מתקזזות ומתאפסות ואנחנו פועלים לפי ההיגיון הכלכלי אותו ניתן לנבא על סמך הקו.

4) ה-Xים אינם משתנים מקריים.

אנו מניחים שהמשתנה המסביר הוא אקסוגני, כלומר ידוע מראש, משפיע על Y אבל לא מושפע ממנו בחזרה.

במילים אחרות, ניבוי Y על סמך X מסוים, מחייב את ה-X להיות משתנה אמפירי, ידוע מראש ולא אקראי ולהיות המשתנה המסביר, המשפיע במודל.
למשל, אם נרצה לנבא את תצרוכת משפחה על סמך הכנסתה, כאשר נדגום משפחה ונשאל להכנסתה נצפה לקבל תשובה מסויימת (שההכנסה למשפחה לא תהיה אקראית) ולהניח כי זהו המשתנה המשפיע על התצרוכת ולא להיפך במודל הניבוי הנוכחי בו אנו משתמשים.

**** שימו לב כי מהנחה זו משתמע גם כי המתאם בין הטעויות לערכי X שווה ל-0:**
$\mathrm{cov}(X_t,u_t)=0$ **(שכן המתאם בין X לבין U שווה ל-0 עבור כל t).**

5) הומוסקדסטיות: השונות של ההפרעה האקראית זהה לכל תצפית ותצפית:
$V(u_t)=\sigma_u^2$ **לכל** t

הפיזור סביב קו הרגרסיה הוא אחיד.

6) אין מתאם בין הפרעות אקראיות: $\mathrm{cov}(u_t,u_s)=0$ **לכל** $t\neq s$

"הקריזות" של תצפיות שונות אינן תלויות אחת בשניה.
הדבר תלוי בדגימה האקראית של התצפיות.

למשל, אם אנו בוחנים השפעה של ההכנסה על התצרוכת של משפחות, אם דגמנו באופן אקראי את המשפחות, לא יהיה קשר בין הטעות בניבוי של תצרוכת משפחה מסוימת (u_t) לטעות בניבוי התצרוכת של משפחה אחרת (u_s).

7) ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית: $u_t\approx N$

התפלגות נורמלית של טעויות סביב התוחלת (ששווה כאמור ל-0) משמעה שרוב הטעויות בניבוי הן קטנות ולא מאוד משמעותיות.

<u>לסיכום:</u>

1) **קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.**

2) **X איננו קבוע:** $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2 \neq 0$

3) **תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית:** $E(u_t) = 0$ **לכל** t

4) X_t **אינם משתנים מקריים** $\Leftarrow$ **ניתן להוציא אותם מחוץ לתוחלת ולשונות** $\Leftarrow$ $\text{cov}(X_t, u_t) = 0$

5) **הומוסקדסטיות: שונות ההפרעה האקראית קבועה לכל תצפית:** $V(u_t) = \sigma_u^2$ **לכל** t

6) u_t **ב"ת:** $\text{cov}(u_t, u_s) = 0$ **לכל** $t \neq s$

7) **ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית :** $u_t \approx N$

? **שכר של עובדים מנובא על ידי השכלתם במודל הבא:** $w_i = \alpha + \beta \cdot s_i + u_i$

א. כתבו את ההנחות הקלאסיות במונחי המשתנים של המודל הנתון והסבירו אותן.

ב. התייחסו לכל אחת מהטענות הבאות וקבעו האם היא:
הנחה קלאסית/משוואה נורמאלית (או תוצאה הנובעת ממשוואה נורמאלית)/אף אחד מהשניים:

1. $\text{cov}(s_i, u_i) = 0$

2. $\text{cov}(s_i, e_i) = 0$

3. $E(u_i) = 0$

4. $\text{cov}(u_i, u_j) = 0$

5. $\bar{e} = 0$

6. $\bar{w} = \bar{\hat{w}}$

7. $\sum u_i = 0$

8. $V(u_i) = \sigma_i$

9. $S_s^{\ 2} \neq 0$

תכונות האומדים

אומדי הריבועים הפחותים הם ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים.

1) ליניאריות

אר"פ ניתנים להצגה כקומבינציה ליניארית של Y_t.

במילים אחרות, כדי ש- $\hat{\beta}$ למשל, תהיה אומד ליניארי צריך להתקיים:

$\hat{\beta}=\sum W_t\cdot Y_t$ כאשר W_t היא קומבינציה של ערכי X.

למשל: $\hat{\beta}=\dfrac{\sum X_t\cdot Y_t}{\sum X_t^2}$

אומד זה ניתן להצגה בצורה הבאה:

$$\hat{\beta}=\frac{X_1}{\sum X^2}\cdot Y_1+\frac{X_2}{\sum X^2}\cdot Y_2+\ldots+\frac{X_T}{\sum X^2}\cdot Y_T$$
$$\hat{\beta}=\frac{W_t}{a}\cdot Y_t$$

לפיכך מדובר באומד ליניארי.

הוכחת ליניאריות עבור האומדים של המודל הקלאסי:

$$;\ \hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\sum w_t Y_t,\quad w_i=\frac{X_t-\overline{X}}{S_{xx}}$$

$$\hat{\alpha}=\sum v_t Y_t,\quad v_t=\frac{1}{T}-w_t\overline{X}$$

<u>כלל אצבע-כיצד יודעים אם אומד הוא ליניארי?</u>

הלכה למעשה יש לבדוק האם מתקיימים 3 התנאים הבאים:

1) **המשתנים המקריים (ה- y_t) הם ממעלה ראשונה (כלומר לא יהיו נתונים בחזקה או בשורש).**
2) **בין המשתנים המקריים (ה- y_t) יש סכום או הפרש (ולא כפל או חילוק).**
3) **כל שאר הגורמים פרט ל- y_t אינם משתנים מקריים (בהתאם להנחות, כזכור, x_t איננו משתנה מקרי).**

כלל אצבע: אם בנוסחה של האומד לא מופיעים סימני כפל בין Y_t-ים או העלאה בחזקה/שורש של Y_t וכן ה- Y_t-ים לא מופיעים במכנה, אז סביר להניח שהאומד לינארי.

האם האומד: $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$ **הוא לינארי?**

האם האומד $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} Y_t^3 \sum_{t=1}^{T} X_t (Z_t + Y_t)}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$ **הוא לינארי?**

כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

1. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$

2. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

3. $\tilde{\beta} = \sum \left(\dfrac{y_i}{x_i}\right)^2$

4. $\tilde{\beta} = \dfrac{y_N - y_1}{x_N - x_1}$

5. $\tilde{\beta} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$

6. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

מי מהאומדים הוא לינארי ומהן המשקולות?

2) חוסר הטיה

התוחלת של אר"פ שווה לערך האמיתי של הפרמטר. כלומר, אומד $\hat{\vartheta}$ מסויים יהווה אח"ה לפרמטר ϑ אותו הוא אומד באוכלוסיה אם מתקיים:

$$E(\hat{\vartheta}) = \vartheta$$

זהו מושג תאורטי (ולא קונקרטי) שאומר כי ממוצע כל האומדים ($\hat{\vartheta}$) של אינסוף המדגמים האפשריים בגודל מסוים שווה לפרמטר (ϑ).

עבור מדגם מקרי אחד האומד איננו שווה לפרמטר ($\hat{\vartheta} \neq \vartheta$) אבל על פני אינסוף המדגמים האפשריים, ממוצע האומדים ($E(\hat{\vartheta})$) צריך להיות שווה לפרמטר (ϑ) כדי שהאומד יהיה אח"ה.

<u>כיצד יודעים אם אומד הוא חסר הטיה?</u>

בשלב הראשון יש לבצע עבודת הכנה –
מבטאים את האומד באמצעות הפרמטר האמיתי: מתחילים מהאומד המוצע, מציבים במקום ה- Y_t את המודל ומפתחים אלגברית.

** יש לזכור כי:**

u_t, y_t מהווים משתנים מקריים ⇐ נשארים בתוך התוחלת, השונות וה-$\sum$.

x_t <u>איננו</u> משתנה מקרי (על פי הנחה מס' 4) ⇐ יוצא מחוץ לתוחלת ולשונות אך נשאר בתוך ה-$\sum$

α, β קבועים ⇐ יוצאים מחוץ לתוחלת, לשונות ול-$\sum$

דוגמא:

עבור המודל $Y_t=\beta X_t+u_t$ **והאומד המתאים לו** $\hat{\beta}=\frac{\sum X_tY_t}{\sum X_t^2}$ **:**

$$\hat{\beta}=\frac{\sum X_tY_t}{\sum X_t^2}=\frac{\sum X_t\left(\beta X_t+u_t\right)}{\sum X_t^2}=\frac{\beta\sum X_t^2}{\sum X_t^2}+\frac{\sum X_tu_t}{\sum X_t^2}=\beta+\frac{\sum X_tu_t}{\sum X_t^2}$$

שלב מקדים זה יעשה לפני בדיקת חוסר הטייה, יעילות ועקיבות.

הוכחת חוסר הטיה – מפעילים תוחלת על האומד, ואם התוחלת שווה לפרמטר האמיתי אז האומד חסר הטיה.

בשפה מתמטית: אם $E\left(\hat{\beta}\right)=\beta$ **, אז** $\hat{\beta}$ **הוא אומד חסר הטיה ל-** β **.**

כדי שהדבר יתקיים הנחות (3) ו- (4) חייבות להתקיים.

המשך הדוגמא שלעיל:

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\beta+\frac{\sum X_tu_t}{\sum X_t^2}\right)=E\left(\beta\right)+E\left(\frac{\sum X_tu_t}{\sum X_t^2}\right)=\beta+\frac{\sum X_tE\left(u_t\right)}{\sum X_t^2}=\beta$$

מסקנה: האומד חסר הטיה!

כלל אצבע:

אם בעבודת ההכנה נשארים בסוף הפיתוח רק שני סוגי איברים:

1) הפרמטר האמיתי

2) איבר או כמה איברים שמכילים את u_t **(קומבינציה ליניארית של** u_t**)**

אז האומד חסר הטיה.

למשל, בעבודת ההכנה שלעיל:

$$\hat{\beta}=\beta+\frac{\sum X_tu_t}{\sum X_t^2}$$

איבר המכיל את u_t **הפרמטר האמיתי**

נתון האומד הבא:

$$\tilde{\beta}=\frac{\sum_{t=1}^{T}X_tY_t}{\sum_{t=1}^{T}X_t^2}$$

האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

1. **בדוק במודל עם חותך**
2. **בדוק במודל ללא חותך**

3) יעילות

יעילות פירושה השונות הקטנה ביותר. ככל שהשונות של האומד קטנה יותר, כך יש הסתברות גבוהה יותר שהוא יהיה קרוב יותר לפרמטר האמיתי באוכלוסייה אותו הוא אומד.

$\hat{\vartheta}_1$ **יקרא אומד יעיל יותר מ-** $\hat{\vartheta}_2$ **אם מתקיים שהשונות שלו קטנה יותר:**

$$V(\hat{\vartheta}_1)<V(\hat{\vartheta}_2)$$

משפט גאוס מרקוב:

יעילות היא תמיד מושג השוואתי. לכן בכדי לדעת האם השונות של האומד היא המינימאלית האפשרית נשתמש במשפט גאוס מרקוב.

לפי משפט גאוס-מרקוב אר"פ הם בעלי השונות הנמוכה ביותר בקבוצה שלהם (קבוצת האומדים הליניאריים חסרי ההטיה), והם נקראים B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimation).

כלומר:

אם האומד שלנו הוא ליניארי וחסר הטייה $\Leftarrow$ **מבלי לחשב את שונותו נדע לפי משפט גאוס-מרקוב שהיא גדולה יותר משל אומד הריבועים הפחותים.**

אם האומד איננו ליניארי ו/או חסר הטיה $\Leftarrow$ **לא ניתן להשתמש במשפט גאוס-מרקוב ואז היחס בין שונות האומד לשונות אומד הריבועים הפחותים המקביל איננו ידוע.**

<u>כיצד מחשבים שונות של אומד?</u>

ראשית כל, הנחות (4), (5) ו-(6) חייבות להתקיים. אם הן מתקיימות, מחשבים את השונות של האיברים המכילים את u_t מהפיתוח הקודם.

נדגים על ידי חישוב שונות אר"פ $\hat{\beta}$:

1. במודל ללא חותך

$$V\left(\hat{\beta}\right)=V\left(\frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}\right)=\frac{V\left(\sum X_t u_t\right)}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sum V\left(X_t u_t\right)}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=$$
$$=\frac{\sum X_t^2 V\left(u_t\right)}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sum X_t^2\sigma_u^2}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sigma_u^2\sum X_t^2}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2}$$

2. במודל עם חותך

$$V(\hat{\beta})=V(\frac{\sum(X_t-\bar{X})u_t}{S_{XX}})=\frac{V\sum(X_t-\bar{X})u_t}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sum V(X_t-\bar{X})u_t}{S_{XX}{}^2}=$$
$$\frac{\sum\left[(X_t-\bar{X})^2V(u_t)\right]}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sum\left[(X_t-\bar{X})^2V(u_t)\right]}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sigma^2 S_{XX}}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

4) עקיבות

ככל שהמדגם יגדל כן יתקרב האומד לערך האמיתי של הפרמטר.

אם נגדיל את המדגם לאינסוף תצפיות ונחשב את האומד, הוא יהיה שווה לפרמטר האמיתי באוכלוסיה ($\underset{T\to\infty}{\hat{\theta}\to\vartheta}$)

<u>תנאי הכרחי לעקיבות:</u> האומד חייב להיות פונקציה של גודל המדגם. במילים אחרות, האומד צריך להיות מושפע מגודל המדגם. ברגע שהאומד עונה על תנאי זה הוא יהיה עקיב. אומד המחושב במדגם סופי בהגדרה לא יוכל להיות עקיב לפרמטר באוכלוסיה.

<u>סיכום: השלבים להוכחת התכונות</u>

1) **הוכחת ליניאריות**

2) **הכנת האומד $\Leftarrow$ להציב במקום** Y_t **את המודל האמיתי.**

במודל עם חותך: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

במודל ללא חותך: $Y_t = \beta X_t + u_t$

3) **פיתוח האלגברה**

4) **חישוב תוחלת, שונות, עקיבות.**

- **ליניאריות מהווה תנאי הכרחי לחוסר הטיה.**
- **ליניאריות וחוסר הטייה מהוות תנאי הכרחי לבחינת היעילות של האומד לפי משפט גאוס-מרקוב.**
- **עקיבות איננה תלויה בתכונות האחרות, אלא רק בהיותו של האומד פונקציה של גודל המדגם (לא מחושב על מדגם סופי). כך שאומד לא חייב להיות ליניארי או חסר הטיה כדי להיות עקיב.**
- **העקיבות משפיעה על היעילות של האומד. עבור אומדים התלויים בגודל המדגם: ככל שגודל המדגם גדול יותר כך שונות האומד קטנה והאומד יהיה יעיל יותר לפרמטר באוכ'.**

<u>תרגול ממבחנים</u>

תרגיל המבוסס על שאלה ממבחן לדוגמא (בשווי של 25 נקודות)

נתון המודל $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, $T = 100$

כאשר מתקיימות כל ההנחות הקלאסיות.

נתון האומד

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=51}^{100} Y_t - \sum_{t=1}^{50} Y_t}{\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t}$$

א. האומד $\tilde{\beta}$ **הינו אומד חסר הטיה ל-** β **נכון / לא נכון**

ב. האומד $\tilde{\beta}$ **הינו אומד עקיב ל-** β **נכון / לא נכון**

ג. האומד $\tilde{\beta}$ **הינו אומד לינארי ל-** β **נכון / לא נכון**

ד. האומד $\tilde{\beta}$ **הינו אומד יעיל ל-** β **נכון / לא נכון**

ה. השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$ **היא:**

תרגיל המבוסס על שאלה ממבחן לדוגמא (בשווי של 14 נקודות)

נתון המודל $Y_t = \beta X_t + u_t$ **, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.**

(יש לשים לב המודל ללא חותך)

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \frac{\sum Y_t}{\sum X_t}$

א. האומד $\tilde{\beta}$ **הינו אומד מוטה ל-** β **: נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

ב. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי $\tilde{\beta}$ **איננו אומד יעיל יותר מאומד הריבועים הפחותים: נכון / לא נכון /לא ניתן לדעת**

ג. מהי השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$ **?**

תרגיל המבוסס על שאלה ממבחן לדוגמא (בשווי של 16 נקודות)

נתון המודל $Y_t = \beta X_t + u_t$ **, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.**

(יש לשים לב המודל ללא חותך)

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum \left(X_t - \bar{X} \right)^2}$

א. מהי התוחלת של $\tilde{\beta}$ **?**

ב. $E\left(\tilde{\beta}\right) < \beta$ **.** **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

ג. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי אומד הריבועים הפחותים הינו
אומד יעיל יותר מ- $\tilde{\beta}$ **.** **נכון / לא נכון/לא ניתן לדעת**

ד. מהי השונות האמיתית של האומד $\dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$ **?**

שאלות נוספות מתוך מבחנים

בכל השאלות ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

האומדים הם אר"פ, והמודל הוא $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

1. $E(Y_t) = E(\hat{Y}_t)$ **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

2. $\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})\bar{Y} \neq 0$ **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

3. אמידת המודל בשיטת הריבועים הפחותים תתן את התוצאה: $\sum_{t=1}^{T} u_t = 0$

נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

4. אם נתון ש- $r_{XY} = 0.57$ **, אזי** $\hat{\beta}$ **:**

א. הוא בהכרח שלילי

ב. הוא בהכרח חיובי

ג. הוא בהכרח שווה לאפס

ד. לא ניתן לקבוע את סימנו על סמך הנתונים הקיימים

5. סמן את הטענה הנכונה בהכרח:

א. $\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{Y})\hat{u}_t = 0$

ב. $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} X_t^2 - (T\bar{X})^2$

ג. $\sum_{t=1}^{T} X_t u_t = 0$

ד. אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה בהכרח.

6. אומדי הריבועים הפחותים אינם חסרי הטיה, אם נתון שהשונות של u_t **אינה קבועה.** **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

7. אומד חסר הטיה הוא אינו בהכרח גם אומד עקיב.

נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

פרק 28 - מודלים לא ליניאריים

עד עכשיו דיברנו רק על מודלים ליניאריים (linear-linear). בפרק זה נלמד גם על מודלים שאינם ליניאריים: מודל חצי לוגריתמי (semi-log), מודל לוגריתמי כפול (double-log) ומודל לוג ליניארי (linear-log).

נשאלת השאלה-מתי מודל מוגדר כליניארי?

מודל מוגדר כליניארי כאשר הוא מתאר קשר קוי בין המשתנים- המסביר והמוסבר שלו.

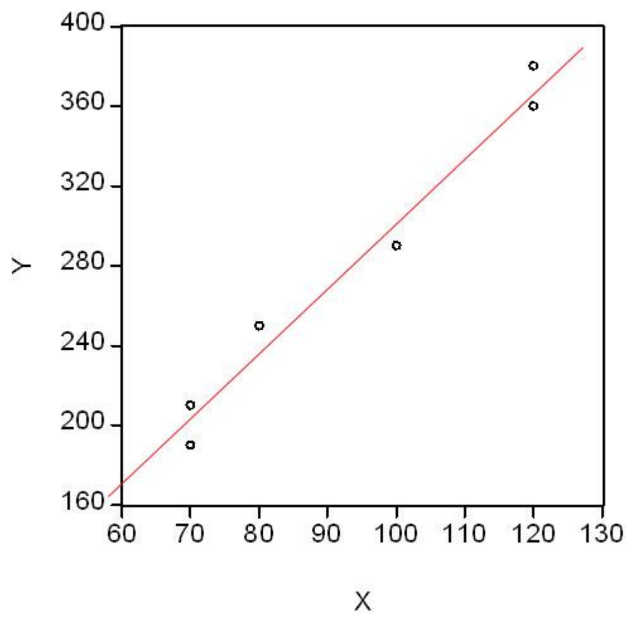
למשל המודל הליניארי הקלאסי: $Y=\alpha+\beta X+u$ מתאר קשר קוי בין x ל-y .

המשמעות של קשר ליניארי היא שהנגזרת- $\frac{\partial Y}{\partial X}$ היא קבועה.

נגזרת זו מתארת את השינוי השולי (השיפוע של הגרף): אם מגדילים את x ביחידה אחת, בכמה יחידות משתנה y.

במודל הליניארי- שינוי זה הוא קבוע ושווה ל- β .

גרף המתאר את הקשר יראה כך:



בניגוד למודל הליניארי, שלושת המודלים האחרים (המודלים הלוגריתמים) מתארים קשרים שאינם ליניאריים בין X ל-Y. במודלים אלו <u>השינוי השולי</u> (השיפוע) לא יהיה קבוע, אלא תלוי במשתנים- x או y או בשניהם:

1) **במודל *החצי לוגריתמי* הקשר בין x ל- y מתואר על ידי הפונקציה הבאה:**

$$Y = e^{\alpha + \beta x + u}$$

גרף המתאר את הקשר יראה כך:

כפי שניתן לראות, השינוי השולי איננו קבוע אלא תלוי ב-y.

השינוי השולי: $\frac{\partial Y}{\partial X} = \beta \cdot Y$.

ככל ש-Y גדל כך השיפוע (β) גדל.

משמעות ה- β במודל כזה היא <u>שיעור</u> השינוי השולי: $\beta = \frac{\frac{\partial Y}{\partial X}}{Y}$

שיעור שינוי שולי אומר: אם מגדילים את X ביחידה, בכמה <u>%</u> ישתנה Y.

במודל החצי לוגריתמי עבור עליה ביחידה אחת של X , Y ישתנה ב- $100\cdot\beta\%$.

במודלים אלו, המתארים שיעורי תשואה, השינוי באחוזים הוא קבוע למרות שהשינוי השולי איננו קבוע.

2) **במודל *הלוגריתמי הכפול* הקשר בין x ל- y מתואר על ידי הפונקציה הבאה:** $Y = e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}$

גרף המתאר את הקשר יראה כך:

כפי שניתן לראות, השינוי השולי איננו קבוע אלא תלוי ב-x וב-y.

השינוי השולי: $\frac{\partial Y}{\partial X} = \beta\cdot\frac{Y}{X}$.

משמעות ה- β **במודל כזה היא <u>הגמישות</u>:** $\beta = \frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{X}{Y} = \frac{\frac{\partial Y}{Y}}{\frac{\partial X}{X}}$

משמעות הגמישות היא שינוי שולי באחוזים: אם מגדילים את X ב-% אחד, בכמה % ישתנה Y.

במודל הלוגריתמי הכפול ה- β **מייצגת את הגמישות, כלומר אם נגדיל את X ב-% אחד, Y ישתנה ב-** β **%.**

במודלים אלו הגמישות היא קבועה למרות שהשינוי השולי איננו קבוע.

3) במודל הלוג-ליניארי הקשר בין x ל- y מתואר על ידי הפונקציה הבאה:

$$e^{y}=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}$$

גרף המתאר את הקשר יראה כך:

כפי שניתן לראות, השינוי השולי איננו קבוע אלא תלוי ב-X. ככל ש-X עולה כך פוחת השינוי השולי.

השינוי השולי: $\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{\beta}{X}$.

במודל זה אם X עולה ב-% אחד, Y עולה ב- β **:** $\beta=\frac{\partial Y}{\frac{\partial X}{X}}$

ל- β **אין משמעות כלכלית במודל זה.**

גמישות

בנוסף למשמעות ה- β בכל אחד מהמודלים, מושג נוסף שיש להכיר הוא מושג <u>הגמישות</u>.

כאמור, גמישות משמעה: שינוי שולי <u>באחוזים</u>. כלומר בכמה % ישתנה Y אם X יגדל ב-% אחד.

הביטוי המתימטי לגמישות:

$$\frac{\frac{\partial Y}{Y}}{\frac{\partial X}{X}} = \frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y}$$

כלומר, כדי לחשב גמישות יש להכפיל את השינוי השולי ($\frac{\partial Y}{\partial X}$) ב- $\frac{X}{Y}$

1) **במודל הליניארי- הגמישות:** $\frac{\beta X}{Y}$

2) **במודל החצי לוגריתמי-הגמישות:** $\beta Y \cdot \frac{X}{Y} = \beta X$

3) **במודל הלוגריתמי הכפול- הגמישות:** $\beta \frac{Y}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \beta$

4) **במודל הלוג-ליניארי-הגמישות:** $\frac{\beta}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{\beta}{Y}$

ניתן לראות כי פרט למודל הלוגריתמי הכפול שבו הגמישות היא קבועה, הגמישות של המודלים האחרים משתנה כפונקציה של X או של Y או של שניהם. כלומר ניתן לחשבה עבור נקודה ספציפית על הגרף (X_t, Y_t) בלבד.

<u>טרנספורמציות של המודלים הלא ליניאריים לקו ישר:</u>

בכדי שניתן יהיה לאמוד את המודלים הלא ליניאריים בשיטת OLS, עליהם לעבור טרנספורמציה לקו ישר.

טרנספורמציה של המודלים לקו ישר תאפשר לתאר את הקשר בין המשתנה המסביר למשתנה המוסבר באופן ליניארי.

טרנספורמציה זו תתבצע על ידי הוצאת ln (לוג טבעי) משתי צידי המשוואה בכדי לבטל את ה- e.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN(e^x) = X$$
$$LN(X^Y) = Y \cdot LN(X)$$

$$LN(X \cdot Y) = LN(X) + LN(Y)$$
$$LN(\frac{X}{Y}) = LN(X) - LN(Y)$$

המודל	לפני הטרנספורמציה	אחרי הטרנספורמציה
1) לוג-ליניארי	$e^y = e^{\alpha} \cdot X^{\beta} \cdot e^u$	$Y = \alpha + \beta \ln X + u$
2) לוגריתמי כפול	$Y = e^{\alpha} \cdot X^{\beta} \cdot e^u$	$\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$
3) חצי לוגריתמי	$Y = e^{\alpha + \beta x + u}$	$\ln Y = \alpha + \beta X + u$

אם נתייחס למשתנה המסביר או המוסבר בתוספת הלוג, ניתן יהיה לתאר את הקשר ביניהם באופן ליניארי.

סיכום:

המודל	משמעות ה- β	השינוי השולי ($\frac{\partial Y}{\partial X}$) בכמה ישתנה Y אם נגדיל את X ביחידה?	הגמישות ($\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{X}{Y}$) בכמה % ישתנה Y אם נגדיל את X ב-1%?
ליניארי $Y=\alpha+\beta X+u$	**השינוי השולי** אם נגדיל את X ביחידה Y ישתנה ב- β יחידות	β	$\frac{\beta X}{Y}$
חצי לוגריתמי $\ln Y=\alpha+\beta X+u$ ($Y=e^{\alpha+\beta x+u}$)	**שיעור השינוי השולי** אם נגדיל את X ביחידה Y ישתנה ב- $100\cdot\beta\%$	βY	βX
לוגריתמי כפול $\ln Y=\alpha+\beta\ln X+u$ ($Y=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}$)	**הגמישות** אם נגדיל את X ב-1% Yישתנה ב- β%	$\frac{\beta Y}{X}$	β
לוג ליניארי $Y=\alpha+\beta\ln X+u$ ($e^{y}=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}$)	**אין משמעות כלכלית** אם נגדיל את X ב-1% Y ישתנה ב- β	$\frac{\beta}{X}$	$\frac{\beta}{Y}$

****המשתנה שיש בו LN השינוי בו יהיה באחוזים**

תירגול

על מנת לאמד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

$$MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t \quad (1)$$

$$MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t \quad (2)$$

$$LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t \quad (3)$$

$$LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t \quad (4)$$

א. הסבירו את המשמעות של β בכל אחד מהמודלים

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים : (12.311,1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

(1) $\hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05}$

(2) $\hat{Y} = e^{4.5+0.05X}$

(3) $\hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X}$

(4) $\hat{Y} = \frac{1}{1+e^{4.5+0.05X}}$

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור X=6

?נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

1. $$Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i}$$

2. $$Q_i = Ae^{\beta_1 L_i + u_i}$$

3. $$Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i}$$

4. $$Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i$$

5. $$Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i$$

6. $$Q_i = e^{A + \beta_1 Ki + u_i}$$

7. $$Q_i = A(\frac{K_i}{2} + 7)^{\beta_1} e^{u_i}$$

8. $$Q_i = A + \beta_1 L_i + u_i$$

9. $$Q_i = A + \beta_1 (\frac{K_i}{L_i}) + u_i$$

כאשר:

Q- הוצאות צריכה על מוצר מסויים על ידי פרט מסויים.

A- הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה אפסית.

K- הכנסת הפרט.

L- שנות לימוד.

א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?

ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?

ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.

ד. עקומת אנג׳ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנג׳ל?

נתון המודל הבא:

$$Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$$

א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?

ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?

ג. נאמד המודל הבא:

$$\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$$

והתקבלו התוצאות הבאות: $\hat{\alpha}_0 = 3, \;\; \hat{\alpha}_1 = 0.8$

מהם האומדנים עבור $A, \;\; \beta_1$?

פרק 29 - שינוי יחידות מדידה

שינוי ליניארי (טרנספורמציה ליניארית) שנעשה במשתנה המוסבר או במשתנה המסביר במודל.
שינוי ליניארי משמעו: הוספה/החסרה של קבוע ו/או הכפלה/חילוק של קבוע של אחד או שני המשתנים.

- **טרנספורמציה ליניארית של המשתנים לא תשפיע על** R^2 **,** F **,** $t_{\hat\beta}$ **ו-** PF.
- **האומדים (** $\hat\alpha$ **ו-** $\hat\beta$ **) וסטיות התקן שלהם (** $S_{\hat\alpha}$ **ו-** $S_{\hat\beta}$ **) עשויים להשתנות וכך גם** $t_{\hat\alpha}$**(נסמן את הפרמטרים שלאחר השינוי ב-** α' **ו-** β' **ואת האומדים ב-** $\hat\alpha'$ **ו-** $\hat\beta'$**).**

השינויים מסוכמים בטבלה הבאה:

$S\hat\alpha$	$S_{\hat\beta}$	$\hat\alpha'$	$\hat\beta'$	
$s_{\hat\alpha'} \neq s_{\hat\alpha}$	$s_{\hat\beta'} = s_{\hat\beta}$	$\hat\alpha' = \hat\alpha - \hat\beta d$	$\hat\beta' = \hat\beta$	**הוספת קבוע ל-** X **:** $Y = \alpha' + \beta'(X+d) + v$
$s_{\hat\alpha'} = s_{\hat\alpha}$	$s_{\hat\beta'} = s_{\hat\beta}$	$\hat\alpha' = \hat\alpha + d$	$\hat\beta' = \hat\beta$	**הוספת קבוע ל-** Y **:** $Y + d = \alpha' + \beta' X + v$
$s_{\hat\alpha'} = s_{\hat\alpha}$	$s_{\hat\beta'} = \frac{s_{\hat\beta}}{d}$	$\hat\alpha' = \hat\alpha$	$\hat\beta' = \frac{\hat\beta}{d}$	**הכפלת** X **פי קבוע:** $Y = \alpha' + \beta'(dX) + v$
$s_{\hat\alpha'} = ds_{\hat\alpha}$	$s_{\hat\beta'} = ds_{\hat\beta}$	$\hat\alpha' = d\hat\alpha$	$\hat\beta' = d\hat\beta$	**הכפלת** Y **פי קבוע:** $dY = \alpha' + \beta' X + v$

מסקנות מהטבלה:

$t_{(\hat\beta'=0)} = t_{(\hat\beta=0)}$ **תמיד.**

$t_{(\hat\alpha'=0)} = t_{(\hat\alpha=0)}$ **רק בהכפלות.**

חוקר ביקש לאמוד את הקשר בין שכר בש"ח (MWAGE) לבין שנות לימוד (SCL) באמצעות 2 מודלים שונים.

להלן תוצאות האמידה :

(1) $$MWAGE_t = 139.54 + 118.62 \cdot SCL_t$$

(2) $$MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t$$

חשבו מחדש את מקדמי הרגרסיה וסטטיסטי המבחן F בכל אחד מהמודלים כתוצאה:

1. **התברר כי נעשה טעות בחישוב מספר שנות הלימוד, ויש צורך להוסיף 20% למשתנה המקורי.**
2. **התברר כי הקשר בין שכר לשנות לימוד הוא ריבועי ולכן יש צורך להעלות את המשתנה המקורי של מספר שנות הלימוד בריבוע.**

בהמשך לנתוני השאלה לדוגמא מהפרק החמישי:

החוקר טען כי יש לבדוק את הקשר בין שכר לותק ע"י שימוש בשכר נטו (NET) ולא בשכר ברוטו (SALARY). קיים שיעור מס קבוע של 20%. המודל הוא:
$\ln(\mathrm{NET}_t) = \alpha' + \beta' \cdot \mathrm{EXP}_t + v_t$.

מה יהיו ערכי האומדים, סטיות התקן שלהם וטיב ההתאמה באמידת מודל זה?

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN(X \cdot Y) = LN(X) + LN(Y)$$
$$LN(\frac{X}{Y}) = LN(X) - LN(Y)$$

פרק 30 - מבחן t

עד מעתה למדנו לאמוד את מקדמי הרגרסיה (ה-α וה-β) על סמך מדגם מקרי יחיד. כעת נלמד כיצד לבדוק האם המקדמים שאמדנו מובהקים באוכלוסיה.

המבחן הסטטיסטי שנבצע למובהקות מקדמי הרגרסיה **נקרא מבחן t.**

נלמד כיצד לבצע מבחן t למובהקות ה- β **, ה-** α **כמו גם למובהקות קשרים ליניאריים בין המקדמים (t מורכב).**

<u>מבחן למובהקות ה- β (מקדם השיפוע)</u>

מבחן העונה לשאלה:האם משתנה מסביר מסוים רלוונטי למודל/ משפיע על המשתנה התלוי (מובהק)?

<u>השערות:</u>

$$H_0 : \beta = 0$$
$$H_1 : \beta \neq 0$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

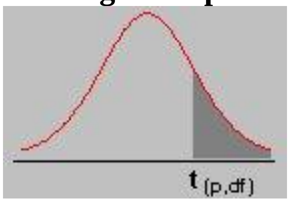
$$t_{\beta=0} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{S_{\hat{\beta}}}$$

כלל הכרעה ומסקנה:

נדחה את H0 אם:

שימוש בטבלת T: $\left|t_{\beta=0}\right| > t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})}$

t table with right tail probabilities



df\p	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495

21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
inf	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

מסקנה: יש/אין עדות לכך שהמשתנה הב"ת המסוים מובהק באוכ' (ולכן רלוונטי למודל).

הערות:

- **ניתן גם לבצע מבחן מובהקות חד צדדי ל- β הנותן מענה על השאלה: האם מקדם השיפוע או הקשר בין המשתנים הוא חיובי או שלילי באוכ'?**

  ההשערות:

  $$H_0 : \beta = 0$$
  $$H_1 : \beta > / < 0$$

  כלל ההכרעה:

  שימוש בטבלת T:

  $$t_{\beta=0} > t_{(n-K,\alpha)}$$
  $$t_{\beta=0} < -t_{(n-K,\alpha)}$$

- **ניתן לבדוק בנוסף האם ה-β (השינוי השולי) שווה לערך מסוים באוכ'.**

  השערות לדוגמא:

  $$H_0 : \beta = 2$$
  $$H_1 : \beta \neq 2$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$t_{\beta=2}=\frac{\hat{\beta}-2}{S_{\hat{\beta}}}$$

<u>כלל הכרעה:</u>

על סמך טבלת T

- **רב"ס ל-β:**

$$P(\hat{\beta}-t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})}\cdot S_{\hat{\beta}}\le\beta\le\hat{\beta}+t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})}\cdot S_{\hat{\beta}})=1-\alpha$$

ניתן לבדוק השערות באמצעות הרב"ס. צריך לבדוק האם הרב"ס מכיל את הערך המבוקש (את β_0) אם כן- נקבל את H0 ואם לא-נדחה אותה.

מבחן למובהקות ה- α (החותך)

עונה על השאלה- האם קו הרגרסיה יוצא מראשית הצירים (החותך של קו הרגרסיה=0):

השערות:

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

סטטיסטי המבחן:

$$t_{\alpha=0} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{S_{\hat{\alpha}}}$$

כלל הכרעה ומסקנה:

נדחה את H0 אם:

שימוש בטבלת T: $|t_{\alpha=0}| > t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})}$

מסקנה: **יש/אין עדות לכך שקו הרגרסיה עובר דרך ראשית הצירים**

- **ניתן גם לבצע מבחן מובהקות חד צדדי ל- α הנותן מענה על השאלה: האם החותך הוא חיובי או שלילי באוכ'?**

  ההשערות:

  $$H_0 : \alpha = 0$$
  $$H_1 : \alpha > / < 0$$

  כלל ההכרעה:

  שימוש בטבלת T:

  $$t_{\alpha=0} > t_{(n-K,\alpha)}$$
  $$t_{\alpha=0} < -t_{(n-K,\alpha)}$$

- **ניתן לבדוק בנוסף האם ה-α (החותך) שווה לערך מסוים באוכ'.**

  השערות לדוגמא:

  $$H_0 : \alpha = 2$$
  $$H_1 : \alpha \neq 2$$

  סטטיסטי המבחן:

  $$t_{\alpha=2} = \frac{\hat{\alpha} - 2}{S_{\hat{\alpha}}}$$

<u>כלל הכרעה:</u>

על סמך טבלת T :

נדחה את H0 אם:

$$|t_{\alpha=2}| > t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})}$$

- **רב"ס ל-α:**

$$P(\hat{\alpha} - t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})} \cdot S_{\hat{\alpha}} \le \alpha \le \hat{\alpha} + t_{(n-K,\frac{\alpha}{2})} \cdot S_{\hat{\alpha}}) = 1-\alpha$$

ניתן לבדוק השערות באמצעות הרב"ס. צריך לבדוק האם הרב"ס מכיל את הערך המבוקש (את α_0) אם כן- נקבל את H0 ואם לא-נדחה אותה.

? חוקר רצה לבחון את השפעת ההכנסה (INCOME) על גובה המס (TAX) (במיליארדי $) שגובה מדינה במערב לפי המודל : $TAX_i = \alpha + \beta \cdot INCOME_i + u_i$. לשם כך אסף נתונים מ-51 מדינות . להלן התוצאות:

$$TAX_i = -0.086912 + 0.152232 \cdot INCOME_i$$

(0.08953) (0.01622)

סטיות התקן של האומדים נתונות בסוגריים.

א. מהי המשמעות הכלכלית של β ושל α?

ב. האם ההכנסה משפיעה על גודל המס? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

ג. בדקו את ההשערה כי כאשר ההכנסה אפסית , גודל המס שונה מ-0 באוכלוסיה.

ד. בדקו את ההשערה כי ככל שההכנסה עולה כך עולה גם המס ברמת מובהקות של5% וברמת מובהקות של 1%

ה. בנו רווח-סמך לשיפוע הרגרסיה ברמת ביטחון של 95% .

ו. בדקו את ההשערה שתוספת של מיליארד $ להכנסה תגדיל את המס ב - 0.2 מיליארד $, ברמת מובהקות של 0.05.

חוקר רצה לבדוק את השפעת הותק בעבודה (EXP) על השכר (SALARY) לפי

המודל: $\ln\left(\text{SALARY}_t\right)=\alpha+\beta\cdot\text{EXP}_t+u_t$ **. הוא אסף 403 תצפיות, ואמד את**

הפרמטרים. להלן תוצאות האמידה:

$$\ln(SALARY)_i=7.334-0.0087\cdot EXP_i$$

(0.0026) (0.068)

א. האם קיים קשר חיובי מובהק בין ותק ללוג השכר?

ב. בדוק את ההשערה כי שיעור התשואה בשכר לשנת ותק קטנה מ: 0.9-

ג. מהי תחזית השכר עבור אדם בעל 10 שנות ותק?

נאמד המודל $Y_i=\alpha+\beta_1X_i+\beta_2Z_i+\beta_3W_i+\beta_4S_i+u_i$ **והתקבלו התוצאות הבאות:**

$$\hat{y}_i=5.06+0.97x_i+3z_i-5.02w_i+8.97s_i$$

(0.29) (0.7) (0.08) (0.42) (0.456)

א. האם משתנה W רלוונטי למודל? בדקו ברמת מובהקות של 0.01

ב. בנו רווח בר סמך להשפעת X על Y

תחזית

המטרה של קו הרגרסיה הוא ביצוע תחזיות. תחזית נקודתית מחושבת על פי קו הרגרסיה שאמדנו. נציב במקום ה-Xים ערכים נתונים ונקבל למה שווה ה-Y המנובא.

לדוגמא:

נתונה משוואת הרגרסיה הבאה:

$$\hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} + 9x_{4i}$$

כאשר y_i הינו סה"כ הוצאות משק בית i לחינוך לשבוע, x_{ji} הינו גילו של הילד j

מה יהיה סה"כ הוצאות משק הבית אם גיל הילד הראשון הוא 2 שנים, של השני 4.5 שנים, השלישי הוא בן 5 ואילו הרביעי בן 8?

תשובה:

נציב במשוואת הרגרסיה:

$$\hat{y}_i = 13 + 8\cdot 2 + 7\cdot 4.5 + 2\cdot 5 + 9\cdot 8 = 142.5$$

כלומר תחזית הוצאות משק הבית לחינוך עבור גילאי הילדים הנ"ל תהיה 142.5 ₪ לשבוע.

ברגרסיה פשוטה, כאשר המודל הינו: $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ אנו יכולים גם לאמוד את התחזית באוכלוסיה עבור ערך מסוים של X, באמצעות רווח בר סמך:

- **רווח בר סמך לתחזית עבור X_f מסוים:**

$$\hat{Y} \pm t_{(n-2,\frac{\alpha}{2})} S_u \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$S_u^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} \qquad \sum (X_i - \bar{X})^2 = S_{XX} = (n-1)S_X^2$$

רישום הרב"ס: $p(\_\_\_ \le Y \le \_\_\_\_) = 1 - \alpha$

התחזית מדויקת יותר (שונות **התחזית קטנה יותר) כאשר:**

1. **n (גודל המדגם) גדול יותר**
2. **שונות המשתנה המסביר X גדולה יותר**
3. X_f **קרוב יותר ל** $\bar{X}$
4. **האומד לשונות הטעויות-** S_u **, קטן יותר.**

לדוגמא:

במדגם של 30 דירות המושכרות לסטודנטים ברדיוס של עד 2 ק"מ מסביב למכללה נחקר הקשר בין שכר דירה למספר הסטודנטים הגרים בדירה. להלן תוצאות האמידה:

$$\hat{Y}_i = 686.207 + 233.52 \cdot X_i$$

נתון בנוסף כי :

$$S_x^2 = 1.313^2$$
$$S_u^2 = 414.055^2$$
$$\bar{x} = 3$$

1. **חשבו אומדן נקודתי לשכר הדירה אותו ישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד.**

תשובה:

יש לחשב תחזית נקודתית עבור X=2:

$$\hat{Y}_{x=2} = 686.207 + 233.52 \cdot 2 = 1153.247$$

2. **אמוד את שכר הדירה שישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת בטחון של 95% .**

<u>תשובה:</u>

יש לחשב רב״ס לתחזית עבור X=2, $1-\alpha=0.95$ **:**

$$\hat{Y}\pm t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}S_u\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}}$$

חישובי עזר:

$$\sum(X_i-\overline{X})^2=S_{XX}=(n-1)S_X^2=(30-1)\cdot 1.31306^2=49.99$$

$$t_{28,0.025}=2.048$$

$$1153.247\pm 2.048\cdot 414.055\sqrt{1+\frac{1}{30}+\frac{(2-3)^2}{49.99}}$$

$$1153.247\pm 870.305$$

$$p(282.94\le Y_{X=2}\le 2023.55)=0.95$$

מבחן t מורכב (בחינת קשרים ליניאריים בין הפרמטרים)

לעיתים אנחנו מתבקשים לבדוק השערות העוסקות בקשרים בין הפרמטרים. כמו למשל: $H_0:\alpha=5\beta$ **או** $H0:\beta_1=2\cdot\beta_2$.

במקרים אלו נרשום את השערות האפס כך: $H0:\alpha-5\beta=0$ **ו-** $H0:\beta_1-2\cdot\beta_2=0$

ונחשב את סטטיסטי המבחן t :

$$t_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}=\frac{(\hat{\alpha}-5\hat{\beta})-0}{S_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}} \quad \text{או} \quad t_{\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2}=\frac{(\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2)-0}{S_{\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2}}$$

כאשר את טעות התקן של המבחן מחשבים תוך שימוש בנוסחאות :

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$V\left(aX\right)=a^2V\left(X\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(aX,bY\right)=a\cdot b\cdot\operatorname{cov}\left(X,Y\right)$$

ואחר כך מוציאים לשונות שורש כדי לקבל את סטית התקן.

לשם כך יש לקבל נתונים על השונויות המשותפות של הפרמטרים (cov).

דוגמא:

נתון המודל $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$

שלצורך אמידתו נאספו 240 תצפיות ונתקבל ש:

$$\hat{Y}_i=5.25+0.96X_i$$

(0.25) (0.12)

נתון בנוסף כי : $\operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta})=-0.003$

יש לבדוק את ההשערה: $H_0:\alpha=5\beta$

תשובה:

$$H_0:\alpha-5\beta=0$$
$$H_1:\alpha-5\beta\neq 0$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$t=\frac{(\hat{\alpha}-5\hat{\beta})-0}{S_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}}=\frac{0.45}{0.6726}=0.669$$

חישובי עזר:

נציב את האומדים: $\hat{\alpha}-5\hat{\beta}=5.25-5\cdot 0.96=0.45$

חישוב השונות ($S^2_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}$):

$$V(\hat{\alpha}-5\hat{\beta})=V(\hat{\alpha})+V(5\beta)-2\operatorname{cov}(\hat{\alpha},5\hat{\beta})=$$
$$V(\hat{\alpha})+5^2V(\hat{\beta})-2\cdot 5\operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta})=$$
$$0.0625+25\cdot 0.0144-10\cdot(-0.003)=0.4525$$

סטית התקן היא: $S_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}=\sqrt{0.4525}=0.6726$

כלל הכרעה: $t_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}=0.66<t_{(238,0.025)}=1.96$ **, לכן אין סיבה מספקת לדחות את השערת האפס.**

מסקנה: אין עדות לכך שה- $\alpha\neq 5\beta$

על מנת לאמוד את פונקצית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה:

$$C_i = \alpha + \beta_1 \cdot W_i + \beta_2 \cdot P_i + u_i$$

להלן תוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל:

$$C_i = -107.226 + 0.743 W_i + 0.561 P_i$$

(0.0678) (0.4)

נתון גם ש: $\text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0.009$

יש לבדוק את ההשערה שהנטיה השולית לצרוך (נש"צ) מתוך ההכנסה זהה לנטיה השולית לצרוך מתוך ההון.

<u>תשובה:</u>

יש לבדוק את ההשערה כי: $\beta_1 = \beta_2$

השערות:

$$H_0 : \beta_1 - \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 - \beta_2 \neq 0$$

חישוב סטטיסטי המבחן:

$$t_{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} = \frac{(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) - 0}{S_{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}} = \frac{0.182}{0.194} = 0.938$$

חישובי עזר:

$$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 = 0.743 - 0.561 = 0.182$$

$$S^2_{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} = S^2_{\hat{\beta}_1} + S^2_{\hat{\beta}_2} - 2 \cdot S^2{}_{\hat{\beta}_1} \cdot S^2{}_{\hat{\beta}_2} =$$
$$= 0.0046 + 0.016 - 2 \cdot -0.009 = 0.038$$
$$S_{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} = \sqrt{0.038} = 0.194$$

כלל הכרעה:

$$t_{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} = 0.938 < t_{(39,0.025)} = 2$$

מסקנה: אין עדות לכך שהנטיות השוליות לצריכה הן שונות.

תירגול מסכם

❓כלכלן בנה עבור מכבי ת"א מודל החוזה את השכר שיש לשלם לשחקן כדורסל

לחוזה של שנה:

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + u_i$$

כאשר:

Y: שכר השחקן באלפי $

X1: מס' נקודות שקולע השחקן בממוצע למשחק

X2: מס' האסיסטים שיש לשחקן בממוצע למשחק

X3: מס' הדקות שיושב שחקן על הספסל בממוצע למשחק.

הכלכלן דגם 34 משחקים וקיבל את התוצאות הבאות:

$$\hat{Y}_i = 120 + 18X_{1i} + 8X_{2i} - 22X_{3i}$$

(2.2) (3) (4.4) (-5)

****הערכים שבסוגריים הם ערכי t.**

התקבל בנוסף כי:

$$\text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 4, \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) = -3, \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -6$$

א. תנו פירוש למקדמי הרגרסיה.

ב. איזה מהמשתנים הב"ת רלוונטי למודל?

ג. בנו רב"ס למשתנים המובהקים.

ד. מייקל ג'ורדן הצטרף למכבי והוא דורש 2 מיליון $ לעונה. ידוע כי מייקל קולע 45 נקודות בממוצע למשחק, מוסר 15 אסיסטים בממוצע למשחק ויושב 5 דקות בממוצע על הספסל. כמה צריך לשלם לו?

ה. לטענת שימעון מזרחי מס' הנקודות הממוצע שקולע שחקן למשחק צריך להשפיע פי 4 ממספר האסיסטים הממוצע שלו. האם הוא צודק?

?כלכלן אמד את המודל הבא: $\ln(Q_i)=\alpha+\beta_1\ln(K_i)+u_i$

שמתאר את הקשר שבין צריכת מוצר מסוים להכנסת הפרט (עקומת אנג'ל):

K =הכנסה חודשית באלפי שקלים

Q =צריכה שנתית באלפי שקלים

לשם כך אסף 60 נתונים והריץ רגרסיה . התוצאות אשר קיבל הן:

$\hat{\beta}=-2$, $\hat{\alpha}=4,$, $t_{\hat{\beta}}=-7$, $t_{\hat{\alpha}}=3$ $\operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta})=-0.05$, $S_K=1.5, S_Q=0.05$ **נקודת הממוצעים הינה: (6.7,0.4)**

א. **הכלכלן ביקש לבדוק את ההשערה כי הגמישות במודל יחידתית ושווה ל-1:**

ב. **בידקו את ההשערה כי מקדם החיתוך של קו הרגרסיה הוא כפול ממקדם השיפוע.**

ג. **חיים משתכר בממוצע לחודש 10,000 ₪ , כמה ישקיע בצריכת המוצר בשנה?**

ד. **בנו רב"ס לתחזית הצריכה של חיים באוכלוסיה.**

<u>פרק 31 - רגרסיה מרובה ומולטיקוליניאריות</u>

עד עתה דיברנו על מודלים שכללו משתנה מסביר אחד בלבד. אולם במציאות קיימים משתנים רבים שמסבירים משתנה תלוי מסויים.
למשל, הכנסה של עובד יכולה להיות מוסברת על ידי משתנים שונים כגון: ותק במקום העבודה, השכלה, גיל וכו'

מודל רגרסיה מרובה נראה כך:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_J X_{Ji} + U_i$$

כאשר:

Y_i =**משתנה תלוי**

$X_{1i} \ldots X_{Ji}$ = **משתנים ב"ת**

U_i =**טעות מקרית המקיימת את כל ההנחות הקלאסיות.**

<u>מקדמי מודל הרגרסיה המרובה:</u>

α = **חותך אחד שמשמעותו: הציון המנובא כאשר כל המשתנים הב"ת=0.**

$\beta_1 \ldots \beta_J$ = **מקדמי השיפוע. מס' הבטות = למספר המשתנים הב"ת במודל.**

משמעות מקדם השיפוע β_j : ההשפעה <u>הייחודית</u> של המשתנה הב"ת המסוים לניבוי המשתנה התלוי, בניכוי השפעתם של כל יתר המשנים הב"ת האחרים המצויים במשוואת הרגרסיה.

<u>אמידת מודל הרגרסיה המרובה:</u>

ברגרסיה מרובה, כמו ברגרסיה פשוטה , שיטת האמידה הטובה ביותר היא שיטת הריבועים הפחותים.
כלומר, נרצה להביא את סכום הטעויות בניבוי למינימום:

$$Min\sum e_i^2 = Min\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} - \ldots - \hat{\beta}_J X_{Ji})^2$$

מפיתרון פונקציית הריבועים הפחותים נקבל את אומדי הרגרסיה: $\hat{\alpha},\hat{\beta}_1...\hat{\beta}_J$

הפיתרון יהיה על פי נגזרות חלקיות לפי כל אומד:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\alpha}}=-2\sum_1^n(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1X_{1i}-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i}-...-\hat{\beta}_JX_{Ji})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1}=-2\sum_1^n(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1X_{1i}-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i}-...-\hat{\beta}_JX_{Ji})X_{1i}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_2}=-2\sum_1^n(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1X_{1i}-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i}-...-\hat{\beta}_JX_{Ji})X_{2i}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_3}=-2\sum_1^n(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1X_{1i}-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i}-...-\hat{\beta}_JX_{Ji})X_{3i}=0$$

.

.

.

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_J}=-2\sum_1^n(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1X_{1i}-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i}-...-\hat{\beta}_JX_{Ji})X_{Ji}=0$$

אם נשתמש בזהות: $e_i=Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_1X_{1i}-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i}-...-\hat{\beta}_JX_{Ji}$ **נקבל את המשוואות הנורמאליות:**

$\sum_{i=1}^n e_i=0$ **בגלל שיש חותך**

$\sum_{i=1}^n e_iX_{1i}=0$ **בגלל שיש את** X_{1i}

$\sum_{i=1}^n e_iX_{2i}=0$ **בגלל שיש את** X_{2i}

$\sum_{i=1}^n e_iX_{3i}=0$ **בגלל שיש את** X_{3i}

.

.

.

$\sum_{i=1}^n e_iX_{Ji}=0$ **בגלל שיש את** X_{Ji}

אם נפתור את המשוואות נקבל את הנוסחאות למציאת האומדים, אך זה מעבר לדרישות הקורס (הפיתרון הוא מטריציוני).

דוגמא: מקרה פרטי, מודל עם שני משתנים מסבירים:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

הנוסחאות הנורמאליות הן:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_{2i} = 0$$

מפיתרון מערכת המשוואות נקבל את הנוסחאות הבאות לחישוב האומדים:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(r_{y1} - r_{y2} * r_{12})}{1 - r_{12}^2} * \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x1}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(r_{y2} - r_{y1} * r_{12})}{1 - r_{12}^2} * \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x2}}$$

****<u>הערה:</u> ניתן לראות כי אם לא קיים מתאם בין המשתנים הב"ת** $r_{12} = 0$ **, שיפועי הרגרסיה המרובה זהים לשיפועי הרגרסיה הפשוטה:**

$$\hat{\beta}_1 = r_{y1} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x1}} = \frac{\text{cov}(y, x_1)}{\text{var}(x_1)}$$

$$\hat{\beta}_2 = r_{y2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x2}} = \frac{\text{cov}(y, x_2)}{\text{var}(x_2)}$$

? **כלכלן החליט לאמוד מודל ליניארי עם שלושה משתנים מסבירים** x_1, x_2, x_3

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i .$$

א. מהי בעיית ה-OLS שעליו לפתור?

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של הבעיה.

כלכלן החליט לבחון מה משפיע על שער הדולר בישראל.

לכן אסף מדגם בין ארבע תצפיות חודשיות.

להלן טבלה מסכמת:

חודש	X2 השקעות זרים בישראל (במיליוני דולרים)	X1 שער הריבית	Y דולר	טעות (e_i)
אוגוסט	100	3	3.2	-5
ספטמבר	95	3.5	3.6	6
אוקטובר	90	3.5	3.8	0
נובמבר	100	3	3.5	-2

מהו המודל אשר אותו אמד הכלכלן?

הניחו כי הקשר באוכלוסייה בין X ל-Y נתון ע"י המשוואה הבאה:

$Y_i = 2+\beta_1 X_{1i} + 5X_{2i} + u_i$ **וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.**

נתון האומד:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum X_{1i}((Y_i - 8X_{2i} - 2) - \overline{(y - 8X_2 - 2)})}{\sum X_{1i}^2}$$

א. חשבו את תוחלת האומד

ב. חשבו את שונות האומד

ג. מהו היחס בין שונות האומד הנ"ל, לבין שונות אומד הריבועים הפחותים?

הניחו כי הקשר באוכלוסייה בין X ל-Y נתון ע"י המשוואה הבאה:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + 8x_{2i} + u_i$$

כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות וכן: $\sum x_{1i} = 0$

אומדים את β_1 **באופן הבא:**

$$b_1 = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x})(y_i - 8x_{2i} - \overline{(y - 8x_2)})}{\sum (x_{1i} - \bar{x})^2}$$

א. האם האומד חסר הטיה?

ב. מהי שונות האומד?

מולטיקוליניאריות

אחת הבעיות העיקריות היכולות לצוץ ברגרסיה רבת משתנים נקראת "מולטיקוליניאריות".

מולטיקוליניאריות מתייחסת למתאם בין המשתנים המסבירים במודל. נבחין בין מולטיקוליניאריות מלאה לחלקית.

מולטיקוליניאריות מלאה

מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל.
הדבר קורה כאשר משתנה מסביר אחד הוא קומבינציה ליניארית מלאה של המשתנה המסביר השני:

$x_1 = a + bx_2$ (x_1 **הוא קומבינציה ליניארית מלאה של** x_2) **מכאן ש:** $r_{12} = 1$.

שימו לב כי מדובר בטרנספורמציה ליניארית ולא בטרנספורמציה אחרת (למשל $x_1 = x_2^2$**), אז בהכרח** $r_{12} \neq 1$.

<u>הערה:</u> מולטיקוליניאריות מלאה יכולה להיווצר גם כאשר קבוצה של משתנים מסבירים מהווה קומבינציה ליניארית מלאה של אחד המשתנים המסבירים:

$x_1 + x_2 = a + bx_3$

במצב של מולטיקוליניאריות מלאה אין כל השפעה של המשתנה האחד מעבר לשני.

לדוגמא:
נניח שאנו רוצים לאמוד את הביקוש לדירות בתל אביב כפונקציה של מחירן בשקלים (x_1 **) ובדולרים (** x_2 **):**

$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$

בהנחה ששער הדולר נותר קבוע, המחיר בדולרים מהווה קומבינציה ליניארית מלאה של המחיר בשקלים (המחיר בשקלים * שער הדולר). במקרה כזה לא ניתן להפריד את ההשפעה של שני המשתנים הב"ת זה מזה ומדובר בעצם באותו המשתנה.

מדוע זה בעייתי?
כיוון שלא ניתן לאמוד את המודל שכן אר"פ אינם מוגדרים.

הסבר: בגזירת אר"פ, נוצר מצב של תלות ליניארית בין המשוואות הנורמאליות וחלקן יתבטלו. ניוותר עם יותר נעלמים ממשוואות ועם אינסוף פיתרונות, כך שלא נוכל להגדיר את האומדים.

בדוגמא שלנו:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_t$$

גזירת $\hat{\alpha}$ **:** $\sum e_i = 0$

גזירת $\hat{\beta}_1$ **:** $\sum e_i x_{1i} = 0$

גזירת $\hat{\beta}_2$ **:** $\sum e_i x_{2i} = 0$

מכיוון ש: $x_1 = bx_2$ **(b = שער הדולר) אז גזירת** $\hat{\beta}_1$ **:**

$$\sum e_i (bx_{2i}) = 0$$
$$b\sum e_i x_{2i} = 0$$
$$0 = 0$$

והמשוואה מתבטלת.

<u>פיתרון</u>: הורדת אחד המשתנים ואמידת המשוואה מחדש בלעדיו.

מולטיקוליניאריות חלקית

כאשר יש מתאם גבוה מאוד (אך לא מושלם) בין 2 משתנים מסבירים במודל או בין קבוצה של משתנים מסבירים עלולה להיווצר בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית:

$$x_1 = a + bx_2 + u_i$$
$$x_1 + x_2 = a + bx_3 + u_i$$

לדוגמא:

נניח שאנו רוצים לאמוד את הציונים בתואר ראשון ע"י ציוני הפסיכומטרי (x_1) וציוני הבגרות (x_2):

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_t$$

מכיוון שיש מתאם גבוה בין ציוני הפסיכומטרי וציוני הבגרות לא נוכל לבודד באופן מלא את ההשפעה המדויקת של כל אחד מהם על ציוני ה-.B.A.

כל אחד מהמשתנים הב"ת "יגזול" מן ההשפעה הייחודית שיש למשתנה הב"ת השני על המשתנה התלוי, כך שבסופו של דבר, למרות שהמודל עם שני המשתנים הב"ת יהיה מובהק, התרומה הייחודית של כל משתנה ב"ת לניבוי התלוי לא תהיה מובהקת.

נתון המודל : $Y_i = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1i} + \beta_2 \cdot X_{2i} + U_i$

חוו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

א. בהנחה כי מתקיים : $X_{1i} - 2X_{2i} = 1$

לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים:

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ב. בהנחה כי מתקיים: $x_{1i} = x_{2i}^2$.

לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים:

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ג. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים ב ו- ג.

ד. בהנחה כי מתקיים: $r_{12} = 0.98$

1. לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים:

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

2. איזו בעיה עלולה להיווצר במודל ומהן השלכותיה.

כלכלן אמד את המודל $y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$

בשל החשש ממולטיקוליניאריות בחן הכלכלן את המתאם בין כל זוג של משתנים מסבירים וקיבל:

$$r_{x1,x2} = 0.9, \quad r_{x1,x3} = 0.99, \quad r_{x3,x2} = 0.5.$$

לכן הסיק כי אין בעיה של מולטיקוליניאריות מושלמת במודל. האם הוא צודק?

כלכלן אמד את המודל הבא:

$$\ln(Q_i) = \alpha + \beta_1 \ln(K_i) + \beta_2 \ln(K^2{}_i) + \beta_3 L_i^{0.5} + u_i$$

האם קיימת בעיה של מולטיקוליניאריות במודל?

להלן מודל של שכר W_i, כפונקציה של שנות לימוד S_i ושל גיל A_i:

(1) $W_i = \alpha + \beta_1 \cdot S_i + \beta_2 \cdot A_i + u_i$

בנוסף למשתנים במשוואה, החליט החוקר להוסיף גם את משתנה הוותק: EXP_i. מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים (מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 2:

(2) $W_i = \alpha + \beta_1 \cdot S_i + \beta_2 \cdot A_i + \beta_3 \cdot EXP_i + w_i$

חווה דעתך על המשוואה השניה.

פרק 32 - R^2 -מדד לטיב הרגרסיה ומבחן F

בפרק זה נלמד כיצד לבדוק האם הרגרסיה שווה משהו והאם ניתן לסמוך עליה בתחזיות.

מדד R^2 לטיב הרגרסיה

מדד R^2 לטיב ההתאמה או לטיב הרגרסיה עונה על השאלה: איזה אחוז מהשונות של המשתנה התלוי (Y) מוסבר על ידי קו הרגרסיה (ההיגיון הכלכלי ה-X-ים)?

מדד לפרופורציית השונות המוסברת:

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

ניתן לכתוב את הנוסחה גם כך:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

נוסחה זו מתבססת על הנוסחה לפירוק השונות של קו הרגרסיה:

$$TSS = RSS + ESS$$

$$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2$$

תכונות R^2 :

- **מדד R^2 (פרופורציית השונות המוסברת) נע בין 0 ל-1:**

$$0 \le R^2 \le 1$$

ככל שקרוב יותר ל-1 ההתאמה טובה יותר ולהיפך, ככל שקרוב יותר ל-0 ההתאמה גרועה יותר.

כאשר $R^2 = 1$ ההתאמה מושלמת ואין שום טעויות בניבוי במודל ואילו

כאשר $R^2 = 0$ הכל טעות ואין שום הסבר במודל (זה קורה כשאין שום משתנה מסביר במודל ויש רק חותך: $y_i = \alpha + u_i$).

- **אר"פ מביא למקסימום את R^2**
- **לא ניתן להשוות בין מודלים שבהם אין את אותו משתנה מוסבר.**
- **בהוספת משתנים מסבירים נוספים למודל, R^2 יכול רק לעלות או "להתנפח" או לכל היותר להשאר ללא שינוי (כתוצאה מהירידה בשונות הלא מוסברת $\sum e_i^2$). זהו למעשה החיסרון הגדול של המדד.**

כדי להתגבר על חיסרון זה קיים מדד נוסף והוא: R^2_{adj} (R^2 מתוקנן):

$$\overline{R}^2 = 1-\left(1-R^2\right)\frac{n-1}{n-k}$$

K=מס' הפרמטרים במודל (כולל החותך)

ככלל מתקיים תמיד ש: $\overline{R}^2 < R^2$

המדד המתוקנן לפרופורציית השונות המוסברת, לוקח את R^2 הרגיל "ומעניש" אותו על מספר המשתנים הב"ת שיש במודל. לכן, בניגוד ל- R^2, ה- $\overline{R}^2$ יכול לרדת בהוספת משתנים למודל ולא רק לעלות.

משום כך, המדד המתוקנן- $\overline{R}^2$ עדיף על המדד של R^2 בכדי לבחון האם כדאי לנו להוסיף משתנים ב"ת למודל.

זהויות שכדאי לדעת לגבי R^2 :

במודל רגרסיה פשוטה: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ **מתקיים:**

1. $R^2 = r_{yx}^2$

2. $r_{yx} = \hat{\beta}\dfrac{S_x}{S_y}$

3. $R^2 = \hat{\beta}^2\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$

במודלים : $\begin{matrix} y_i = \alpha_1 + \beta_1 x_i + u_i \\ x_i = \alpha_2 + \beta_2 y_i + \varepsilon_i \end{matrix}$ **מתקיים:**

1. **הם בעלי אותו** R^2

2. $R^2 = \beta_1 \cdot \beta_2$

? דרגו את המודלים הבאים (לפי קריטריון R^2**):**

.1 $y_i = \alpha + \beta x_{1i} + u_i \qquad R^2 = 0.15$

.2 $y_i = \alpha + u_i$

.3 $y_i = \beta x_{1i} + u_i$

.4 $y_i = \alpha + \beta\, x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$

.5 $y_i = \alpha + \beta_2 x_{2i} + u_i \qquad R^2 = 0.20$

על סמך מדגם של 100 תצפיות נאמדו המודלים הבאים:

(1) $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i}$

(2) $\hat{y}_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_{1i} + \hat{\delta}_2 x_{2i}$ $\quad R^2 = 0.70$

(3) $\hat{y}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_2 x_{2i}$ $\quad R^2 = 0.65$

1) שלושה חוקרים העלו טענה לגבי מקדם R^2 של משוואה מס' (1):

א. אי אפשר לדעת מהנתונים המובאים לעיל אם R^2 של משוואה (1) הוא גדול או קטן מ-0.70.

ב. אי אפשר לדעת מהנתונים המובאים לעיל אם R^2 של משוואה (1) הוא גדול או קטן מ-0.65.

ג. ניתן לצפות כי R^2 של משוואה (1) יהיה גדול מ-0.70.

בהתיחס לטענות החוקרים ניתן לומר:

1. **רק הטענה של חוקר א נכונה**
2. **רק הטענה של חוקר ב נכונה**
3. **רק הטענה של חוקר ג נכונה**
4. **כל הטענות שגויות**

2) חוו דעתכם על הטענות הבאות המתייחסות ל- $\bar{R}^2$:

א. ניתן לצפות ש- $\bar{R}^2$ של משוואה (1) יהיה גדול מ-0.7 :

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ב.ניתן לצפות כי $\bar{R}^2$ של משוואה (2) יהיה קטן מ-0.7:

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג.ניתן לצפות כי $\bar{R}^2$ של משוואה (3) יהיה קטן מ-0.7:

נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

על סמך מדגם של 80 משפחות המונות כל אחת 4 ילדים, נאמדו המשוואות הבאות:

(1) $\hat{y}_i = 5 + 2x_{1i} + 2x_{2i}$ $\quad R^2 = 0.77$

(2) $\hat{y}_i = 24 + 0.8x_{1i}$ $\quad R^2 = 0.62$

(3) $\hat{y}_i = 14 + 0.7x_{2i}$ $\quad R^2 = 0.25$

(4) $\hat{y}_i = 4 + 0.5w_i$ $\quad R^2 = 0.30$

(5) $\hat{\ln}(y)_i = 7 + 0.9x_{1i} + 0.6x_{2i}$ $\quad R^2 = 0.45$

(6) $\hat{\ln}(y)_i = 11 + 0.7x_{1i} + 0.9x_{2i} + 0.6x_{3i}$

(7) $\hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} + 9x_{4i}$

כאשר y_i הינו סה"כ הוצאות משק בית i, x_{ji} **הינו גילו של הילד j, ונתון כי** $w_i = 2x_{3i} + x_{1i} - x_{2i}$.

דרגו את הרגרסיות לפי קריטריון R^2 **(הימני עדיף על השמאלי)**

נתונות שתי המשוואות הבאות:

$y_i = 58 + b_1 x_i + e_{1i}$ **ו-** $x_i = a_2 - 0.2y_i + e_{2i}$ **, כאשר** $\bar{y} = \bar{x} = 40$.

למה שווה מקדם המתאם של פירסון בין X ל-Y?

1. 0.09

2. 0.69

3. 0.3

4. 0.72

5. אף תשובה לא נכונה.

<u>מבחן F</u>

מבחן F משמש אותנו לבדיקת מובהקות מודל הרגרסיה כולו כמו גם לבדיקת הגבלות שונות שאנו רוצים לבדוק האם מתקיימות במודל (מבחן WALD).

מבחן t הוא למעשה מקרה פרטי של מבחן F כאשר קיימת מגבלה אחת (או שיוויון אחד) ב-H0.

אז קיים הקשר בין המבחנים:

$F = t^2$

אם קיימת יותר ממגבלה אחת (יותר משיוויון אחד) ב-H0 רק מבחן F יתאים.

ביצוע מבחן F (מבחן WALD)

אם רוצים לבדוק השערת אפס שיש בה מספר שוויונים משתמשים במבחן F (במבחן t היה רק שוויון אחד בהשערת האפס).

איך עושים זאת?

1) **אומדים את המודל המקורי. מודל זה נקרא המודל החופשי או המודל הלא-מוגבל, ובאנגלית Unrestricted. בתהליך האמידה של המודל הלא-מוגבל מקבלים את סכום ריבועי הסטיות של הטעויות, נסמן אותו ב- $\sum e_i^2{}_{UR}$.**
2) **מגדירים את כל השוויונים של השערת האפס.**
3) **מציבים את השוויונים של השערת האפס במודל המקורי. באופן הזה הופכים אותו למודל כפוי (כופים עליו את השערת האפס), או מודל מוגבל, או באנגלית Restricted.**

4) **אומדים את המודל המוגבל. בתהליך האמידה של המודל המוגבל מקבלים את סכום ריבועי הסטיות של הטעויות, נסמן אותו ב- $\sum e_i^2{}_{R}$.**
5) **אם יודעים את מספר התצפיות, n, מספר הפרמטרים במודל הלא-מוגבל, k, ומספר השוויונים או ההגבלות בהשערת האפס, m, אפשר לחשב את הסטטיסטי:**

$$\frac{\left(\sum e^2_{\text{מ}} - \sum e^2_{\text{למ}}\right)/m}{\sum e^2_{\text{למ}}/(n-k)} \sim F_{(m,n-k,1-\alpha)}$$

(כש- m מספר המגבלות)

כאשר לשתי הרגרסיות (המוגבלת והלא מוגבלת) אותו משתנה מוסבר אפשר גם :

$$\frac{\left(R^2_{\text{למ}} - R^2_{\text{מ}}\right)/m}{\left(1-R^2_{\text{למ}}\right)/(n-k)} \sim F_{(m,n-k,1-\alpha)}$$

<u>כלל הכרעה לדחיית H0:</u>

$$F_{stat} > F_{(m,n-k;1-\alpha)}$$

אם דוחים את H0 המסקנה היא שהמודל המקורי (הלא-מוגבל) הוא הרלוונטי ולהיפך.

נאמד המודל $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$ **והתקבל כי** $\sum e^2 = 620.1683$

וכי $R^2 = 0.99$

הועלתה ההשערה כי ההשפעה על Y **של משתנה** S **היא פי 3 מזו של משתנה** Z**,**

וכן כי החותך הוא 5.

א. מהי השערת האפס?

ב. מהו המודל המוגבל שאותו צריך לאמוד?

<u>המשך השאלה</u>

מאמידת המודל המוגבל התקבל כי $\sum e^2 = 623.99$ **וכי** $R^2 = 0.99$

ג. חשב את הסטטיסטי של WALD.

ד. כמה דרגות חופש יש במונה וכמה במכנה?

ה. האם דוחים או מקבלים את השערת האפס?

במדגם של 82 תצפיות התקבל:

$y_i = 12 + 3x_{1i} + 4x_{2i} + e_i$, $R^2 = 0.73$.

א. בחנו את ההשערה כי:

$H0: \beta_2 = 0$

$H1: \beta_2 \neq 0$

כאשר נתון כי לאחר אמידת המודל המוגבל התקבל כי: $R^2 = 0.6$

ב. חשבו את $S_{\hat{\beta}_2}$

על מנת לאמוד את פונקצית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה:

$$C_i = \alpha + \beta_1 \cdot W_i + \beta_2 \cdot P_i + u_i$$

מתוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל התקבל כי: $\sum e^2 = 52968$

על מנת לבדוק את ההשערה שהנטיה השולית לצרוך (נש"צ) מתוך ההכנסה זהה לנטיה השולית לצרוך מתוך ההון נאמדה גם המשוואה הבאה:

$C_i = \alpha + \beta_1 \cdot Y_i + u_i$ **כאשר:** Y_i=**סה"כ ההכנסה של משק בית t** $(W_i + P_i)$.

התקבל: $\sum e^2 = 54156$

א. בדקו את ההשערה

ב. חשבו את סטטיסטי t לבדיקת ההשערה

מבחן F למובהקות המודל

מבחן מובהקות העונה לשאלה: האם מודל הרגרסיה שלנו לניבוי משתנה תלוי מסויים על ידי המשתנים ב"ת, מובהק באוכלוסיה?

השערות:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_K = 0$$
$$H_1 : OTHERWISE$$

המודל הלא מוגבל יהיה:

U: $$Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + u_t$$

המודל המוגבל יהיה:

R: $$Y_t = \alpha + u_t$$

מאחר ו- $R_{\text{מ}}^2 = 0$ **ו-** $m = k - 1$ **:**

$$F = \frac{\frac{R_U^2 - R_R^2}{m}}{\frac{1 - R_U^2}{n-k}} = \frac{\frac{R_U^2}{k-1}}{\frac{1 - R_U^2}{n-k}}$$

<u>הערה:</u> בדיקת מובהקות המודל ברגרסיה מרובה ניתנת לביצוע רק על ידי מבחן F מאחר ויש לי יותר ממגבלה אחת בהשערת האפס.

לעומת זאת בדיקת מובהקות המודל ברגרסיה חד משתנית ניתנת לביצוע גם על ידי מבחן t שכן יש לי רק מגבלה אחת בהשערת האפס: $F = t^2$

נתון המודל :

$$y = A\frac{x_{1i}^{\beta_1}}{x_{3i}^{\beta_3}}e^{\beta_2 x_2}e^{u_i}$$

באמידת מדגם של 58 נבדקים התקבל $R^2 = 0.56$

האם המודל מובהק?

<u>לסיכום:</u> מתי נשתמש במבחן-t ומתי במבחן-F ?
• **כאשר בהשערות ישנם סימני אי שיוויון (השערות חד צדדיות), נשתמש בהתפלגות t** • **כאשר יש סימן שיוויון אחד בהשערת האפס, ניתן להשתמש ב-t או ב- F (תלוי מה יותר נוח ואילו נתונים זמינים לנו).** • **כאשר יש בהשערת האפס יותר מסימן שיוויון אחד, נשתמש בהתפלגות F.**

<u>מולטיקוליניאריות חלקית-סתירה בין מבחן F למבחני t</u>

לעיתים נוצר מצב שבו המודל הוא מובהק אולם אף אחד מהשיפועים לא יוצא מובהק. מצב זה מעיד על בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית במודל (מתאמים גבוהים בין המשתנים הב"ת).

כיוון שמולטיקוליניאריות מגדילה את טעות התקן של האומדים היא מקטינה את סטטיסטי t ולכן גורמת לכך שנקבל את H0.

תירגול מסכם

נאמדו חמשת המודלים הבאים על 70 תצפיות:

$$1.\ I_i = 12 + 0.13 \cdot \exp_i + 0.08 \cdot scl_i + 2 \cdot workh_i + u_i \quad ESS = 130$$

$$2.\ \ I_i = 11 + 0.1 \cdot scl + 0.1 \cdot workh_i + u_i \quad ESS = 150$$

$$3.\ \ I_i = 9 + 0.22 \cdot scl + u_i \quad ESS = 151$$

$$4.\ \ I_i = 15 + 0.15 \cdot workh_i + u_i \quad ESS = 152$$

$$5.\ \ I_i = 25 + u_i \quad ESS = 200$$

המשתנה המוסבר הוא הכנסה מעבודה (I)

והמשתנים המסבירים שבחנו הם מספר שנות הלימוד (scl) , מספר שעות עבודה (workh) וותק בעבודה (exp)

הערה: הניחו כי ערך F הקריטי הוא 4.

א. האם לשעות עבודה (workh) ישנה השפעה מובהקת על ההכנסה במשוואה 2?

ב. האם לשנות לימוד ישנה השפעה מובהקת על ההכנסה במשוואה 2?

ג. האם רגרסיה 2 מובהקת? (בחנו האם יש הסבר במודל 2), כיצד זה מסתדר עם תשובתכם ל-א ו-ב.

ד. האם השפעת הוותק יכול להיות 0.15?

ה. כלכלן נוסף הציע להריץ את המודל :

$$I_i + \exp_i = 2 - 3(scl_i - workh_i) + u_i \quad ESS = 145$$

איזו השערה ניתן לבחון באמצעות מודל זה? כמה דרגות חופש יש לסטטיסטי שנקבל? בחנו אותה.

על סמך מדגם של 40 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

(1) $R^2 = 0.76 \; y_i = 2 + 3X_{1i} + 4X_{2i} + e_i$

(2) $y_i = 3 + 5D_i + e_i \qquad R^2 = 0.60$

(3) $D_i = 0.2X_{1i} + X_{2i}$

כאשר Y הינו הציון בתואר ראשון, X1 ציוני הבגרות ו-X2 ציוני הפסיכומטרי

א. בדקו את ההשערה כי ציוני הבגרות וציוני הפסיכומטרי ביחד לא משפיעים על ציוני תואר ראשון.

ב. בדקו את ההשערה כי רגרסיה 2 מובהקת

ג. איזה השערה ניתן לבדוק באמצעות רגרסיה 1 ו-2?

על סמך מדגם של 80 משפחות המונות כל אחת 4 ילדים, נאמדו המשוואות הבאות:

(1) $R^2 = 0.6 \qquad \hat{y}_i = 5 + 2x_{1i} + 2x_{2i}$

(2) $R^2 = 0.45 \; \hat{y}_i = 11 + 0.9x_{2i} + 0.6x_{3i}$

(3) $R^2 = 0.78 \; \hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i}$

כאשר y_i הינו סה"כ הוצאות משק בית i, x_{ji} הינו גילו של הילד j.

חשבו את האומדן לסטית התקן של המקדם X3 ברגרסיה 3

נתון המודל: $y_i = AX_{1i}^{\beta_1} e^{\beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}} e^{u_i}$

א. מהי המשוואה לאמידת המקדמים של המודל?

ב. מה המודל המוגבל עבור ההשערה: $\beta_1 = 2\beta_3; \beta_2 = 3\beta_3$

ג. מהן דרגות החופש במונה ובמכנה?

ד. רשמו את הנוסחה לחישוב סטטיסטי המבחן

המודל הבא מתאר את פונקצית הייצור של מוצר P:

$$\ln(P_i) = \alpha + \beta_S \ln(S_i) + \beta_J \ln(J_i) + \varepsilon_i$$

כאשר S ו- J הן שתי התשומות בייצור (S=תשומת ההון ו-J=תשומת העבודה).

מהו המודל המוגבל המתאים לבדיקת ההשערה כי פונקציית הייצור מקיימת תק"ל (תשואה קבועה לגודל)?

פרק 33 - משתני דמי

הנושא של משתני דמי מטפל בהכנסת משתנים ב"ת איכותיים למודל הרגרסיה.

עד כה כל המשתנים הב"ת שהכנסנו למודל היו כמותיים, כלומר קיבלו ערכים מספריים.

למשל, נניח שאנו סבורים שמס' שנות הלימוד של אדם משפיעות על שכרו:

W_t=**השכר (המשתנה התלוי)**

S_t = **שנות לימוד (המשתנה הב"ת)**

משוואת הרגרסיה: $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t$

במקרה זה המשתנה המסביר (כמו גם המוסבר) הוא כמותי.

נניח שאנו סבורים שגם משתנה המגדר משפיע על השכר. משתנה זה איננו כמותי כמו שנות לימוד אלא איכותי שכן הוא לא מקבל ערכים מספריים אלא ערכים קטגוריאליים כ"גבר" או "אישה".

נשאלת השאלה כיצד נכניס אותו לתוך משוואת הרגרסיה?

נגדיר משתנה D שיקבל את הערך 0 אם מדובר ב"אישה" ואת הערך 1 אם מדובר ב"גבר".

משתנה כזה נקרא משתנה דמי (dummy variable).

לעומת משתנה רגיל ש"פועל" תמיד, משתנה זה "יפעל" רק אם מדובר בגבר.

ניתן להכניס את משתנה הדמי למודל בשלושה אופנים שונים:

(1) משתנה דמי לחותך- המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד

(2) משתנה דמי לשיפוע- המין משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד

(3) משתנה דמי לכל הפונקציה- המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע

(1) משתנה דמי לחותך

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$

החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.

שכר ההתחלתי של אישה: α_0

שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$

הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 **(הפרש בין החותכים)**

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים:

$$H0: \alpha_1 = 0$$

**** השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.**

? על בסיס מדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת התקבלו התוצאות הבאות:

$$W_t = 5500 + 1043 \cdot D + 119 \cdot S_t$$

(S.E) (134) (56) (24)

המספרים בסוגריים הם טעויות התקן של מבחני המובהקות לפרמטרים.

א. מהו השכר ההתחלתי של גבר בעל 12 שנות לימוד?

ב. מה ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים?

ג. האם הבדל זה מובהק באוכלוסיה?

ד. בדקו את הטענה כי השכר ההתחלתי של גברים גבוה ביותר מ- 500 ₪ מזה של נשים.

ה. בדקו את הטענה שהשכר ההתחלתי של נשים נמוך ב-600 ₪ מזה של גברים.

<u>פונקצית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד</u>

המגדר הוא המשתנה היחיד במשוואה:

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + u_t$$

החותך מייצג כאן את השכר ה<u>ממוצע</u> עבור כל קטגוריה.

שכר הממוצע של אישה: α_0

שכר הממוצע של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$

הבדל בשכר הממוצע בין נשים וגברים: α_1 **(הפרש בין החותכים)**

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t : $H0: \alpha_1 = 0$ **(מבחן זהה למבחן t להבדל בין ממוצעים).**

? על אותו המדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת ביקש החוקר לבדוק האם יש הבדל בשכר הממוצע בין גברים לנשים. תוצאות האמידה:

$$W_t = 5200 + 1120 \cdot D$$

נתון: $S_{\hat{\alpha}_1} = 63$

בדקו האם קיים הבדל מובהק בשכר ה<u>ממוצע</u> בין נשים וגברים?

(2) משתנה דמי לשיפוע

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד.

$$W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 D S_t + u_t$$

השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד- β_0

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד- $\beta_0 + \beta_1$

הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 **(הפרש השיפועים)**

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים:

$H0:\beta_1=0$

**** החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.**

? על בסיס אותו מדגם, ביקש החוקר לדעת האם קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד. תוצאות האמידה נתונות להלן:

$$W_t=5000+110\cdot S_t+120\cdot D\cdot S_t+u_t$$

(68) (23) (25)

בדוק את ההשערה.

(3) משתנה דמי לכל הפונקציה

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע. הווה אומר, גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.

המודל: $W_t=\alpha_0+\alpha_1 D+\beta_0 S_t+\beta_1 DS_t+u_t$

השכר ההתחלתי של אישה: α_0

השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0+\alpha_1$

הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 **(הבדל בחותכים)**

אצל אישה-התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0

אצל גבר-התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0+\beta_1$

הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 **(הבדל בשיפועים)**

<u>בדיקת השערות למשתני הדמי:</u>

באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H0:\alpha_1=\beta_1=0$

H1: לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0

אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד:

$H0:\beta_1=0$ **ו-** $HO:\alpha_1=0$

<u>מבחן CHOW</u>

דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות, <u>בלא יצירת משתני דמי</u>:

חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי. מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).

עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד .

נשים: $W_t=\alpha_f+\beta_f X_t+u_t$

גברים: $W_t=\alpha_m+\beta_m X_t+u_t$

השערות: $H_0:\alpha_f=\alpha_m;\beta_f=\beta_m$

לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD שהשתמשנו בו מקודם):

המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן לא יכלול את המדגם המאוחד כי אין צורך בשתי רגרסיות נפרדות:

$W_t=\alpha+\beta X_t+u_t$

המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם:

$$ESS_U = ESS_f + ESS_m$$
$$DF_U = DF_f + DF_m$$

$$CHOW_{stat} = \frac{\dfrac{ESS_R - (ESS_f + ESS_m)}{DF_R - (DF_f + DF_m)}}{\dfrac{ESS_f + ESS_m}{DF_f + DF_m}} = WALD_{stat}$$

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. **אם דחינו את HO במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.**
2. **בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.**

? חוקר רצה לבדוק את הטענה שסוג הכביש משפיע על מס' תאונות הדרכים בקטעי כביש בינעירוניים, בהינתן נפח התנועה.

החוקר בדק האם <u>הפונקציה</u> של מס' התאונות בהינתן נפח התנועה, שונה בין כבישים מהירים לבין כבישים שאינם מהירים. לשם כך אמד החוקר את ארבע המשוואות הבאות:

(1) כבישים מהירים בלבד

(2) כבישים לא - מהירים בלבד

(3) שני סוגי הכביש (כל המדגם)

(4)

כאשר : = מס' תאונות הדרכים הקטלניות בקטע כביש t בשנה

=נפח התנועה בקטע כביש t ליום באלפים

= משתנה דמי המקבל את הערך 1 כאשר הכביש מהיר , ו- 0 כאשר הכביש לא מהיר.

תוצאות אמידת המשוואות מופיעות בהמשך השאלה.

1) בדקו את טענת החוקר בשתי דרכים שונות. ציינו איזה מן המשוואות רלוונטיות עבור כל דרך.

2) חשבו את הערכים המספריים עבור אומדני משוואה (4).

3) מהו האומדן הנקודתי למס' התאונות בכביש מהיר כאשר נפח התנועה עומד על ארבעת מכוניות ליום בקטע הכביש האמור?

הועלתה הטענה כי המקדם להשפעה של נפח התנועה בדרכים מהירות הינו כפול מזה שבדרכים לא -מהירות.

4) מהי השערת האפס לבדיקת הטענה (במונחי משוואה (4))?

5) מהי הרגרסיה "תחת " למבחן WALD ?

משוואה (1) - כבישים מהירים בלבד

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	344
Number of Observations Used	344

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	4700.81174	4700.81174	89.12	<.0001
Error	342	18039	52.74684		
Corrected Total	343	22740			

Root MSE	7.26270	R-Square	0.2067
Dependent Mean	5.10465	Adj R-Sq	0.2044
Coeff Var	142.27617		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	1.55289	0.54303	2.86	0.0045
avgd	1	0.02098	0.00222	9.44	<.0001

משוואה (2) - כבישים לא מהירים בלבד

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	410
Number of Observations Used	410

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	971.99073	971.99073	145.83	<.0001
Error	408	2719.34830	6.66507		
Corrected Total	409	3691.33902			

Root MSE	2.58168	R-Square	0.2633
Dependent Mean	1.38780	Adj R-Sq	0.2615
Coeff Var	186.02612		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.14978	0.16360	0.92	0.3605
avgd	1	0.02877	0.00238	12.08	<.0001

משוואה (3) - שני סוגי הכביש (כל המדגם)

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	754
Number of Observations Used	754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	8052.00804	8052.00804	288.84	<.0001
Error	752	20964	27.87730		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.27990	R-Square	0.2775
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2765
Coeff Var	171.22758		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.73903	0.23665	3.12	0.0019
avgd	1	0.02330	0.00137	17.00	<.0001

משוואה (4)

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	754
Number of Observations Used	754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	8256.966	2752.322	99.44	<.0001
Error	750	20759	27.678		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.26102	R-Square	0.2846
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2817
Coeff Var	170.61553		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.14978	0.33340	0.45	0.6534
type	1				0.0067
avgd	1				<.0001
avgdtype	1				0.1283

סיכום ביניים:

	משתנה דמי לחותך	משתנה דמי לשיפוע	משתנה דמי לכל הפונקציה
המודל	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot X_t + u_t$	$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$
ההשערה במילים	**קיים הבדל בין הקטגוריות ב-Y ההתחלתי (בחותך).**	**קיים הבדל בין הקטגוריות בתוספת ל- Y בגין X (בשיפוע).**	**קיים הבדל בין הקטגוריות במשוואת הרגרסיה כולה (בחותך ובשיפוע).**
בדיקת ההשערה	**מבחן t להפרש החותכים:** $H0: \alpha_1 = 0$	**מבחן t להפרש השיפועים:** $H0: \beta_1 = 0$	**מבחן WALD להפרש בין הפונקציות (החותכים והשיפועים):** $H0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$ ****ניתן לבדוק את ההשערה בדבר הבדל בין הפונקציות גם במבחן CHOW.** **אם דוחים את HO יש לברר את מקור ההבדל באמצעות מבחני t (אפשרי רק ב-WALD):** $H0: \alpha_1 = 0$ $H0: \beta_1 = 0$

משתני דמי אם המשתנה האיכותי יכול לקבל יותר משני ערכים

כאשר המשתנה האיכותי כלל שני ערכים בלבד (למשל, מגדר: גבר, אישה) הסתפקנו במשתנה דמי אחד.

במקרים רבים המשתנה האיכותי כולל יותר משני ערכים/קטגוריות. במקרה כזה נגדיר מס' משתני דמי כמספר הקטגוריות פחות אחד.

למשל, את המשתנה האיכותי של עונות השנה הכולל 4 ערכים: אביב, קיץ, סתיו, חורף נייצג באמצעות 3 משתני דמי:

D_1 **יקבל את הערך 1 אם מדובר באביב ו-0 אחרת.**

D_2 **יקבל את הערך 1 אם מדובר בקיץ ו-0 אחרת.**

D_3 **יקבל את הערך 1 אם מדובר בסתיו ו-0 אחרת.**

אם מדובר בחורף אז כל משתני הדמי יקבלו את הערך 0 ולכן החורף היא קבוצת הייחוס.

נניח שאנו רוצים לבדוק עונתיות במחירי הירקות:

V_t= **מדד מחירי הירקות**

p_t= **מדד המחירים לצרכן**

(1) *<u>משתני דמי לחותך</u>*

<u>הטענה:</u> יש הבדל בין עונות השנה במחיר ההתחלתי של הירקות

<u>המודל:</u> $V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$

כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב- β.

למחיר זה יתווסף α_0 **בחורף,** $\alpha_0+\alpha_1$ **באביב,** $\alpha_0+\alpha_2$ **בקיץ ו-** $\alpha_0+\alpha_3$ **בסתיו.**

ניתן לראות כי: α_0**: החותך בקטגוריה שהושמטה**

$\alpha_0+\alpha_i$**: החותך בקטגוריה i.**

<u>בדיקת השערות:</u>

השערות:

$$H0:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$
$$H1:OTHERWISE$$

המבחן הסטטיסטי : מבחן WALD:

(U) $V_t=\alpha_0+\alpha_1 D_{1t}+\alpha_2 D_{2t}+\alpha_3 D_{3t}+\beta\cdot P_t+u_t$

(R) $V_t=\alpha+\beta\cdot P_t+u_t$

****שימו לב שהחותך במשוואה המוגבלת איננו α_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.**

אם נדחה את HO במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין החותכים על ידי מבחני t:

1. **האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין האביב לחורף:** $H0:\alpha_1=0$
2. **האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הקיץ לחורף:** $H0:\alpha_2=0$
3. **האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הסתיו לחורף:** $H0:\alpha_3=0$

? א. הועלתה הטענה כי יש הבדל במחיר ההתחלתי בין האביב לקיץ.

1. **מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?**
2. **פרטו שני מבחנים סטטיסטיים בעזרתם ניתן לבדוק את הטענה.**

ב. הועלתה הטענה כי יש רק שתי עונות המשפיעות על מחיר הירקות ההתחלתי: קיץ+אביב, חורף+סתיו.

1. **מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?**
2. **מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? פרטו.**

(2) <u>משתני דמי לשיפוע</u>

<u>הטענה:</u> יש הבדל בין עונות השנה בתוספת למחיר הירקות בגין המחיר לצרכן

<u>המודל:</u> $V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1(D_{1i}P_t) + \beta_2(D_{2i}P_t) + \beta_3(D_{3i}P_t) + u_t$

המחיר ההתחלתי של הירקות שווה בין עונות השנה (α) אולם כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב:

β_0 בחורף, $\beta_0 + \beta_1$ באביב, $\beta_0 + \beta_2$ בקיץ ו- $\beta_0 + \beta_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי: β_0 : השיפוע בקטגוריה שהושמטה

$\beta_0 + \beta_i$: השיפוע בקטגוריה i.

<u>בדיקת השערות:</u>

השערות:

$$H0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$
$$H1: OTHERWISE$$

המבחן הסטטיסטי: מבחן WALD:

(U) $V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1(D_{1i}P_t) + \beta_2(D_{2i}P_t) + \beta_3(D_{3i}P_t) + u_t$

(R) $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$

****שימו לב שהשיפוע במשוואה המוגבלת איננו β_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.**

אם נדחה את HO במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין השיפועים על ידי מבחני t.

(3) <u>משתני דמי לכל הפונקציה</u>

<u>הטענה:</u>יש הבדל בין עונות השנה בפונקצית הרגרסיה לניבוי מחיר הירקות באמצעות המחיר לצרכן.

<u>המודל:</u> $V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1(D_{1i}P_t) + \beta_2(D_{2i}P_t) + \beta_3(D_{3i}P_t) + u_t$

<u>בדיקת השערות:</u>

השערות:

$$HO:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$$

המבחן הסטטיסטי: מבחן WALD:

(U) $V_t=\alpha_0+\alpha_1 D_{1i}+\alpha_2 D_{2i}+\alpha_3 D_{3i}+\beta_0 P_t+\beta_1(D_{1i}P_t)+\beta_2(D_{2i}P_t)+\beta_3(D_{3i}P_t)+u_t$

(R) $V_t=\alpha\ +\beta\cdot P_t+u_t$

אם דוחים את HO, יש לבדוק במבחני WALD האם ההבדל הוא בין החותכים או בין השיפועים:

$$HO:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0 \qquad HO:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

באם דוחים את H0 יש להמשיך לבדוק באמצעות מבחני t:

$$H0:\alpha_j=0 \qquad HO:\beta_j=0$$

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים

נתבונן בדוגמא שבה יש שני משתנים איכותיים המשפיעים על פונקצית השכר- מגדר (אישה, גבר) וגזע (לבן, שחור).

נגדיר משתנה דמי G שיקבל 1 אם מדובר בגבר ו-0 אחרת (אישה).

נגדיר משתנה דמי R שיקבל 1 אם מדובר בלבן ו-0 אחרת (שחור).

נבדוק כיצד מגדר וגזע משפיעים על השכר ההתחלתי (החותך), כאשר השכר תלוי גם בשנות לימוד (S_t).

(1) <u>הבדל בחותך ללא אינטראקציה</u>

<u>המודל:</u> $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \beta \cdot S_t + u_t$

במודל זה- אין השפעה משולבת של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.

במילים אחרות, ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים ונשים לא תלוי בגזע (זהה עבור שחורים ועבור לבנים) ולהיפך-ההבדל בשכר ההתחלתי בין לבנים לשחורים לא תלוי במגדר (זהה עבור נשים וגברים).

ניתן לבדוק השערות על כל אחד מהמשתנים הב"ת האיכותיים בנפרד:

1. **הבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים :** $HO: \alpha_1 = 0$
2. **הבדל בשכר ההתחלתי בין שחורים ללבנים:** $H0: \alpha_2 = 0$

(2) <u>הבדל בחותך עם אינטראקציה</u>

<u>המודל:</u> $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$

במודל זה הטענה היא כי קיימת, בנוסף להשפעה של מגדר וגזע בנפרד על השכר, גם השפעה משולבת (אינטראקציה) של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.

במילים אחרות, ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים ונשים תלוי בגזע (שונה אם מדובר בשחורים או בלבנים) ולהיפך.

במודל זה, לעומת הקודם, נוספת ההשערה לבדיקת השפעת האינטראקציה בין מגדר לגזע על השכר ההתחלתי:

3. $HO: \alpha_3 = 0$

דרך נוספת ליצירת מודל עם אינטראקציה:

הגדרת משתני דמי המייצגים שילוב בין המשתנים האיכותיים גזע ומגדר באופן הבא:

D_1 **יקבל 1 אם מדובר בגבר לבן ו-0 אחרת**

D_2 **יקבל 1 אם מדובר בגבר שחור ו-0 אחרת**

D_3 **יקבל 1 אם מדובר באשה לבנה ו-0 אחרת**

הנשים השחורות מהוות כאן את קבוצת הייחוס.

המודל: $W_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \delta \cdot S_t + u_t$

נעזר בטבלה בכדי לנסח את ההשערות לבדיקת האינטראקציה:

	גבר	**אישה**	**הפרש**
לבן	$\gamma_0 + \gamma_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$\gamma_1 - \gamma_3$
שחור	$\gamma_0 + \gamma_2$	γ_0	γ_2
הפרש	$\gamma_1 - \gamma_2$	γ_3	

ההשערות לבדיקת קיום האינטראקציה:

$HO: \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ **או** $HO: \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3$

התוצאות שיתקבלו כאן יהיו כמובן זהות לחלוטין לתוצאות שהתקבלו בדרך הקודמת:

$$WALD = t^2$$
$$PF = Pt$$

שאלה מס׳ 1

חוקר בדק השפעות של השכלה, גזע (שחור, לבן) וניסיון (EXP) על לוג השכר (ln(Y)) במדגם בן 306 תצפיות:

$$\ln(Y)_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 EXP_t + \beta_2 EXP_t^2 + u_t$$

ln(Y)-לוג השכר

EXP- שנות ניסיון

D_1 **מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת)**

D_2 **מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה נמוכה (ו-0 אחרת)**

D_3 **מקבל את הערך 1 עבור לבנים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת)**

תוצאות אמידת משוואת הרגרסיה מוצגות בפלט להלן:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	--------	------	------	--- ---
Error	300	140	------		
Corrected Total	305	210			

Root MSE	-------	R-Square	-------
Dependent Mean	-------	Adj R-Sq	-------
Coeff Var	-------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	-------	--------	60.84	0.00
D1	1	-------	--------	-3.20	0.00
D2	1	-------	--------	-5.56	0.00
D3	1	-------	--------	7.23	0.00
EXP	1	-------	--------	8.11	0.00
EXP^2	1	--------	--------	-7.45	0.00

בטרם ניגשים לפיתרון השאלה יש להכין את טבלת העזר הבאה:

	השכלה נמוכה	**השכלה גבוהה**	**הפרש**
לבנים	α_0	$\alpha_0+\alpha_3$	α_3
שחורים	$\alpha_0+\alpha_2$	$\alpha_0+\alpha_1$	$\alpha_1-\alpha_2$
הפרש	α_2	$\alpha_1-\alpha_3$	

(א) לפי המשוואה הניסיון זהה עבור שחורים ולבנים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

(ב) בדוק את הטענה כי בקרב אנשים בעלי השכלה נמוכה אין השפעה לגזע.

(ג) בדוק את הטענה כי אין השפעות השכלה בקרב לבנים.

(ד) הי השערת האפס לבדיקת הטענה כי אין אינטראקציה בין גזע להשכלה?

(ה) לבדיקת ההשערה של הסעיף הקודם בוצע מבחן WALD.

הרגרסיה המוגבלת תחת השערת האפס הינה:

$Z_0 = \gamma_0 + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \gamma_4 Z_4 + v$ **מהם ה-Z-ים?**

(ו) בדוק את ההשערה אם ידוע שבמודל המוגבל $R^2 = 0.33$

(ז) החוקר החליט לאמוד במקום את המשוואה המקורית את המשוואה:

$$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \lambda_3 (S \cdot E) + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$

כאשר: S מקבל את הערך 1 עבור שחורים ו-0 אחרת (לבנים)

E מקבל את הערך 1 עבור השכלה גבוהה ו-0 אחרת (השכלה נמוכה).

מה הקשר בין המקדמים של שני המודלים?

(ח) אם יאמוד החוקר את המשוואה:

$$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$

האם תהיה טעות ספציפיקציה של השמטת משתנה רלוונטי (היעזר בסעיפים ד',ו' ו-ז').

<u>שאלה מס' 2</u>

חוקרת בדקה השפעות השכלה, מגדר וניסיון על הכנסה מעבודה לפי המשוואה הבאה:

$$\ln(MWAGE) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot S + \alpha_2 \cdot E + \alpha_3 \cdot (S \cdot E) + \beta_0 \cdot EXP + \beta_1 \cdot (EXP \cdot S) + \beta_2 \cdot (EXP \cdot E) + \beta_3 \cdot (EXP \cdot S \cdot E) + U$$

כאשר: S משתנה דמי: 1= עבור נשים, 0=גברים

E משתנה דמי: 1= עבור השכלה גבוהה (scl >12), 0=השכלה נמוכה

בטרם ניגשים לפיתרון השאלה יש להכין את טבלת העזר הבאה:

	השכלה גבוהה (E=1)	השכלה נמוכה (E=0)	הפרש
נשים (S=1)	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3)EXP_t$	$\alpha_0+\alpha_1+(\beta_0+\beta_1)EXP_t$	חותך: $\alpha_2+\alpha_3$ שיפוע: $\beta_2+\beta_3$
גברים (S=0)	$\alpha_0+\alpha_2+(\beta_0+\beta_2)EXP_t$	$\alpha_0+\beta_0 EXP_t$	חותך: α_2 שיפוע: β_2
הפרש	חותך: $\alpha_1+\alpha_3$ שיפוע: $\beta_1+\beta_3$	חותך: α_1 שיפוע: β_1	

א. רשמו את הפונקציה לחישוב:

1. **תחזית לוג השכר עבור גבר בעל השכלה נמוכה ו- 10 שנות ניסיון.**
2. **תחזית לוג השכר ההתחלתי עבור נשים משכילות.**
3. **לאחר כמה שנות ניסיון ישתווה השכר של נשים משכילות לזה של גברים משכילים?**

ב. רשמו את השערות האפס המתאימות לבדיקת הטענות הבאות:

1. **אין השפעה של מגדר והשכלה על השכר.**
2. **השפעת ההשכלה אינה תלויה במגדר.**
3. **אין השפעות השכלה אצל גברים.**
4. **אין הבדל בשיעורי התשואה לניסיון, בקרב הנשים.**