<u>סטודנטים יקרים</u>

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א'. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל <u>פתרונות מלאים</u> לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה <u>לחצו כאן</u>.

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

תוכן

פרק 1 - בעיות בסיסיות בהסתברות

רקע :

ניסוי מקרי : תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.
למשל : תוצאה בהטלת קובייה , מזג האוויר בעוד שבועיים .

מרחב מדגם : כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה : {1,2,3,4,5,6 }.
מזג האוויר בעוד שבועיים : { נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך }

מאורע : תת קבוצה מתוך מרחב במדגם . מסומן באותיות: ....A,B,C,

בהטלת קובייה , למשל, לקבל לפחות 5 : $A=\{5,6\}$

לקבל תוצאה זוגית : $B=\{2,4,6\}$

גודל מרחב המדגם : מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה : $|\Omega|=6$

גודל המאורע : מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה : $|A|=2$ $|B|=3$

מאורע משלים : מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה : $\bar{A}=\{1,2,3,4\}$ $\bar{B}=\{1,3,5\}$

מרחב מדגם אחיד (סימטרי) : מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות , אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

<u>הסתברות במרחב מדגם אחיד</u> :

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה : $p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית ? $p(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}$

<u>הסתברות במרחב לא אחיד :</u>

יחושב לפי השכיחות היחסית : $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

הציון - X	מספר התלמידים – השכיחות-f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8 ? $\frac{f}{n}=\frac{5}{25}=0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n}=\frac{2}{25}=0.08$$

<u>הסתברות למאורע משלים</u> :

$$p(\bar{A})=1-P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
   א. הרכב את כל המילים האפשריות.
   ב. רשום את המקרים למאורע:
   A- במילה נמצאת האות E.
   B- במילה האותיות שונות.
   ג. רשום את המקרים למאורע $\bar{A}$.

2. מטילים זוג קוביות.
   א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
   ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
   A- סכום התוצאות 7.
   C- מכפלת התוצאות 12.
   ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.

3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
   א. מה ההסברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
   ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
   ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
   א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
   ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
   ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	מספר מכוניות
20	0
40	1
100	2
30	3
10	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל –D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

פתרונות:

שאלה 2

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$

שאלה 3

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

שאלה 4

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

פרק 2 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

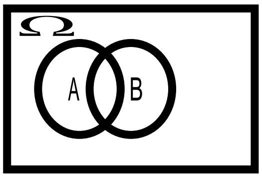
רקע:

פעולת חיתוך :

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים , חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך :

$$A\bigcap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב-B.



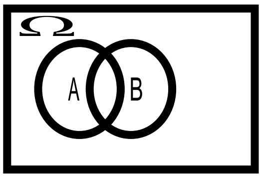
בהטלת קובייה , למשל, לקבל לפחות 5 : $A=\{5,6\}$

לקבל תוצאה זוגית : $B=\{2,4,6\}$

$$A\bigcap B=\{6\}$$

פעולת איחוד :

נותנת את כל האפשריות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא : $A\bigcup B$ נותנת את אשר נימצא ב-A או B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהטלת קובייה , למשל, לקבל לפחות 5 : $A=\{5,6\}$

לקבל תוצאה זוגית : $B=\{2,4,6\}$

$$A\bigcup B=\{2,4,5,6\}$$

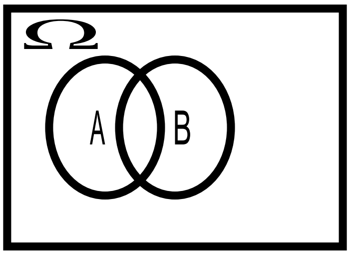
דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה)

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$p(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$



חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$P(A\cap B)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

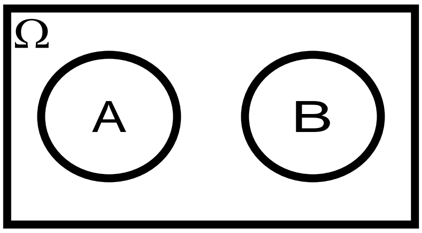
$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

<u>שיטת ריבוע הקסם</u>:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(A\cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})$	$P(A\cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

<u>מאורעות זרים :</u> מאורעות שאין להם מהמשותף : לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$A\bigcap B=\{\}$

$P(A\bigcap B)=0$
$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$

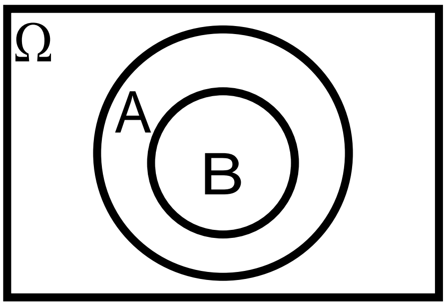
למשל , בהטלת קובייה

לקבל לפחות 5 : $A=\{5,6\}$

לקבל 3 : $B=\{3\}$

$A\bigcap B=\{\}$

<u>מאורעות מכילים :</u>



מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא : $\boxed{B \subset A}$

$A \cap B = B$

$A \cup B = A$

$P(A \cap B) = P(B)$

$P(A \cup B) = P(A)$

למשל :

$A = \{2,4,6\}$

$B = \{2,4\}$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
נגדיר את המאורעות הבאים:
E- במילה נמצאת האות E.
F- במילה אותיות שונות.
א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
B- לעבור את המבחן בכלכלה.
העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגראמת וון את השטח המתאים:
א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:

$A=$

$B=$

$\bar{B}=$

$A\cap B=$

$A\cup B=$

ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A.

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$\overline{\overline{A}}$

$A \cap \phi$

$A \cup \phi$

$A \cap \Omega$

$A \cup \Omega$

$A \cap \overline{A}$

$\overline{\phi}$

$A \cup \overline{A}$

5. הוגדרו המאורעות הבאים :

A= אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B=אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\overline{A} \cap B$

ד. $\overline{A} \cup \overline{B}$

ה. $\overline{\overline{A}}$

6. נגדיר את המאורעות הבאים:

A- אדם דובר עברית.

B- אדם דובר ערבית.

C- אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A- בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B- סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C- מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:

$$p(\bar{A}\cap\bar{B})=0.1 \quad p(B)=0.3 \quad p(A)=0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את $p(\bar{A}\cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A- קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B- קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו- B מאורעות זרים.

ב. A ו- B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

.14

$P(A)=0.3$
$P(B)=0.25$
$P(A\cup B)=0.49$

א. חשב את הסיכוי ל - $P(A\cap B)$

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

.15 A ו- B מאורעות זרים. נתון ש : $2\cdot P(B\cap\bar{A})=P(A\cap\bar{B})=P(\bar{A}\cap\bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

.16 קבע אילו מהטענות הבאות נכונות :

א. $A\cap B=B\cap A$

ב. $\overline{A\cup B}=A\cap B$

ג. $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(C\cup B)$

ד. $\overline{A\cap B\cap C}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

.17 נתון ש A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש – P(A)=0.3 ו- P(B)=0.2

א. האם יתכן ש- $p(A\cup B)$ =0.4 ?

ב. האם יתכן ש -$p(A\cup B)$ =0.6 ?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי $p(A\cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $p(A\cup B)$?

18. מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל- 30% חשבון בבנק הפועלים. ל28% חשבון בבנק לאומי ול- 15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל- 5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?

ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?

ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?

ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?

ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?

ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?

ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21.
הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיסי האשראי גם יחד?

ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?

ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20. הוכח: $p(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

21. A ו- B מאורעות במרחב המדגם האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

פתרונות:

שאלה 7

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

שאלה 8

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

שאלה 9

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

שאלה 10

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

שאלה 11

א. כן

ב. 0.3

שאלה 12

התשובה הנכונה ג

שאלה 13

א. 0.05

ב. 0.95

שאלה 14

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

שאלה 18

א.0.19

ב.0.05

ג. 0.31

ד. 0.46

ה.0.12

ו.0.41

ז.0.59

פרק 3 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודלו של מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים : n_1 אפשריות לשלב הראשון , n_2 אפשרויות לשלב השני ... n_k אפשרויות לשלב k:

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה : $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלי והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
   א. הטלת קובייה פעמים.
   ב. מספר תלת ספרתי.
   ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
   ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2. במסעדה מציעים ארוחה עסקית. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטרקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
   א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
   ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
      1. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
      2. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3. בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. המספר הוא זוגי.
   ב. במספר כל הספרות שונות.
   ג. במספר כל הספרות זהות.
   ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
   ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
   ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באותה צורה).

4. חמישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבנין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. כולם ירדו בקומה החמישית?
   ב. כולם ירדו באותה קומה?
   ג. כולם ירדו בקומה אחרת?
   ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות?

5. במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים אם :
   א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

6. מטילים קובייה 4 פעמים.
   א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
   ב. מה ההסתברות של התוצאות תהינה שונות?
   ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
   ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?

7. יש ליצור מילה בת חמש אותיות לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה- ABC (26 אותיות) בת 5 אותיות.
   א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו L?
   ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
   ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
   ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).

8. יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות : (בטאו את תשובותיכם באמצעות a)
   א. בקוד אין את הספרה 5.
   ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
   ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

9. במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימון V או בסימון X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

פתרונות :

שאלה 1

א. 36

ב. 900

ג. 70

ד. 90

שאלה 2

א. 36

ב. 1. 1/36

2. 1/9

שאלה 3

א. 0.5

ב. 0.3024

ג. 0.0001

ד. 0.9999

ה. 0.6976

ו. 0.01

שאלה 4

א. 0.00003

ב. 0.00024

ג. 0.20508

ד. 0.01047

שאלה 5

א. 3,375

ב. 2,730

שאלה 6

א. 1/216

ב. 5/18

ג. 13/18

ד. 215/216

שאלה 7

א. 0.5417

ב. $\frac{1}{26^4}$

ד. 0.0015

שאלה 9

2^n

פרק 4 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה

רקע:

תמורה:

מספר האפשריות לסדר n עצמים שונים בשורה :

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)\cdot n$$

הערה: $0! = 1$

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a,b,c,d ? (הפתרון בהקלטה)

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a,b,c,d , כך שהאותיות a,b יהיו ברצף? (הפתרון בהקלטה)

למשל , בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a,b,c,d , כך שהאותיות a,b יופיעו בתור הרצף ba ? (הפתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו בכמה אופנים :

א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?

ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2. סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.

א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?

ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?

ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3. בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה . נניח שאין תלמידים להם אותו ציון.

א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?

ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים , אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4. מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.

א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.

ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?

ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?

ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5. אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.

א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?

ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?

ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6. 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת קולנוע בכיסאות 1-8.

א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?

ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?

ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

פתרונות :

שאלה 1

א. 24

ב. 120

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.8

ג. 0.022

שאלה 3

א. 362,880

ב. 2,880

שאלה 4

א. 3,628,800

ב. 0.2

ג. 0.8

ד. $\frac{1}{45}$

שאלה 5

א. $\frac{1}{792}$

ב. $\frac{1}{99}$

ג. $\frac{1}{4620}$

שאלה 6

א. 0.75

ב. 0.014

ג. $\frac{1}{14}$

ד. $\frac{1}{35}$

פרק 5 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

רקע:

תמורה עם חזרות :

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה , ש- n_1 מהם זהים מסוג 1 , n_2 זהים מסוג 2, ..., n_r זהים מסוג r :

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$$

למשל ,

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות : W W T T K K ? (תשובה בהקלטה)

תרגילים:

1. במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות :

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2. בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות ב ע ע ב ע ג?

3. בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות.
כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4. רוצים ליצור מספר מכל הספרות הבאות : 1,2,2,2,6
כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5. במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6. כמה אותות שונים , שכל אחד מורכב מ 10 דגלים שונים ניתן ליצור אם 4 דגלים הם לבנים , 3 כחולים , 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

<u>פתרונות:</u>

3. 90
4. 20
5. $\frac{1}{210}$
6. 12,600

פרק 6 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

רקע:

מדגם סדור בדגימה עם החזרה

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k.

למשל,
בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?

$n=10$

$k=3$

$10^3=1,000$

מדגם סדור ללא החזרה

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים $(n \geq k)$ כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

למשל,
שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים . תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

$$\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720$$

תרגילים:

1. במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2. במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
   א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
   ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
   ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3. קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4. שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
   א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
   ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
   א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

פתרונות :

שאלה 1 :

א. 8000

ב. 6840

שאלה 2 :

א. 0.0001

ב. 0.6561

ג. 0.3439

שאלה 3 :

0.476

שאלה 4 :

א. 0.04

ב. 0.48

פרק 7 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}$$

דוגמה

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=120$$

הערות

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n$
3. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

תרגילים :

1. בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות אם-

   א. אין שום הגבלה לבחירה.

   ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.

   ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2. סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה:

   5 במקצועות מדעי הרוח.

   3 במקצועות מדעי החברה.

   2 מתחום המתמטיקה.

   א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?

   ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?

   ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן **לא** ממדעי הרוח?

   ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3. בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.

   א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?

   ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?

   ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4. במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.

   א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?

   ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?

   ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?

   ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5. בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב,13 בצבע אדום בצורת יהלום ו- 13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?

ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?

ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?

ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6. במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".

ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.

ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7. הוכח כי: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

8. 2n בנים ו- 2n בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.

א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?

ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

פתרונות:

שאלה 1

א. 53,130

ב. 20,475

ג. 3003

שאלה 2

א. 252

ב. 100

ג. 100

ד. 60

שאלה 3

א. 0.1117

ב. 0.1445

ג. 0.9819

שאלה 4

א. 0.02

ב. 0.187

ג. 0.972

ד. 0.00246

שאלה 6

א. $6.45 \cdot 10^{-5}$

ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$

ג. 0.3225

שאלה 8

א. $\binom{2n}{n}^2$

ב. $\sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{i}^2$

פרק 8 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה

רקע:

מספר האפשרויות לבחור k עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך n עצמים שונים ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת :

$$\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$$

למשל,
בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך אוכלוסייה של n עצמים שונים		
ביצוע הדגימה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ללא התחשבות בסדר הבחירה
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$
ללא החזרה	$(n)_k=\frac{n\,!}{(n-k)\,!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

<u>תרגילים:</u>

1. בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?

2. בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל – 3 תיקים שונים?

3. בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר –
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים זה מזה .

4. בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב 4 מגירות כאשר:
א. המשחקים שונים זה מזה.
ב. במשחקים זהים זה לזה.

5. מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה: $X_1+X_2=3$

6. מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה:
$$X_1+X_2+X_3+X_4=20$$

7. במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין . על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?

8. נתונות האותיות A , B, C ו- D רוצים לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה אות יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?

9. במשחק הלוטו החדש יש לבחור 4 מספרים מתוך המספרים 1- 20 . אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים , אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:
א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.
ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

10. ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים . חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:

א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

11. ישנם k כדורים להכניס ל-n תאים (n>k) . חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:

א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

פתרונות:

שאלה 1

495

שאלה 2

21

שאלה 3

א. 45

ב. 6561

שאלה 4

א. 4^{10}

ב. 286

שאלה 5

4

שאלה 6

1771

שאלה 7

15

שאלה 8

10

שאלה 9

א. 1/4,845

ב. 1/8,855

שאלה 10

א. 7776

ב. 252

ג. 720

ד. 6

<u>שאלה 11</u>

א. n^k

ב. $\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$

ג. $(n)_k=\dfrac{n\,!}{(n-k)\,!}$

ד. $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

פרק 9 - קומבינטוריקה- שאלות מסכמות

2. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
   ג. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ד. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
   ה. אין תפקידים שונים בוועד.

3. במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
   א. במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
   ב. כמו בסעיף א. רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
   ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.

3. מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
   א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
   ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
   ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
   ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

4. בארונית 4 מגירות. ילד התבקש ע"י אימו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל המשחקים יחד.
   א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
   ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
   ג. מה ההסתברות שה"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
   ד. מה ההסתברות שה"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

5. בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
   א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
   ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
   ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
   ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?

6. 5 חברים נפגשו הם רצו לראות סרט. באפשרותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
   א. מה ההסתברות שכולם ייבחרו את אותו הסרט?
   ב. מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
   ג. מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
   ד. מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
   ה. מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
   ו. מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
   ז. לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?

7. בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים, השנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
   א. אין בוועדות תפקידים.
   ב. בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
   ג. בכל וועדה כל התפקידים שונים.

8. 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות.

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה :

א. ללא הגבלה.

ב. כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.

ג. שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.

9. בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. בוחרים באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

10. 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות. כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

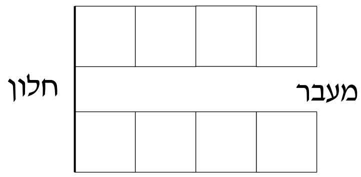
א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?

ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?

ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?

ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

11. ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה ו4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה. 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.



א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?

ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?

ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).

ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?

ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.

ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?

ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

12. סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה- ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.
א. כמה סיסמאות שונות יש?
ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?
ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

13. מתוך קבוצה בת n אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות n.

א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.
ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.
ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

14. שני אנשים מטילים כל אחד מטבע n פעמים.

בטא באמצעות n את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

15. יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).

ד. בקוד אין את הספרה 5.
ה. בקוד מופיעה הספרה 3.
ו. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.

16. מטילים זוג קוביות מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?

17. בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
א. מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
ב. מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?

18. במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור . 3 תיקיות הן אדומות ו- 2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות. (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).

א. מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?

ב. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?

ג. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?

ד. מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?

19. לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל- 3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.

א. מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?

ב. מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?

ג. מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?

20. מסדרים n כדורים שונים ב n תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד) . מה הסיכוי שבתא i $(1 \le i \le n)$ יהיו בדיוק k כדורים ?

21. בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות .

א. כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?

ב. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?

ג. כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

22. מטילים קובייה הוגנת K פעמים .

א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא j?

ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא i?

ג. עבור $i \le j$, מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא j וגם התוצאה הכי קטנה היא i ?

פתרונות:

שאלה 1

ד. 102,400,000

ה. 78,960,960

ו. 658,0088

שאלה 2

ג. 810,000

ד. 657,720

ה. 27,405

שאלה 3

ד. 14,040,000

ה. 1,404,000

ו. 5,616,000

ז. 8,424,000

שאלה 4

א. 0.00024

ב. 0.00098

ג. 0.05933

ד. 0.75000

שאלה 5

ד. 0.00098

ה. 0.17798

ו. 0.02929

ז. 0.02197

שאלה 6

א. $\frac{1}{4096}$

ב. $\frac{1}{32,768}$

ג. 0.205

ד. 0.795

ה. 0.0105

ו. 0.5129

ז. 0.1071

שאלה 7

א. 4200

ב. 50,400

ג. 604,800

שאלה 8

א. 604,800

ב. 2,880

ג. 2,880

שאלה 9

0.238

שאלה 10

א. 0.1512

ב. 0.014

ג. 0.059

ד. $\frac{62}{10^6}$

שאלה 11

א. 40,320

ב. 0.1071

ג. 0.2142

ד. 0.0357

ה. 0.5714

ו. 0.1429

ז. 0.0143

ח. 0.0095

שאלה 14

$$\frac{1}{4^n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

שאלה 16

לפחות 25

שאלה 17

א. 0.35721

ב. 0.1759

שאלה 18

א. 0.75

ב. 0.075

ג. 0.375

ד. 0.15

שאלה 19

א. 0

ב. $\frac{450}{729}$

ג. $\frac{90}{729}$

<u>שאלה 20</u>

$$\frac{\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}{n^n}$$

<u>שאלה 21</u>

א. 720

ב. 360

ג. 432

<u>שאלה 22</u>

א. $$\frac{j^k-(j-1)^k}{6^k}$$

ב. $$\frac{(7-i)^k-(6-i)^k}{6^k}$$

ג. $$\frac{(j-i+1)^k-2\cdot(j-i)^k+(j-i-1)^k}{6^k}$$

פרק 10 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר.
הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו אשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש-B כבר קרה:

$$P\left(A\middle|B\right)$$

כשמרחב המדגם אחיד:

$$P\left(A|B\right)=\frac{|A\cap B|}{|B|}$$

למשל, (פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה.
נגדיר:
A – התוצאה זוגית.
B – התוצאה גדולה מ-3.
נרצה לחשב את:
$P\left(A|B\right)$

<u>תרגילים:</u>

1. נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?

2. יוסי הטיל קובייה. מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4 אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית ?

3. מטילים צמד קוביות.

נגדיר:

A – סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7

B – מכפלת התוצאות 12

חשבו את $P(A|B)$.

4. הוטל מטבע פעמיים. ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים ?

5. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל שהתוצאות זהות. מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?

6. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל לפחות פעם אחת 4. מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?

7. נבחרה משפחה בת שני ילדים. ידוע שאחד הילדים בן. מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

8. נבחרה משפחה בת שלושה ילדים. נתון שהילד האמצעי בן. מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

השאלות הבאות משלבות קומבינטוריקה:

9. בכיתה 6 בנים ו-7 בנות. נבחרו ארבעה ילדים מהכיתה.
אם ידוע שנבחרו 2 בנים ושתי בנות, מה הסיכוי שאלעד לא נבחר?

10. חמישה חברים יצאו לבית קולנוע והתיישבו זה ליד זה באקראי בכיסאות מספר 5 עד 9.
אם ידוע שערן ודין התיישבו זה ליד זה. מה ההסתברות שהם יושבים בכיסאות מספר 6 ו 7 ?

פתרונות:

שאלה 1

0.2

שאלה 2

1/3

שאלה 3

0.5

שאלה 4

0

שאלה 5

1/6

שאלה 6

2/11

שאלה 7

1/3

שאלה 8

3/4

שאלה 9

2/3

שאלה 10

1/4

פרק 11 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה:
נגדיר את המאורעות הבאים: A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B– לעבור את המבחן בכלכלה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
   א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
   ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
   ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
   ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
   ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?

2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בלי". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בלי". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".
ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
   א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
   ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בלי"?
   ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בלי", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
   ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3. במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
   א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
   ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
   ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
   ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
   א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
   ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
   ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
   ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
   ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
   ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21:
הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בכל שלושת הכרטיסים הנ"ל.

א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראכרט?

ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראכרט?

ג. אם לאדם לפחות כרטיס אשראי אחד, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראכארט?

פתרונות:

שאלה 1

א. 0.833

ב. 0.9375

ג. 0.0625

ד. 0.5

ה. 0.789

שאלה 2

א. 5%

ב. 0.0833

ג. 0.786

ד. 0.6875

שאלה 3

א. 0.4

ב. $\frac{2}{3}$

ג. 0.25

ד. $\frac{6}{7}$

פרק 12 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

רקע:

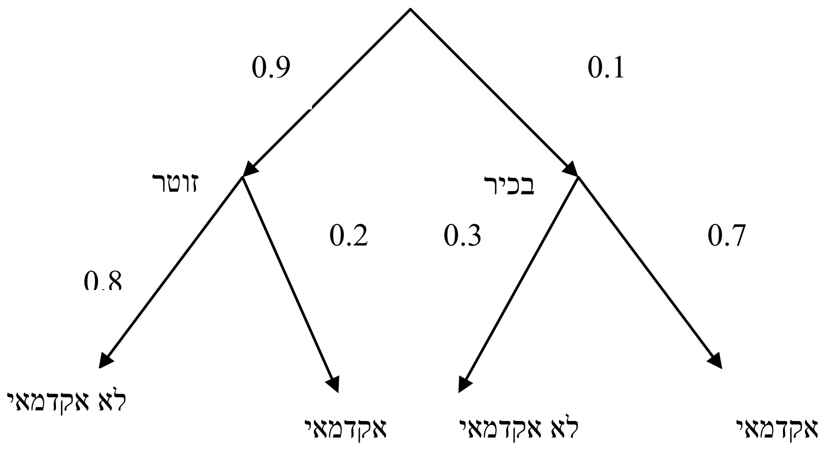
נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים , כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון :

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים .

מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים , השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.

נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ?

0.1*0.7=0.07

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ?

0.9*0.8=0.72

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

0.1*0.7+0.9*0.2=0.25

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar \mid academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

<u>נוסחת ההסתברות השלמה</u>

B מאורע כלשהו, $A_1,...,A_n$ חלוקה ממצה של Ω.

אזי: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

<u>נוסחת בייס</u>

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון . מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאם סוכרייה נוספת , אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.

א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון ?

ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?

2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.

א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?

ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?

ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?

ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?

ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.

א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?

ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?

ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ- 4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B,C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלה מסוימת את התשובה הוא p , אם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש . בכל מקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה , מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10. אדם משחק נגד שני מתמודדים, רונית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו:

א. דולב, רונית, דולב

ב. רונית, דולב, רונית

בכל משחק מישהו חייב לנצח (אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון שדולב שחקן טוב יותר מאשר רונית. איזו אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

פתרונות:

שאלה 1

א. 2/7

ב. 23/49

שאלה 2

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

שאלה 9

$$\frac{kp}{1+(k-1)p}$$

שאלה 10

אפשרות א עדיפה

פרק 13 - תלות ואי תלות בין מאורעות

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A)=p(B)$ נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B)=p(A)$ כלומר A אינו תלוי גם ב- B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$.

הוכחה לכך:

$$P(A/B)=P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה: $p(\bar{A}\bigcap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.7)(1-0.4)=0.18$

<u>הרחבה</u>: <u>אי תלות בין n מאורעות</u>

n מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$$

תרגילים:

1. נתון:

$$p(A)=0.2$$
$$P(B)=0.5$$
$$P(A\cup B)=0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6. עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש : $P(A\cup B)=0.9$,
$P(A\cap \overline{B})=0.3$, $P(A|B)=0.6$. האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7. הוכח אם

$$P(A/B)=P(B/A)$$

אז :

$$P(A)=P(B)$$

8. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

א. אם $p(A\bigcup B)=p(A)\bullet p(B)$ אזי המאורעות בלתי תלויים.

ב. מאורע A כלול במאורע B. $P(A)>0$, $0<p(B)<1$ לכן $p(A/B)<p(A)$.

ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיובים לכן הם מאורעות תלויים.

ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיובים לכן A-ו B מאורעות זרים.

ה. $P(\overline{A}\bigcap \overline{B})=1-P(A)-P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

פתרונות :

שאלה 1

כן

שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

שאלה 8

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

פרק 14 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?

ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?

ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית . מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?

ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2. במדינת "שומקום " 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'.3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?

ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג?

ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ . מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א?

ד. האם המאורעות : "חלב חמוץ" ו- "יוצר במחלבה א" בלתי תלויים?

3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי:

בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג

בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה

בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.

א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?

ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?

ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?

ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?

ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?

ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?

ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

5. באוכלוסיה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים:

A- נבחר אדם מובטל

B- נבחר גבר

האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, ב- B את ההטלה השנייה ראש.

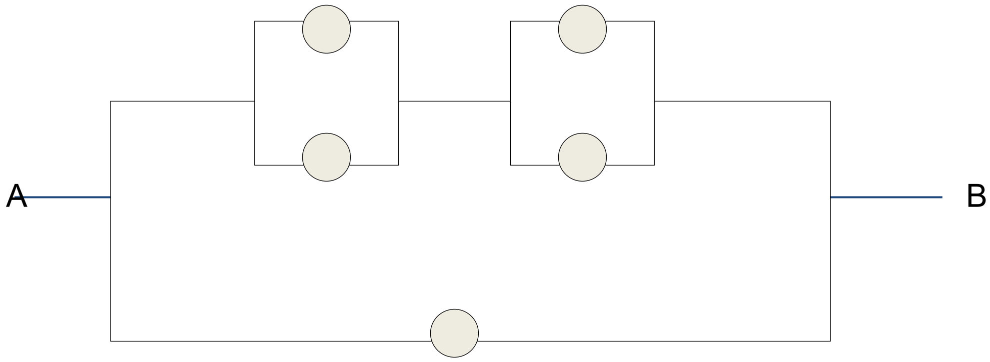
א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו- B.

ב. האם המאורע A ו- B בלתי תלויים?

ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?
ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

8. נתונה המערכת החשמלית הבאה:



כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p.

כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.

הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P+(1-P)(2P-P^2)^2$$

9. ליאת מעוניינת לתרגל לבחינה בהסתברות. היא מצאה באינטרנט מאגר הכולל 25 שאלות מבחינות. השאלות ממוספרות כאשר 6 מתוכן עוסקות במשתנה מקרי רציף. ליאת החליטה לבחור באקראי 7 שאלות מהמאגר במטרה לפתור אותן. כל שאלה שלא עוסקת במשתנה הרציף תיפתר על ידי מיכל בסיכוי 90% , אך אם השאלה עוסקת במשתנה הרציף היא תיפתר בסיכוי של 60%.

א. מה הסיכוי שהשאלות שנבחרו הן כולן ממוספרות בסדר עוקב ?

ב. מה הסיכוי ששאלה 20 היא השאלה עם המספור המקסימלי מבין השאלות שנבחרו?

ג. ידוע שליאת בחרה 2 שאלות שעוסקות במשתנה הרציף והיתר לא . מה הסיכוי שתצליח לפתור 6 מתוך השאלות שבחרה?

10. נתונים שלושה מאורעות A, B ו- C. ידוע ש :

$$P(A|B)=1$$

$$P(A|C)=1$$

תנו דוגמא ספציפית למאורעות A, B ו- C שבה המאורעות B ו- C תלויים.

11. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענה הבאה : אם A ו- B בלתי תלויים אז A ו- $\bar{B}$ בלתי תלויים.

12. משחקים משחק מזל פעמיים בכל משחק בודד יש אפשרות לנצח או להפסיד. הסיכוי לנצח בכל משחק הוא P , כאשר $0<P<1$. נגדיר את המאורעות הבאים : A – תוצאות המשחקים שונות זו מזו. B - משחק הראשון היה ניצחון. מה ערכו של P עבורו A ו- B יהיו מאורעות בלתי תלויים?

13. טל מניח בשורה N קוביות בצבעים שונים . בין שתי קוביות אקראיות כלשהן ערן מניח מכחול. הוכח שהסיכוי שהקובייה הכחולה והאדומה יהיו בצדדים שונים של המכחול הוא $\frac{N+1}{3(N-1)}$.

14. הוכח באמצעות אינדוקציה את אי שוויון בול $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

פתרונות:

שאלה 1

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

שאלה 3

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

שאלה 4

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

שאלה 5

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

שאלה 6

א. 0.65

ב. A ו- B תלויים

ג. 0.5384

שאלה 7

א. 8%

ב. 0.733

ג. תלויים

ד. 1. 0.478

2. 0.15

<u>שאלה 8</u>

הוכחה

<u>שאלה 9</u>

א. $\frac{19}{480,700}$

ב. $\frac{27,132}{480,700}$

ג. 0.4015

<u>שאלה 10</u>

הדוגמה בהקלטה

<u>שאלה 11</u>

הוכחה

<u>שאלה 12</u>

$\frac{1}{2}$

<u>שאלה 13</u>

הוכחה

<u>שאלה 14</u>

הוכחה

פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

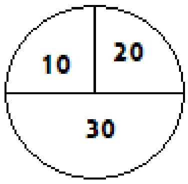
רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית הסתברות.

פונקצית הסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד (פתרון בהקלטה).

תרגילים:

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא:

50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
70 משפחות עם מכונית אחת.
60 משפחות עם 2 מכוניות.
20 משפחות עם 3 מכוניות .

בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.

בנו את פונקציית ההסתברות של X.

2. מהאותיות C,B,A יוצרים קוד דו תווי.
   א. כמה קודים ניתן ליצור?
   ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
   ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של X.

3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקצית ההסתברות של X.

4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקצית ההסתברות של X.

5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א׳ יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב׳ יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג׳ יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקצית ההסתברות של X.

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X=k)=\frac{k}{A}$$
$$k=1,2...4$$

מצא את ערכו של A.

7. בגן ילדים 8 ילדים מתוכם 5 בנים ו-3 בנות. בוחרים באקראי 3 ילדים להשתתף בהצגה. נגדיר את X כמספר הבנים שנבחרו להצגה. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

8. בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10

להלן הנתונים:
20% צופים בערוץ 2.
8% צופים בערוץ 1.
10% צופים בערוץ 10.
כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X.

פתרונות

שאלה 3

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

שאלה 4

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

שאלה 5

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

שאלה 6

10

פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

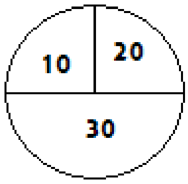
$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת– ממוצע של פונקציית ההסתברות , אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל . התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

שונות– תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

סטיית תקן- שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

x	10	20	30
P(x)	0.25	0.25	0.5

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10-22.5)^2 \cdot 0.25 + (20-22.5)^2 \cdot 0.25 + (30-22.5)^2 \cdot 0.5$$
$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

תרגילים:

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של X:

X	-30	0	20	40
p (X)	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון.
חשב את $E(X)$

3. ידוע של- 20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת וסטיית תקן של X.

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקצית ההסתברות של X.

ב. חשב את התוחלת והשונות של X.

5. נתונה פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי X:

x	2	4	6	8
P(x)		0.3		0.2

כמו כן נתון ש: $E(X)=4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5- 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10.
מצא את פונקצית ההסתברות.

7. להלן ההתפלגות של משתנה מקרי X.

P	X
¼	1
½	3
¼	K

מהו הערך K שייתן ערך מינימלי לשונות של X.

פתרונות:

שאלה 1

תוחלת : 2   שונות : 796

שאלה 3

ב . תוחלת : 3.36   סטיית תקן : 1.603

שאלה 4

א.

x	1	2	3	4	5
P(x)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ב. תוחלת : 3

שונות 2

שאלה 5

א.

x	2	4	6	8
P(x)	0.4	0.3	0.1	0.2

ב. 5.16

שאלה 6

x	-5	0	5
P(x)	0.2	0.6	0.2

שאלה 7

2.33

פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

אם $Y = aX + b$

אזי :

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a|\sigma_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק ?

פתרון (בהקלטה)

חישבנו קודם ש :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

תרגילים:

1. סטודנט ניגש ל- 5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12 . מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5 . הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

4. X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X)=4$ ו- $V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש עבורו $Y=7-X$.
חשב את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.
להלן התביעות האפשריות והסתברותן:
בהסתברות של 1/1000 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל.
החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית באלפי ₪
א. בנו את פונקצית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

6. יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

X	5	6	7	8	9	10
P(x)	0.1	0.2	0.2	0.3		

כמו כן נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

א. השלימו את פונקציית ההסתברות.

ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.

ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא: כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגוייה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקצית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X=k)=\frac{k}{A}$$

$$k=1,2...4$$

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את $E(X^3)$

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$

פתרונות :

שאלה 1:

תוחלת : 14 שונות : 32

שאלה 2:

תוחלת : 8 שונות : 12

שאלה 3:

תוחלת : 13.2

סטיית תקן : 5.5

שאלה 4:

תוחלת: 3

שונות : 3

שאלה 6:

ב. $V(X)=1.8275$

שאלה 7 :

א. A=10

ב. $E(X)=3$
$V(X)=1$

ג. $E(X^3)=35.4$
$V(X^3)=616.84$

ד. $E(y)=-2.5$
$V(y)=0.25$

פרק 18 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

רקע:

אם $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקרים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots\ldots + E(X_n)$$

אם $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots\ldots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים . תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא -2 עם סטיית תקן 4 . מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

תרגילים:

1. הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות 5. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו.
מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2. X ו-Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של X+Y?

3. אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:

X= סכום הזכיה במשחק הראשון.

Y= סכום הזכייה במשחק השני.

נתון:

$$E(x)=10 \qquad \sigma(X)=3$$
$$E(y)=12 \qquad \sigma(Y)=4$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

4. ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי וב-10 ₪ רבע כך גם ב- 20 ₪ . מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים.

5. נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=K)=\frac{A}{K-1} \qquad K=2,3,4,5$$
$$0 \qquad \text{אחרת}$$

א. מצא את ערכו של A.

ב. חשב את התוחלת והשונות של X.

ג. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

פתרונות:

<u>שאלה 1</u>

תוחלת: 9

שונות : 15

<u>שאלה 3</u>

תוחלת :22

סטיית תקן: 5

<u>שאלה 4</u>

תוחלת : 90

שונות : 275

<u>שאלה 5</u>

א. $A = \frac{12}{25} = 0.48$

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת 2.92n

שונות 1.1136n

פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון" כמו: מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.

מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול.

נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

<u>פונקציית ההסתברות של X</u>:

לכל $$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\ ;\ k=0,1,2,.........,n$$

כאשר: $0!=1$; $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot.......\cdot1$; $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

<u>תוחלת</u>: $E(X)=np$

<u>שונות</u>: $V(X)=npq$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

1) חוזרים על <u>אותו ניסוי ברנולי</u> באופן <u>בלתי תלוי</u> זה בזה.
2) חוזרים על הניסוי <u>n</u> פעמים.
3) X– מוגדר <u>כמספר ההצלחות המתקבלות</u> בסך הכול.

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

תרגילים:

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסיה.
נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
א. מהי ההתפלגות של X?
ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם ?
ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם ?
ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל ?
ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם ?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.

א. מהי ההתפלגות של X? הסבירו.
ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪.
ההסתברות לזכות ב- 20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה- 30 ₪ שהשקיע?
ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו :

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת״א. מבין הסטודנטים שגרים בת״א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת״א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
   א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע״י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
   ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

6. במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
   א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
   ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
   ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?

7. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
   א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
   ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

8. מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. נגדיר את X – מספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את $E(x^2)$.

פתרונות :

שאלה 2:

ב. 0.2335

ג. 0.1493

ד. תוחלת : 7

סטיית תקן : 1.449

שאלה 3 :

א. 0.5314

ב. 0.0984

ג. 0.1143

ד. תוחלת : 18-

סטיית תקן : 14.697

שאלה 4:

א. 0.1789

ב. 2

שאלה 5 :

א. 0.1956

ב. 0.4253

שאלה 6 :

א. 0.85

ב. 0.182

ג. תוחלת : 82 נקודות

שונות : 91.8 נקודות

שאלה 7 :

א. 0.401

ב. תוחלת : 8.025

סטיית תקן : 2.193

שאלה 8 :

7.5

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.

X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.

נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

$$X \sim G(p)$$

פונקציית ההסתברות:

$$P(X=k)=pq^{k-1} \qquad k=1,2,\ldots\infty$$

תוחלת: $E(X)=\frac{1}{p}$

שונות: $V(X)=\frac{q}{p^2}$

תכונות חשובות :

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון, דהיינו, $P(X=n+k)/X>k)=P(X=n)$.

$$P(X>k)=q^k$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכד 10 כדורים ש- 3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק. ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?

ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?

ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ 5 כדורים?

ד. אם הוצאו יותר מ- 3 כדורים . מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?

ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

תרגילים:

1. קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש 5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום.
חשבו את ההסתברויות הבאות:
   א. שידגום 3 מוצרים.
   ב. שידגום 4 מוצרים.
   ג. שידגום 5 מוצרים.
   ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
   ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.

2. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
   א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
   ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
   ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצעו?
   ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
   א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
   ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
   ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
   ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

4. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
   א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
   ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

5. אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?

ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?

ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים, מה ההסתברות ששיחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?

ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6. במאפייה מייצרים עוגת גבינה ועוגת שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר עוגות שוקולד. התווית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגות שוקולד?

ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?

ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד ידוע שעוגת גבינה עולה לייצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?

ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדגם האדם?

פתרונות :

שאלה 2 :

א. 0.009

ב. 0.0001

ג. תוחלת : 1.111

שונות: 0.1234

ד. תוחלת : 44.4

שונות : 308.5

שאלה 3 :

א. 0.999

ב. 0.875

ג. 0.03125

ד. 1

שאלה 4:

א. 0.1029

ב. 9.72

שאלה 5:

א. 0.06

ב. 0.7176

ג. 0.0729

ד. 9.487משחקים

שאלה 6 :

א. 0.015

ב. 0.0215

ג. תוחלת $63\frac{1}{3}$, שונות $2777\frac{7}{9}$

ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054

פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

התפלגות זו הנה התפלגות שבה לכל תוצאה יש את אותה הסתברות.

הערכים המתקבלים בהתפלגות הם החל מ- a ועד b בקפיצות של אחד.

$$X \sim U(a,b)$$

פונקציית ההסתברות:

$$P(X=K)=\frac{1}{b-a+1}$$

K= a, a+1,..,b

תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$

שונות: $V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אדם בוחר מספר אקראי בין 1 ל-100 כולל. מהי פונקציית ההסתברות של המספר ומה הצפי שלו?

תרגילים :

1. במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ- 1 ועד 45 .
נתבונן במשתנה X המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
א. חשבו את $P(X=2)$
ב. חשבו את $P(X\le 30)$
ג. חשבו את $P(X>4\,|\,X\le 10)$
ד. חשבו את $P(X=k)$

2. קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל- 100. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר :
1. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ 80?
2. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?

3. יהי X התוצאה בהטלת קובייה.
א. מהי ההתפלגות של X?
ב. מה התוחלת של X?
ג. קובייה הוטלה 4 פעמים . מה התוחלת ומה השונות של סכום התוצאות ב- 4 ההטלות?

4. בכד 10 כדורים שרק אחד צבע אדום. אדם מוציא כדור ללא החזרה עד אשר מתקבל הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?

5. יש לבחור מספר אקראי בי 1 ל- 50 כולל.
א. מה הסיכוי שהמספר 4 יבחר?
ב. מה הסיכוי שהמספר שיבחר גדול מ- 20 ?
ג. אם נבחר מספר גדול מ- 20 מה ההסתברות שהוא קטן מ- 28?

6. הוכח שאם $X\sim U(a,b)$ אז מתקיים ש : $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

פתרונות :

שאלה 1 :

א. תשובה : $\frac{1}{45}$

ב.תשובה : $\frac{30}{45}$

ג. תשובה : 0.6

שאלה 2

א. תוחלת : 50.5

סטיית התקן : 28.87

ב. 1. תשובה : 0.08192

ב. 2 תוחלת : 303 סטיית תקן :70.71

שאלה 4 :

תוחלת 5.5

שונות :8.25

פרק 22 - ההתפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית

רקע :

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל . הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן.

כלומר , כמה בממוצע אירועים קורים ביחידת זמן.

$$X \sim pois(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה .

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X=K)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{K}}{K!}$$

$$K=0,1,2,\ldots\infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X)=V(X)=\lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פורפורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?

ב. מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?

ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?

ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

תרגילים:

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
   א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
   ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
   ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
   ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
   א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
   ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בכול החלק ישנן 15 טעויות?
   ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
   א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
   ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4. לחנות AMPM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
   א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
   ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
   ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
   ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
   א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
   ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
   ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6. במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

פתרונות :

שאלה 1:

א. 0.0337

ב. 0.9933

ג. 0.1246

ד. 5

שאלה 2:

א. 0.084

ב. 0.099

ג. 0.151

שאלה 3:

א. 4

ב. 0.407

שאלה 5 :

א. 0.0139

ב. 0.2196

ג. 0.6948

שאלה 6 :

א. 16.7

ב. 0.0708

פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים , מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת- פריטים אלה נקראים "מיוחדים".

בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.

X– מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.

משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N,D,n) **יסומן על ידי: X~H(N,D,n).**

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:

$$P(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

התוחלת של ההתפלגות:

$$E(X)=n\cdot\frac{D}{N}$$

השונות של ההתפלגות:

$$V(X)=n\cdot\frac{D}{N}\cdot(1-\frac{D}{N})\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

דוגמה : (הפתרון בהקלטה)

בכתה 40 תלמידים מתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת .

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?

ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

תרגילים:

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
   א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
   ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
   ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט , 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
   א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה ולא בטבלה.
   ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X?
   ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X=2 \mid X>1)$

3. זהה בסעיפים הבאים את ההתפלגות וחשב לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
   נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
   אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
   א. האוכלוסייה גדולה מאד.
   ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.

4. בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו – 5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
   א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
   ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

פתרונות:

שאלה 1

ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{5}{9}$

ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{20}{27}$

שאלה 2

ב. תוחלת: 1.5

סטיית תקן: 0.748

ג. 0.9

פרק 24 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית שלילית

רקע:

בהתפלגות זו חוזרים על אותו ניסוי ברנולי בזה אחר זה באופן בלתי תלוי עד אשר מצליחים בפעם ה-r ית .

X- מספר החזרות עד שהתקבלו r הצלחות.

$$X \sim NB(r,p)$$

פונקציית ההסתברות :

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$
$$k=r,r+1,\ldots\infty$$

התוחלת:

$$E(X)=\frac{r}{p}$$

השונות:

$$V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

דוגמה :(פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה עד אשר מקבלים 3 פעמים תוצאה שהיא גדולה מ-4.

א. מה הסיכוי להטיל את הקובייה 6 פעמים?
ב. מה תוחלת ושונות מספר הפעמים שנטיל את הקובייה?

תרגילים:

1. בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. אדם מוציא כדור באקראי פעם אחר פעם ומחזיר בין הוצאה להוצאה את הכדור. נסמן ב-X את מספר הכדורים שהוא הוציא עד אשר הוא קיבל 2 כדורים לבנים בסך הכול אך לא בהכרח ברצף.
   א. חשבו את $P(X=2)$
   ב. חשבו את $P(X=3)$
   ג. חשבו את $P(X=4)$
   ד. חשבו את $P(X=k)$

2. הסיכוי לזכות במשחק מזל הוא 0.4. אדם משחק במשחק ומפסיק ברגע שהוא ניצח פעמיים (לא בהכרח ברצף).
   א. מה הסיכוי שישחק פעמיים?
   ב. מה הסיכוי שישחק 3 פעמים?
   ג. מה הסיכוי שישחק 4 פעמים?
   ד. מה הסיכוי שישחק 5 פעמים?
   ה. מה הסיכוי שישחק K פעמים?

3. הראה שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

4. מטילים מטבע שוב ושוב עד אשר מקבלים שלוש פעמים עץ בסך בכול.
   א. בנו את פונקצית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.
   ב. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?
   ג. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים . מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

5. יהיה X_{i} מספר החזרות עד ההצלחה הראשונה בניסיונות ברנוליים בלתי תלויים זה בזה כאשר i=1,2,…n .
   הוכח שהתוחלת והשונות של $\sum_{i=1}^{n} X_i$ זהה לתוחלת והשונות של ההתפלגות הבינומית השלילית $NB(n,p)$.

פתרונות:

שאלה 1

א. 0.36

ב. 0.288

שאלה 4

ב. תוחלת: 6 שונות: 6

ג. 0.1886

פרק 25 - קירוב פואסוני להתפלגות הבינומית

רקע:

אם $X \sim B(n,p)$ עבור n גדול ו-p קטן ניתן לקרב את ההתפלגות להיות פואסונית כאשר הפרמטר $\lambda = np$

כאשר פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית כזכור היא : $p(X=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}$.

הערה : יש הטוענים, כי n 'גדול' ו-p 'קטן' משמעו : $np \geq 10$ ו- $p \leq 0.1$.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

בקו ייצור המוני 10% מהמוצרים כחולים . בוחרים באקראי 20 מוצרים מקו הייצור.
חשבו את ההסתברות שמתוך המוצרים שיבחרו בדיוק 1 יהיה כחול.
פעם לפי ההתפלגות הבינומית ופעם לפי הקירוב הפואסוני.

תרגילים:

1. במדינת שומקום 10% מהאוכלוסייה מובטלת . נדגמו 10 תושבים אקראיים מאותה מדינה. חשבו את הסיכוי שבמדגם יהיה לכל היותר מובטל אחד.
השוו את התוצאה לקירוב הפואסוני.

2. מקו ייצור המוני נדגמו 1000 מוצרים. ידוע ש- 5% מהמוצרים בקו הייצור פגומים. מה הסיכוי שבמדגם יתקבלו 45 מוצרים פגומים?

3. 1% מהתושבים באוכלוסייה גדולה חולים במחלה מסוימת . בסניף קופת חולים נרשמו 2000 תושבים אקראיים. חשב לפי הקרוב הפואסוני שבדיוק 18 מהם יהיו חולים.

4. בעיר ניו יורק ישנם כתשעה מיליון תושבים מתוכם 900 אלף אסיאתיים . מה בקירוב ההסתברות שמתוך 100 תושבים אקראיים לפחות שני אסיאתיים?

פתרונות :

שאלה 1:

ללא קירוב 0.7361 עם קירוב : 0.7358

שאלה 2:

0.0458

שאלה 3:

0.0844

שאלה 4:

0.9995

פרק 26 - המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות

תרגילים:

1. נתון ש :

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של X.

ב. $W = 2X - 4$, חשב את התוחלת וסטיית התקן של W.

ג. $T = X + Y$, חשב את התוחלת של T. האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T?

2. ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים. משחק אחד בכל מכונה (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקצית ההסתברות של X.

ב. חשב את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים.10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתיחתה ביום א׳ בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקצית ההסתברות של X?

ג. מהי תוחלת מס׳ המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב׳ נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית.
חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו״ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו״ל:
הסרט ״הצבי״ יימכר לחו״ל בסיכוי של 0.6.
הסרט ״לעולם לא״ יימכר לחו״ל בסיכויי של 0.7.
הסרט ״מוות פתאומי״ יימכר לחו״ל בסיכוי של 0.2.
ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו״ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו״ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7. במפעל מייצרים סוכריות כך ש 20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ- 3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

8. מבחן בנוי משני חלקים. בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכונן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9. יהי X משתנה מקרי המקיים $E(X)=2$ וכן $V(X)=1$. חשב $E(X-5)^2$.

10. הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P. בוחרים באקראי ארבעה נבחנים. ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי 8/3 מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P.

תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.

ב. מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

11. רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי P ימינה ביחידה אחת ובסיכוי 1-P שמאלה ביחידה אחת. נסמן ב-X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים. רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו-n.

12. למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק.אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.
   א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).
   ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P.
   ג. לאילו ערכי P המשחק כדאי?

13. מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל m+1 פעמים עץ. רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

14. לפניכם N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N . ברשותכם n חולצות . עליכם באופן אקראי לבחור לכל חולצה מגירה . כל מגירה יכולה להכיל גם את כל החולצות שברשותכם. נגדיר את X_1 - מספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1. נגדיר את X_N - מספר החולצות שהונחו במגירה מספר N.
   חשבו את $V(X_1+X_N)$.

15. n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם . מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

16. הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א הוא 0.7 . סטודנט שנכשל במועד א בהכרח ניגש למועד ב ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8 . אם סטודנט נכשל במועד ב הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון. נתון שלמועד א נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס. מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?

17. לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה- i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה. יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו.
   מצאו את $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.

18. לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל- 3 קלמרים . לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר . כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים. נסמן ב- X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים. חשבו את $E(\sqrt{x+7})$.

19. בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו- 2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתל.

א. מצאו את ההתפלגות של X.

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

פתרונות :

שאלה 1:

א. תוחלת : 2

סטיית תקן : 1

ב. תוחלת : 0

סטיית תקן : 2

ג. תוחלת : 4.5

סטיית תקן : לא ניתן

שאלה 2:

א. 0.03

ב. תוחלת : 0.15, שונות 0.1875

ג. 0.1328

שאלה 3:

א.

x	1	2	3	4	5
P(x)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ב. תוחלת : 3

שונות : 2

ג. תוחלת : 1.5

שונות : 0.5

שאלה 4 :

א. 0.9975

ב. 0.0172

ג. 1.0025

<u>שאלה 5:</u>

א. 0.375

ג. 0.6

ד. 0.282

<u>שאלה 6:</u>

ב. תוחלת : 1.5

שונות 0.61

ג. תוחלת : 0

סטיית תקן : 4.68

<u>שאלה 7:</u>

א. 0.4348

ב. 0.0923

<u>שאלה 8 :</u>

א. 2.013

ב. 0.5256

ג. תוחלת : 8

שונות : 1.6

ד. תוחלת : 10.5

שונות 3.475

<u>שאלה 9 :</u>

10

<u>שאלה 10:</u>

א. 0.6

ב. 0.0384

ג. 0.0256

ד. תוחלת: 0.67

שונות: 1.11

ה. 0.24

שאלה 12:

ב. $\frac{1-2p^2}{p}$

ג. $0<p<\sqrt{\frac{1}{2}}$

שאלה 13:

$$P(X=k)=\binom{m+k}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1} \qquad k=0,1,\ldots,\infty$$

שאלה 14:

$$\text{n}\cdot\left(\frac{2}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)$$

שאלה 15:

$$\frac{2^n}{2n}$$

שאלה 16:

x	1	2	3
P(x)	0.0008	0.2893	0.7099

שאלה 17:

$$\frac{e^{-6}}{6}\left[e^6-1\right]$$

שאלה 18 :

2.675

שאלה 19 :

א. $P(X=k)=\frac{n-k-1}{\binom{n}{2}} \qquad k=0,1,\ldots,\text{n}-2$

ב. הוכחה

פרק 27 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות ללא אינטגרלים

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו').
משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.
נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב f(x).
השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.
פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.
בקורס הנוכחי לא נבצע אינטגרציה כדי לחשב את השטחים , אלא נשתמש בצורות הנדסיות מקובלות.

ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים :

שטח משולש : גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקיי 2 : $S_{triangle}=\frac{h\cdot a}{2}$

שטח מלבן : אורך(a) כפול רוחב (b) : $S_{rectangle}=a\cdot b$

משוואת קו ישר :

y=mx+n
m = שיפוע.
n = נקודת החיתוך עם ציר הy.

שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות : $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$: $m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (X_1,Y_1) ושיפועו ידוע m :

$$y-Y_1=m(x-X_1)$$

פונקציית התפלגות מצטברת:

היא פונקציה הנותנת במשתנה רציף את הסיכוי ליפול מתחת לערך מסוים :

$\boxed{F(t)=p(X\le t)}$

כמו כן :

$\boxed{p(X>t)=1-F(t)}$ $\boxed{p(a<X<b)=F(b)-F(a)}$

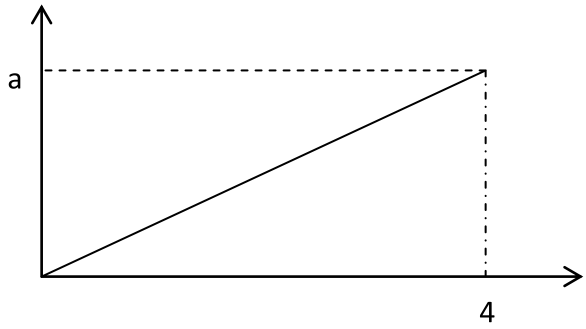
אחוזונים :

האחוזון ה- P הוא ערך (נסמן אותו : x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P. כלומר :

$$\boxed{p(X \le x_p) = p}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

בשרטוט שלפניכם נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה X. X הינו זמן ההמתנה למענה קולי בדקות.



א. מצאו את ערכו של a.

ב. רשום את נוסחת פונקצית הצפיפות.

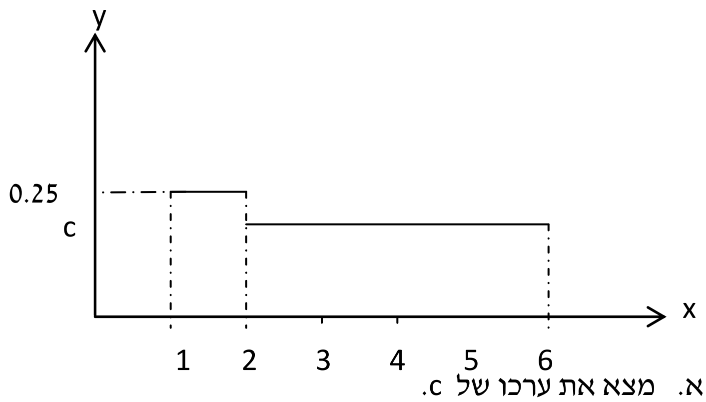
ג. חשבו את הסיכוי שזמן ההמתנה נמוך מ-2 דקות.

ד. בנו את פונקצית ההתפלגות המצטברת.

ה. מהו האחוזון ה-80 של ההתפלגות?

תרגילים:

1. X הינו משתנה רציף עם פונקצית צפיפות כמוצג בשרטוטו :



א. מצא את ערכו של c.

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבון את ההסתברויות הבאות :

1. $P(x<4)$
2. $P(x>1.5)$
3. $P(1.5<x<5)$
4. $P(5<x<10)$

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא :

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

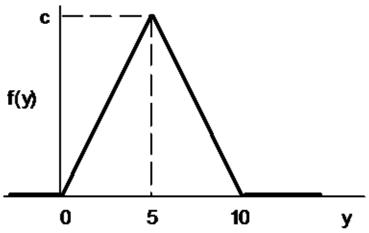
ידוע ש- $P(0 < X < 1) = 1/4$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5 ?

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y :



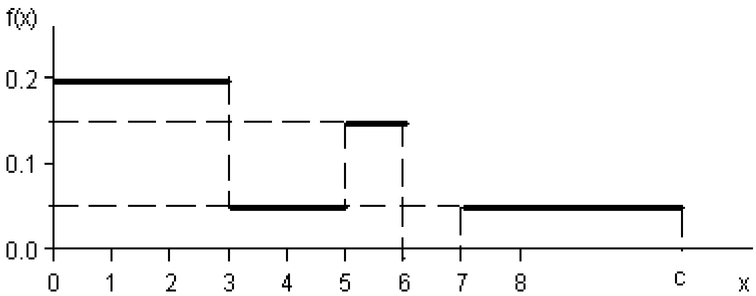
א. מצאו את c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

ג. חשבו את ההסתברויות : $P(Y=7.0)$, $P(Y \le 3.0)$, $P(7.5 \le Y \le 15.5)$ $P(Y>4)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון $y_{0.1}$, הרבעון התחתון $y_{0.25}$ והחציון של Y. הסיקו מהו העשירון עליון $y_{0.9}$.

4. נתונה פונקצית צפיפות של משתנה מקרי X :

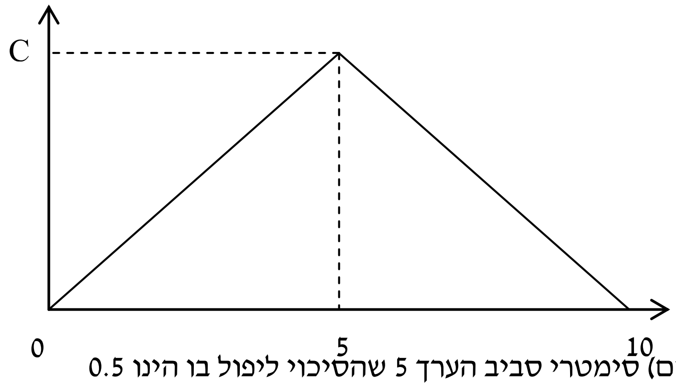


א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת .

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות : $P(X \ge 4)$, $P(X \ge -2.0)$, $P(1.0 < X \le 5.0)$

5. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה :



א. מה ערכו של C?

ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5

6. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה :

$$F(t)=1-e^{-0.2t}$$

א. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ב. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?

ג. מהו הזמן ש90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

פתרונות :

שאלה 1 :

1. א. $\frac{3}{16}$ ד. $3\frac{1}{3}$

שאלה 2 :

א. $b=2$ $c=0.5$

ב. 1.41

ג. 0.0625

שאלה 3

א. 0.2

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32

ד. העשירון התחתון : 2.24

הרבעון התחתון: 3.54

החציון : 5

העשירון העליון : 7.76

שאלה 4 :

א. 10

שאלה 5:

א. $C=0.2$ ב. 5 ± 1.46

שאלה 6 :

א. 0.0498

ב. 0.6321

ג. 115.13

פרק 28 - המשתנה המקרי הרציף- התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי , זמן תגובה וכו).
משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים.
נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות. באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב f(x).
השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.
פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

פונקציית התפלגות מצטברת:

$$\boxed{F(t) = p(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx}$$

כמו כן :

$$\boxed{p(X > t) = 1 - F(t)} \qquad \boxed{p(a < X < b) = F(b) - F(a)}$$

תוחלת של משתנה רציף :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x)dx = \mu}$$

שונות של משתנה רציף:

$$\boxed{V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x)dx - \mu^2 = \sigma^2}$$

תוחלת של פונקציה של X:

$$E\left(g(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

אחוזונים :

האחוזון ה- P הוא ערך (נסמן אותו : x_p) שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא P. כלומר :

$$\boxed{p(X \le x_p) = p}$$

ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים:

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקיי 2: $S_{triangle} = \frac{h \cdot a}{2}$

שטח מלבן: אורך(a) כפול רוחב (b): $S_{rectangle} = a \cdot b$

משוואת קו ישר:

y=mx+n

m = שיפוע.

n = נקודת החיתוך עם ציר הy.

שיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות: $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$: $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (X_1,Y_1) ושיפועו ידוע m:

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1 \qquad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c \qquad \int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c \qquad \int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c \qquad \int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

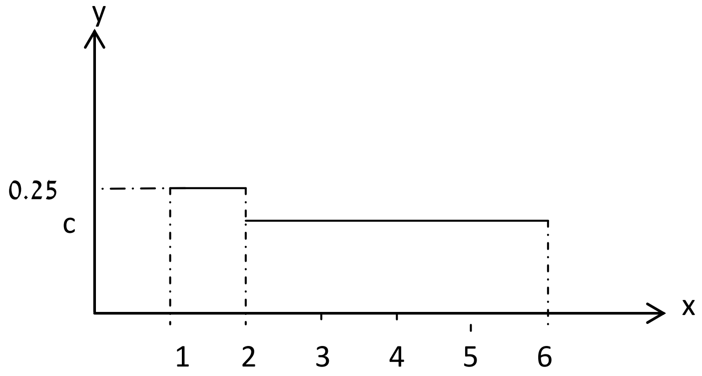
$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c \qquad \int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c \qquad \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

תרגילים:

1. X הינו משתנה רציף עם פונקצית צפיפות כמוצג בשרטוט:



א. מצא את ערכו של c.

ב. בנה את פונקצית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. $P(x<4)$
2. $P(x>1.5)$
3. $P(1.5<x<5)$
4. $P(5<x<10)$

ד. מצא את החציון של המשתנה.

2. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקצית הצפיפות שלו היא:

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

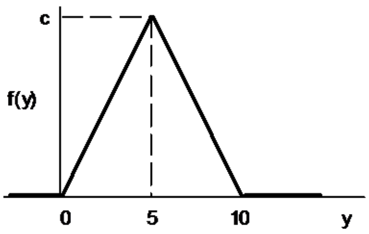
ידוע ש- $P(0<X<1)=1/4$.

א. מצאו במפורש את פונקצית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5 ?

3. נתונה פונקצית צפיפות של משתנה מקרי Y :



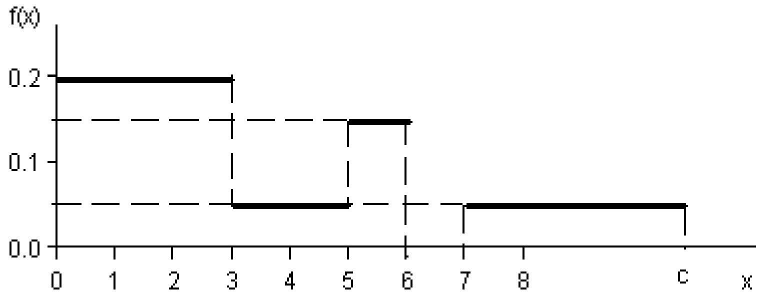
א. מצאו את c.

ב. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של Y .

ג. חשבו את ההסתברויות : $P(Y = 7.0)$, $P(Y \le 3.0)$, $P(7.5 \le Y \le 15.5)$ $P(Y>4)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון $y_{0.1}$, הרבעון התחתון $y_{0.25}$ והחציון של Y. הסיקו מהו העשירון עליון $y_{0.9}$.

4. נתונה פונקצית צפיפות של משתנה מקרי X :

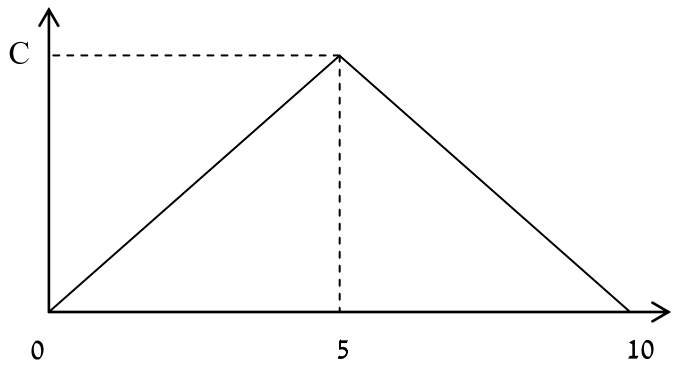


א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקצית צפיפות.

ב. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת .

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות : $P(X \ge 4)$, $P(X \ge -2.0)$, $P(1.0 < X \le 5.0)$

5. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה :



א. מה ערכו של C?

ב. מצא אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5 שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5

6. נתונה פונקצית צפיפות $f(X)=\frac{2}{x}$ פונקציה זו מוגדרת מ-1 ועד K.

א. מצא את ערכו של K.

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשב את הסיכוי ש X לפחות 1.5.

ד. מצא את העשירון התחתון של ההתפלגות.

ה. מה התוחלת של X?

7. נתונה פונקצית צפיפות הבאה : $f(X)=AX^2(10-X)$ $0<X<10$ A הינו קבוע חיובי.

א. מצא את A.

ב. חשב את $P(x>5\,|\,x>2)$.

ג. מה התוחלת ומהי השונות של X ?

8. פונקצית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X :

$$f(x) = 0.5 \cdot e^{2x}$$
$$-\infty \le X \le \ln(c)$$

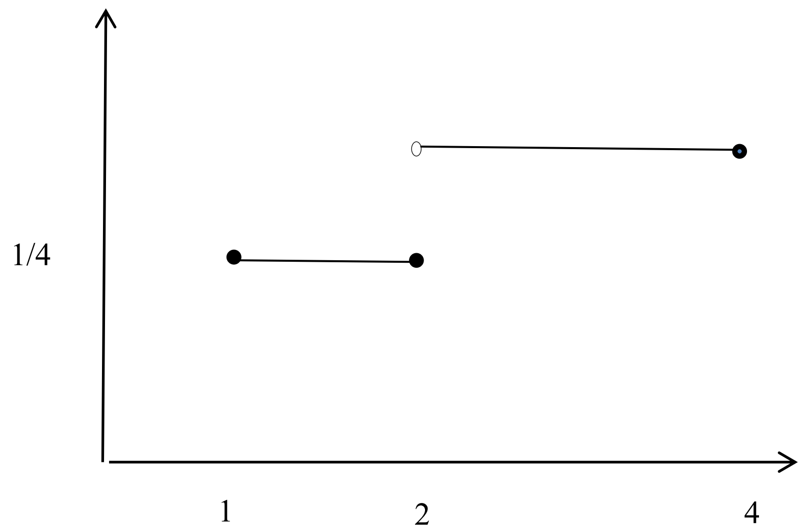
א. מצא את ערכו של c.

ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.

ג. חשב $P(X > 0)$.

ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X :



א. רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות .

ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. מצא את החציון של ההתפלגות.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה.

ה. חשב את $E(X^3)$

10. במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=6x(1-x) \qquad 0\le x\le 1$$

א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ 20 דקות?

ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?

ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ 20 דקות?

11. זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה:

$$F(t)=1-e^{-0.2t}$$

א. שרטט את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?

ד. מהו הזמן ש90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

12. פונקצית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f\,(x)=\begin{cases}0 & x<4\\ bx-4b & 4\le x\le 5\\ b & 5<x\le 6\\ 0 & x>6\end{cases}$$

א. מצאו את b.

ב. חשבו את התוחלת של X.

ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של Y?

13. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1\le x\le 2 \\ kx & 2<x\le 3 \end{cases}$$

א. מצאו את ערכו של K.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו $p(x>2.5)$

14. להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

$a\le x\le b$

א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.

ג. מצא את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

פתרונות :

שאלה 1 :

א. $\frac{3}{16}$ ד. $3\frac{1}{3}$

שאלה 2 :

א. b=2 c=0.5

ב. 1.41

ג. 0.0625

שאלה 3 :

א. 0.2

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32

ד. העשירון התחתון : 2.24

הרבעון התחתון: 3.54

החציון : 5

העשירון העליון : 7.76

שאלה 4 :

א. 10

שאלה 5:

א. C=0.2

ב. 5 ± 1.46

שאלה 6 :

א. $e^{\frac{1}{2}}$

ג. 0.189

ד. 1.051

ה. 1.297

שאלה 7 :

א. 0.0012

ב.0.7067

ג. תוחלת : 6, שונות : 4

שאלה 8 :

א. 2

ג. 0.75

ד. 0.549

שאלה 9 :

ג. $2\frac{2}{3}$

ד. תוחלת : 2.625 שונות : 0.6927

ה. 23.4375

שאלה 10 :

א. $\frac{7}{27}$

ב. 0

ג. 3.704

שאלה 11 :

ב. 0.0498

ג. 0.6321

ד. 11.51

שאלה 12 :

א. $\frac{2}{3}$

ב. 5.22

ג. $\frac{2}{9}$

שאלה 13:

א. $\frac{1}{6}$

ג. 0.229

שאלה 14 :

ב. תוחלת :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

השונות :

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

פרק 29 - התפלגויות רציפות מיוחדות- התפלגות מעריכית

רקע:

התפלגות זו היא התפלגות רציפה המאפיינת את הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים.

λ - הוא ממוצע מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן (אותו פרמטר מההתפלגות הפואסונית).

$X \sim \exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$

התפלגות זו צריכה להיות נתונה בתרגיל או שיאמר שמספר האירועים ביחידת זמן מתפלג פואסונית ואז הזמן עד התרחשות המאורע הבא מתפלג מעריכית.

פונקציית הצפיפות של ההתפלגות היא :

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ לכל $X \geq 0$

פונקציית ההתפלגות המצטברת היא :

$F(t) = p(x \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

התוחלת:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

השונות:

$$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- להתפלגות זו יש תכונת חוסר הזיכרון : $P(X > a + b \backslash X > a) = P(X > b)$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

אורך חיי סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 8 שעות.

א. מה ההסתברות שסוללה תחזיק מעמד פחות מ- 9 שעות?

ב. מה סטיית התקן של אורך חיי הסוללה?

ג. אם סוללה כבר חייה מעל שעתיים , מה הסיכוי שהיא תחייה מעל 7 שעות בסך הכולל?

תרגילים:

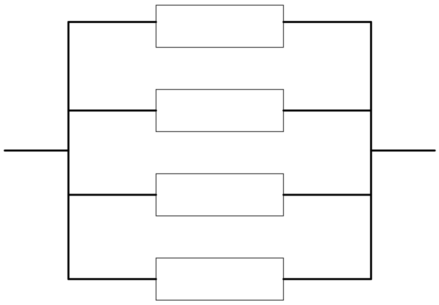
1. הזמן שלוקח במערכת עד שתקלה מתרחשת מתפלג מעריכית עם תוחלת של 0.5 שעה.
   א. מה הסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך יותר מ-0.5 שעה?
   ב. מה ההסתברות שהתקלה הבאה תתרחש תוך פחות משעה?
   ג. מצא את הזמן החציוני להתרחשות תקלה במערכת.

2. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
   א. מהי סטית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
   ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
   ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

3. משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
   א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
   ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
   ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ- 10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
   ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

4. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
   א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ- 20 דקות?
   ב. אם שולה המתינה יותר מרבע שעה לחולה הבא . מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
   ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

5. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט :



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.
אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100שעות.

א. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ב. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.
מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

פתרונות:

שאלה 1 :

א. 0.368

ב. 0.865

ג. 0.347

שאלה 2:

א. 24 שעות

ב. 0.632

ג. 0.135

שאלה 3:

א. 0.393

ב. 0.239

ג. 0.513

ד.69.08

שאלה 4:

א. 0.264

ב. 0.368

ג. 0.233

שאלה 5:

א. 0.8403

ב. A0.0588>K

פרק 30 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות אחידה

רקע:

זו התפלגות שפונקציית הצפיפות שלה קבועה בין a לבין b.

X~U (a,b)

פונקציית הציפות :

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

$a \le x \le b$

פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=\frac{t-a}{b-a}$$

התוחלת :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

השונות:

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמה : (הפתרון בהקלטה)

X-משתנה מקרי רציף המתפלג באופן אחיד בין 20 ל- 40 .

א. מה הסיכוי ש- X קטן מ-25?

ב. מה התוחלת והשונות של X?

תרגילים:

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X, מתפלג $U(13, 16)$.

א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?

ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ- 15 דקות?

ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות . אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.

א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?

ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות , מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ- 8 דקות?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3. מכונה אוטומטית ממלאת גביעי גלידה. משקל הגלידה לגביע מתפלג אחיד בין 100-110 גרם (המשקל הוא של גלידה ללא הגביע).

א. מה ההסתברות שמשקל הגלידה בגביע יהיה מעל 108 גרם?

ב. נתון שהגלידה בגביע עם משקל נמוך מ-107 גרם. מה ההסתברות שמשקל הגלידה יהיה מעל 105 גרם?

ג. מה העשירון העליון של משקל הגלידה בגביע?

פתרונות:

שאלה 1:

א. תוחלת: 14.5

שונות: 0.866

ב. 1/3

ג. 2/3

שאלה 2:

א. $X \sim U(0,10)$

ב. 0.6

ג. 10

שאלה 3:

א. 0.2

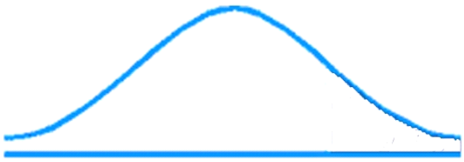
ב. $\frac{2}{7}$

ג. 109

פרק 31 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד.
פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

נוסחת פונקציית הצפיפות:
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטים שמתחת לעקומה.
כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.
התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות Z.

$Z \sim N(0,1^2)$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.
לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :

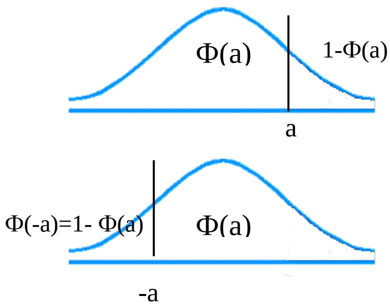
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

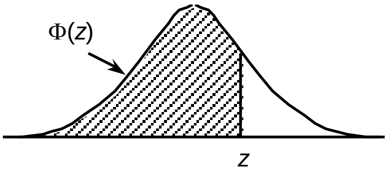
$$Z \sim N(0, 1^2)$$

שימוש בטבלה

P



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

<u>דוגמה</u> : (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?

ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?

ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?

ד. מהו המשקל ש90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
   א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ.?
   ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
   ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
   ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
   ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות .
   א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
   ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
   ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
   ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג .
   א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
   ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
   ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
   ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
   ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל – 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.
   א. מצאו את העשירון העליון.
   ב. מצאו את האחוזון ה95.
   ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטיליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225 .

א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטיליגנציה?

ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?

ד. מהו האחוזון ה- 20?

ה. מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.

א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?

ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?

ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?

7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.

א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?

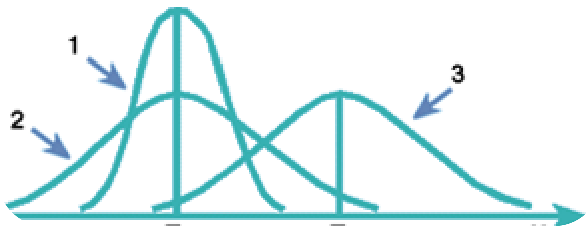
ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?

ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?

ד. מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?

ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל בינהן.



א.לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

א. בעשירון העליון.

ב. בממוצע.

ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00 . מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה . מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב . ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976 .

א. מה ערכו של T?

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?

11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.

א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?

ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?

ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?

ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

שאלה 1

א. 89.25%

ב. 2.28%

ג. 0

ד. 50%

שאלה 3

א. 26.43%

ב. 89.44%

ג. 39.44%

ד. 0.383

ה. 100%

שאלה 5

א. 119.2

ב. 80.8

ג. 112.6

ד. 87.4

שאלה 7

א. 500

ב. 100

ג. 0.3446

ד. 733

ה. 267

שאלה 8

א. 3

ב. בממוצע.

ג. 1

שאלה 9

א. 0.1587

ב. 0.0228

ג. 0.8563

ד. 0.3975

שאלה 10

א. 1925

ב. 0.2266

ג. 0.1587

שאלה 11

א. 0.1359

ב. 0.675

ג. 100

ד. 0.25

<u>פרק 32 - טרנספורמציה על משתנה מקרי רציף</u>

<u>רקע:</u>

מדובר על מצב שידועה לנו התפלגות של משתנה מקרי רציף כלשהו ואז יוצרים משתנה מקרי חדש שהוא פונקציה של המשתנה המקרי הידוע.

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

נתון משתנה מקרי רציף : X המתפלג אחיד בין 0 ל-1 . מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה Y. כאשר הקשר בין X ל-Y נתון על ידי הנוסחה : $Y = e^X$.

תרגילים:

1. יהי W משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת השווה ל- 1.
הגדירו משתנה חדש $Y = e^{-W}$.
א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.
ב. זהה את Y כהתפלגות מיוחדת וקבע מהם הפרמטרים .

2. נתון ש : $X \sim U(0,1)$. יוצרים דרך X משתנה חדש המוגדר להיות: $R = X^2$. מצאו את פונקציית הצפיפות של המשתנה החדש R.

3. ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda)$ כמו כן נתון הקשר הבא : $Y = \ln(X)$. הוכח שפונקציית הצפיפות של Y נתונה על ידי הנוסחה הבאה : $f(Y) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot e^Y + 1}$.

4. ידוע ש- $X \sim \exp(\lambda = 1)$ כמו כן נתון הקשר הבא : $Y = 1 - 2 \cdot e^{-X}$.
א. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.
ב. זהה את ההתפלגות של Y .

5. אורך מקצוע של קובייה מתפלג אחיד בין 1 ל-2. מצא את פונקציית הצפיפות של נפח הקובייה.

6. נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F_X(t) = \theta^t - 1$ עבור התחום $0 \le t \le 1$.
א. מצא את ערכו של הפרמטר θ.
ב. מצא את פונקציית הצפיפות של המשתנה X.
ג. יהי $Y = 2^X - 1$. מצא את פונקציית הצפיפות של Y וזהה את התפלגותו.

פתרונות:

שאלה 1:

ב. $Y \sim U(0,1)$

שאלה 2:

$$f(R)=\frac{1}{2\sqrt{R}}$$ כאשר $0<R<1$

שאלה 4:

$Y \sim U(-1,1)$

שאלה 5:

$$f(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$ כאשר $1<y<8$

שאלה 6:

א. 2

ג. $Y \sim U(0,1)$

פרק 33 - פונקציה יוצרת מומנטים

רקע:

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי כלשהו מוגדרת להיות : $M_X(t)=E(e^{tx})$.

אם מדובר במשתנה מקרי בדיד . פונקציית יוצרת המומנטים תהיה :

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_k e^{tk}\cdot P(X=k)$$

אם מדובר במשתנה מקרי רציף. פונקציית יוצרת המומנטים תהיה :

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_x e^{tx}\cdot f(x)\,dx$$

המומנט מסדר n מוגדר להיות : $E(X^n)$

מומנט מסדר n של משתנה מקרי X מתקבל מהנגזרת החית לפי t של פונקציית יוצרת המומנטים $M_X(t)$ בנקודה שבה t=0 . כלומר: $M_x^{(n)}(t)|_{t=0}=E(X^n)$

משפט : קיימת התאמה חד חד ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.

תזכורת מתמטית לנגזרות:

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

$$(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$$

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$$

$$(e^x)'=e^x$$

$$(\log_a{}^x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$$

$$(k)'=0$$

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$ כלל שרשרת

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

הראו שפונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות המעריכית $X \sim \exp(\lambda)$

היא : $\frac{\lambda}{\lambda - t}$.

מצאו את המומנט הראשון והמומנט השני של ההתפלגות.

תרגילים:

1. נתונה פונקציה ההסתברות הבאה למשתנה מקרי בדיד.

X	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים.

ב. מצאו את התוחלת על סמך סעיף א.

2. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של התפלגות הבינומית $X \sim B(n, p)$ ומצאו את המומנט הראשון והשני של הפונקציה.

3. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של ההתפלגות הגיאומטרית $X \sim G(P)$ וחשבו את תוחלת של ההתפלגות מתוך פונקציית יוצרת המומנטים.

4. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של התפלגות הפואסונית $x \sim p(\lambda)$. מצאו את המומנט הראשון והשני של ההתפלגות

5. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & 0 \le x \le 7 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את ערכו של A.

ב. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של X.

6. יהי X משתנה מקרי עם תוחלת 5 ושונות 16. יהי $m_x(t)$ פונקציית יוצרת המומנטים של X.

Y הינו משתנה מקרי עם פונקציית יוצרת מומנטים $m_y(t)$.

ונתון $m_y(t) = t \cdot m_x(t)$

חשבו את התוחלת והשונות של y.

פתרונות:

שאלה 1:

ב. $1\frac{2}{3}$

שאלה 2:

פונקציית יוצרת מומנטים : $\left(e^t \bullet p + 1 - p\right)^n$

שאלה 3:

פונקציית יוצרת מומנטים : $\frac{e^t p}{1 - e^t \bullet (1-p)}$

שאלה 4:

פונקציית יוצרת המומנטים : $e^{\lambda(e^t - 1)}$

שאלה 5 :

א. $\frac{1}{1-e^{-7}}$

שאלה 6:

תוחלת : 1 שונות : 9

נספח:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_X(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$	$F_x(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$	$F_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	$f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n,p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים : p ההסתברות להצלחה $1-p=q$ ההסתברות לכשלון x : מספר ההצלחות	$\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ $x=0,1,...,n$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$	$\left[pe^t+q\right]^n$
גיאומטרי $G(p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x: מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	pq^{x-1} $x=1,2,...,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	x: מספר ההופעות בילידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,...,\infty$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

פרק 34 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד חד- ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה ליניארית על פונקציית יוצרת מומנטים: $M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_X(at)$
- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:

$$M_{X+Y}(t)=E\left(e^{tx}\right)\cdot E\left(e^{ty}\right)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$$

תזכורת:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_X(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)} & a\le t\le b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$	$F_x(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t<b\end{cases}$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$	$F_x(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$	$f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

משתנה מקרי	משמעות	$P_X(x)$	$E(x)$	$Var(x)$	$M_X(t)$
בינומי $Bin(n,p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: p ההסתברות להצלחה $1-p=q$ ההסתברות לכשלון x: מספר ההצלחות	$\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ $x=0,1,\dots,n$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot q$	$\left[pe^t+q\right]^n$
גיאומטרי $G(p)$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. x: מספר ניסיונות עד הצלחה ראשונה	pq^{x-1} $x=1,2,\dots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
פואסוני $Pois(\lambda)$	x: מספר ההופעות בילידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0,1,\dots,\infty$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון: $X \sim P(\lambda = 4)$

$Y \sim P(\lambda = 2)$

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של 5X-3 ?

ב. נגדיר את T=X+Y . מה ההתפלגות של T?

<u>תרגילים:</u>

1. נתון ש $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצא את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^{n} X_i$

ב. הוכח ש $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\cdot\lambda)$

2. נתון : $X \sim P(\lambda=10)$

$Y \sim P(\lambda=2)$

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

נגדיר את T=X+Y

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. הוכיחו ש $T \sim P(\lambda=12)$

ג. הוכיחו ש $X / T=8 \sim B(8,\frac{5}{6})$ כלומר , ההתפלגות של X בהינתן שT=8 היא בינומית

עם הפרמטרים n=8 ו- $p=\frac{5}{6}$.

3. יהי $X_i \sim \exp(1)$ $i=1,2...n$ והמשתנים הם בלתי תלויים. נגדיר את $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T.

ג. יהי $Z=\frac{T-E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z.

4. נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$M_X(T)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ לכל t

כאשר: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

א. הוכח שאם Y=2X אזי $Y\sim N(2\mu,4\sigma^2)$

ב. הוכח שאם $T=X_1+X_2$ ו-X_1 ו-X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות נורמלית אז מתקיים ש: $T\sim N(2\mu,2\sigma^2)$

פרק 35- משתנה דו מימדי בדיד - פונקצית הסתברות משותפת

רקע:

התפלגות דו ממדית הינה התפלגות שדנה בשני משתנים.

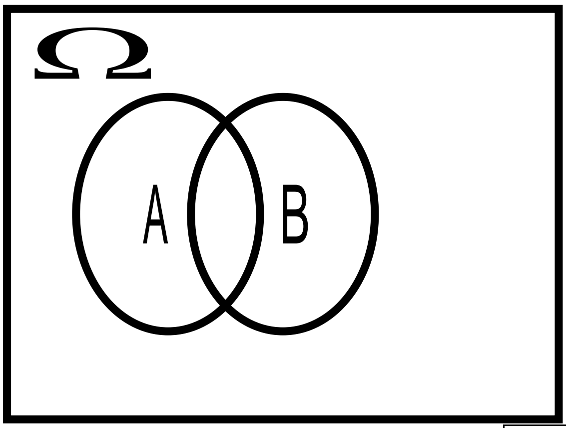
נרצה כעת לבנות פונקציית הסתברות דו ממדית.

בפונקציה שכזו יש התפלגות של שני משתנים בו זמנית : X ו Y .

דוגמה:

תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.
הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75
יהי X- מספר הקורסים שהסטודנט עבר.
יהי Y- משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.

בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו Y .



נחשב את כל ההסתברויות המשותפות :

$$p(x=o, y=0)=0.05$$
$$p(x=o, y=1)=0$$
$$p(x=1, y=0)=0.15$$
$$p(x=1, y=1)=0.05$$
$$p(x=2, y=0)=0$$
$$p(x=2, y=1)=0.75$$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.05	0.15	0
1	0	0.05	0.75

שימו לב שסכום כל ההסתברויות בפונקציית ההסתברות המשותפת הוא 1.

כעת נסכם את השורות ואת העמודות ונקבל את פונקציות הסתברות שוליות:

$Y \backslash X$	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

משתנים בלתי תלויים:

X ו Y יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל X ו- Y אפשריים התקיים הדבר הבא:

$$\boxed{p(x=k, y=l) = p(x=k)\cdot p(y=l)}$$

מספיק פעם אחת שהמשתנים אינם מקיימים תנאי זה אזי הם תלויים.

למשל, בדוגמה הזאת:

$$p(x=2, y=1) = 0.75 \neq p(x=2)\cdot p(y=1) = 0.75\cdot 0.8 = 0.6$$

ככלל אם יש אפס בתוך פונקציית ההסתברות המשותפת ניתן להבין באופן מידי שהמשתנים תלויים. שאז הרי התנאי לא מתקיים.

אך אם אין אפס בטבלה אין זה אומר שהמשתנים בלתי תלויים ויש לבדוק זאת.

תרגילים :

1. אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר . הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 03 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר . אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר , אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ – 3 משחקים. נגדיר את X להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת Y מספר המשחקים שהאדם שיחק.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת והשוליות.

ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?

ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר , מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים ששיחק?

2. להלן פונקצית ההסתברות המשותפת והשוליות של שני משתנים מקריים בדידים :

Y\X	0	1	2	P (Y)
2		0.08	0.12	0.4
3	0.1	0.05		
4				0.45
$P(X)$		0.4	0.2	

א. השלם את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. האם X ו- Y תלויים ?

ג. מצא את הסתברות ש-Y=3 , אם ידוע ש- X=1 .

3. מפעל משווק מוצר הנארז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא 1/10. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקורת איכות. יהיו: X– מספר המוצרים בחבילה, Y– מספר המוצרים הפגומים בחבילה.

א. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו 3.

ב. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.

ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.

ד. בנה את פונקצית ההסתברות המשותפת.

4. מתוך כד עם שלושה כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שני כדורים **ללא החזרה**. נגדיר: X - המספר הקטן מבין השניים; Y– המספר הגדול מבין השניים.

א. חשבו את ההתפלגות של (X, Y).

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמספר המקסימאלי 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y = 4$. מצאו $E(X / Y = 4)$.

5. ביישוב שני סניפי בנק. סניף פועלים וסניף לאומי. להלן הנתונים לגבי האוכלוסייה הבוגרת המתגוררת ביישוב:

ל-60% יש חשבון בסניף פועלים של היישוב.

ל-50% יש חשבון בסניף לאומי של היישוב.

ל-95% יש חשבון בלפחות אחד מהסניפים.

יהי X- מספר הסניפים בישוב אשר לתושב בוגר יש בהם חשבון.

יהי Y- משתנה אינדיקטור:

1- אם יש לתושב חשבון בסניף פועלים.

0- אחרת.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.

ב. הוסיפו את פונקציית ההסתברות השולית.

ג. ידוע שלתושב בוגר חשבון בבנק פועלים, מה ההסתברות שיש לו חשבון בנק בסניף אחד בלבד?

פתרונות:

שאלה 1:

ב. 2.4

ג. התוחלת 1.348 השונות 0.575

שאלה 2:

ב. תלויים

ג. 0.125

שאלה 4:

ב. 0.5

ג. תוחלת 2

שאלה 5:

ג. 0.75

פרק 36 - משתנה דו מימדי בדיד - מתאם בין משתנים

רקע:

נרצה לבדוק את מידת ההתאמה הלינארית בין שני המשתנים .
על ידי מקדם המתאם הלינארי שמסומן ב - ρ .
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.

-1 0 1

מקדם מתאם1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה : $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי (מקדם מתאם 1-).

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

חישוב מקדם המתאם :

הנוסחה של מקדם המתאם היא : $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

השונות המשותפת:

$$\operatorname{cov}(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)$$

תכונות של השונות המשותפת :

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
2. $\operatorname{cov}(X,X) = Var(X)$

משתנים בלתי מתואמים :

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.
משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שכלל אין בינם התאמה לינארית.
משתנים בלתי תלויים הם משתנים שאין בינם קשר ולכן הם גם בלתי מתואמים , אך משתנים בלתי מתואמים אינם בהכרח בלתי תלויים.

השפעת טרנספורמצייה לינארית על מקדם המתאם

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right]=\begin{cases}\rho(X,Y)\_\_\_if\_\_a\cdot c>0\\-\rho(X,Y)\_\_if\_\_a\cdot c<0\end{cases}$$

כלומר , טרנספורמציה לינארית על שני משתנים לא משנה את עוצמת הקשר בינם היא עלולה לשנות רק את כיוון הקשר.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)
נחזור לדוגמה שהוצגה בפרק הקודם :
תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.
הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75
יהי X- מספר הקורסים שהסטודנט עבר.
יהי Y- משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.
נחשב את מקדם המתאם :

$Y \backslash X$	0	1	2	P_Y
0	0.05	0.15	0	0.2
1	0	0.05	0.75	0.8
P_X	0.05	0.2	0.75	1

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

$$E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\mu=0*0.05+1*0.2+2*0.75=1.7$$
$$V(X)=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x_i^2 P(x_i)-\mu^2=0^2*0.05+1^2*0.2+2^2*0.75-1.7^2=0.31=\sigma^2$$
$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.31}=0.557$$

y	P_Y
0	0.2
1	0.8

$$E(y)=\sum_i y_i P(y_i)=0+0.8=0.8$$
$$V(y)=\sum_i (y_i-\mu_y)^2 P(y_i)=\sum_i y_i^2 P(y_i)-\mu_y{}^2=0+0.8-0.8^2=0.16=\sigma_y{}^2$$
$$\sigma_y=\sqrt{0.16}=0.4$$

$$E(xy)=0\cdot0\cdot0.05+0\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot0.15+1\cdot1\cdot0.05+2\cdot0\cdot0+2\cdot1\cdot0.75=1.55$$

$$\operatorname{cov}(x,y)=E(x\cdot y)-E(x)\cdot E(y)=1.55-1.7\cdot0.8=0.19$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{0.19}{0.557\cdot0.4}=0.853$$

כל קורס שהסטודנט מסיים מזכה אותו ב- 3 נקודות אקדמאיות.

מה יהיה מקדם המתאם בין נקודות הזכות שיצבור למשתנה Y? ?

תרגילים:

1. הסיכוי שסטודנט יעבור את מועד א בסטטיסטיקה הוא 0.8. אם הוא נכשל במועד א' הוא ניגש למועד ב' שם הסיכוי לעבור את המבחן מוערך להיות 0.9 (סטודנט שעובר את א' לא ניגש לב'). במידה והסטודנט נכשל במועד ב' הוא מגיש בקשה למועד ג' אותה מאשרים בסיכוי של 0.2. ואז הסיכוי שלו לעבור את מועד ג' הוא 0.7.

נגדיר את X להיות מספר המבחנים אליהם ניגש הסטודנט.

נגדיר את Y להיות מספר הנבחנים שנכשל בהם.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונ' ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים הינם בלתי תלויים?

ג. ידוע שהסטודנט ניגש ליותר ממבחן אחד, מה ההסתברות שהוא נכשל בפחות משלושה מבחנים?

ד. האם המתאם בין X ל-Y מלא או חלקי? חיובי או שלילי? הסבר ללא חישוב.

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X לבין Y.

ו. האם המשתנים הם בלתי מתאומים?

2. מטילים מטבע שלוש פעמים . נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל-Y . האם המשתנים מתואמים?

ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים ?

ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?

3. מפזרים שלושה כדורים שונים בשלושה תאים.

נגדיר את המשתנים הבאים :

X= מספר הכדורים בתא הראשון.

Y= מספר הכדורים בתא השני.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.

ב. האם המשתנים בלתי מתואמים?

4. מטילים קובייה הוגנת פעמיים.

יהי: X= ההטלה הגדולה מבין שתי התוצאות

Y= מס' ההטלות בהן יצאה תוצאה זוגית.

א. מצא את פונקצית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

ב. חשבו את מקדם המתאם של X ו-Y.

ג. מצאו את ההתפלגות של Y בהינתן ש- X=2.

5. בבניין בן 5 דירות. דירות מספר אחת ושלוש הן דירות משופצות והשאר אינן. הוחלט לבחור שתי דירות באקראי מבין הדירות בבניין. נגדיר את המשתנים הבאים:

X- מספר הדירות המשופצות שנבחרו.

Y- מספר הדירות האי זוגיות שנדגמו.

א. בנו את פונקצית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השולית.

ב. האם המשתנים מתואמים?

ג. מה מקדם המתאם בין X לבין Y?

ד. מה יהיה מקדם המתאם:

1. בין מספר הדירות המשופצות למספר הדירות הזוגיות שנדגמו.

2. בין מספר הדירות הזוגיות לדירות האי זוגיות שנדגמו.

ה. כל דירה משופצת עולה 2 מיליון שקלים, כל דירה לא משופצת עולה 1.5 מיליון שקלים. מה המתאם בין עלות הדירות שנדגמו למספר הדירות הזוגיות?

פתרונות :

שאלה 1 :

ג . 0.994

ה . 0.963

שאלה 2 :

ב. תלויים.

ג. מקדם המתאם : 0.5. מתואמים

ד. 0.25

ה. 0.5

שאלה 3:

ב. מתואמים

שאלה 4 :

ב. 0.252

שאלה 5:

ב. X ו-Y מתואמים.

ג. $\frac{2}{3}$

ד.1. $-\frac{2}{3}$

ד.2. (-1)

ה. $-\frac{2}{3}$

פרק 37 - המשתנה המקרי הדו ממדי - קומבינציות לנאריות

רקע:

תוחלת ושונות של סכום משתנים :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot COV\left(X,Y\right)$$

תוחלת ושונות של הפרש משתנים :

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\cdot COV\left(X,Y\right)$$

קומבינציות ליניאריות:

יוצרים משתנה חדש שהוא קומבינציה ליניארית של שני משתנים אחרים :

$$W=(aX+b)+(cY+d)$$

$$COV\left[\left(aX+b\right),\left(cY+d\right)\right]=a\cdot c\cdot COV\left(X,Y\right)$$

$$E(W)=E\left((aX+b)+(cY+d)\right)=aE\left(X\right)+b+cE\left(Y\right)+d$$
$$V(W)=V\left((aX+b)+(cY+d)\right)=a^2V\left(X\right)+c^2V\left(Y\right)+2\cdot a\cdot c\cdot COV\left(X,Y\right)$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

עבור שני משתנים מקריים נתון :

$$\mu_X=80$$
$$\sigma_X=15$$
$$\mu_Y=70$$
$$\sigma_Y=20$$
$$C0V(X,Y)=200$$

- מצא את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.
- מצא את התוחלת והשונות של Y-X.
- מצא את השונות ומה התוחלת של המשתנה $W=2X+3Y$

תרגילים:

1. נתונה פונקצית ההסתברות המשותפת הבאה:

Y\X	1	2	3	P(Y)
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
P(X)				

א. השלם את ההסתברויות החסרות.

ב. האם המשתנים תלויים?

ג. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ד. חשב את השונות המשותפת.

ה. חשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

ו. חשב את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

2. מבחן בנוי מחלק כמותי וחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק הכמותי היא 100 עם סטיית תקן 20. תוחלת הציונים בחלק המילולי 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין הציון הכמותי לציון המילולי הוא 0.8.

א. חשבו את השונות המשותפת בין הציון הכמותי לציון המילולי.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של סכום הציונים בחלק הכמותי ובחלק המילולי.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של הפרש הציונים בין החלק הכמותי לחלק המילולי.

ד. עלות הבחינה 2000 שקלים. הוחלט לזכות שקל עבור כל נקודה שנצברה בחלק המילולי ושני שקלים עבור כל נקודה שנצברה בחלק הכמותי. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הבחינה נטו (העלות לאחר הזיכוי)?

3. נתון: $Var(X-2Y)=2$. $Var(X+2Y)=3$. חשבו: $Cov(X,Y)$.

4. מטילים קובייה n פעמים.

נגדיר את המשתנים הבאים:

X=מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6.

Y=מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5

בטאו את השונות המשותפת באמצעות n.

פתרונות :

שאלה 1:

ב. תלויים

ג. מתואמים.

ד. ‎-0.1

ה. תוחלת : 4.4, שונות : 0.84

ו. תוחלת : ‎-0.4, שונות : 1.24

שאלה 2:

א. 240

ב. תוחלת : 190 שונות : 1105

ג. תוחלת : 10 שונות : 145

ד. תוחלת : 1710 שונות : 2785

שאלה 3:

‎-0.125

שאלה 4

$$\frac{-n}{36}$$

פרק 38 - משתנה דו ממדי בדיד – שאלות מסכמות

רקע:

משתנים בלתי תלויים:

X ו Y יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל X ו- Y אפשריים מתקיים :

$$\boxed{p(x=k, y=l) = p(x=k)\cdot p(y=l)}$$

מקדם המתאם :

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

השונות המשותפת:

$$\operatorname{cov}(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)$$

תכונות של השונות המשותפת :

3. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
4. $\operatorname{cov}(X,X) = Var(X)$
5. $COV\left[(aX+b),(cY+d)\right] = a\cdot c\cdot COV(X,Y)$

משתנים בלתי מתואמים :

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השונות המשותפת צריכה להתאפס.

השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם

$$\rho\left[(aX+b),(cY+d)\right] = \begin{cases} \rho(X,Y)\_\_\_if\_\_a\cdot c>0 \\ -\rho(X,Y)\_\_if\_\_a\cdot c<0 \end{cases}$$

תוחלת ושונות של סכום משתנים :

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\cdot COV(X,Y)$$

קומבינציות לינאריות: $W = (aX+b)+(cY+d)$

$$E(W) = E\big((aX+b)+(cY+d)\big) = aE(X)+b+cE(Y)+d$$
$$V(W) = V\big((aX+b)+(cY+d)\big) = a^2V(X)+c^2V(Y)+2\cdot a\cdot c\cdot COV(X,Y)$$

תרגילים :

1. יש ליצור סיסמא בת 3 תווים . כל תו יכול להיבחר רק מתוך כלל התווים הבאים : 1 2 C B A.
יהי X מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בסיסמא. יהי Y מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בקצות הסיסמא (ראשון או האחרון).
   א. זהו את ההתפלגויות השוליות של X ו-Y כהתפלגויות מיוחדות.
   ב. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X ושל Y.
   ג. מצאו את מקדם המתאם בין X ל-Y.
   ד. מהו המתאם בין $2X$ ל- $3Y+5$?

2. במסיבת סוף שנה ישנו ארגז קרח ובתוכו 7 בקבוקי בירה : 4 "מכבי" , 2 "גולדסטאר" ו- 1 "טובורג" . קרן לקחה 3 בקבוקי בירה באקראי מתוך ארגז הקרח.

   נסמן ב- X את מספר בקבוקי "מכבי " שנלקחו על ידי קרן.

   נסמן ב-Y את מספר בקבוקי "טובורג" שנלקחו על ידי קרן.
   א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ושל Y.
   ב. חשבו את התוחלת והשונות של X ושל Y .
   ג. מצאו את השונות המשותפת של X ושל Y.
   ד. נגדיר את W – מספר בקבוקי ה"גולדסטאר" שנלקחו על ידי קרן. בטאו את W באמצעות X ו- Y וחשבו את התוחלת והשונות של W על סמך התוצאות שהתקבלו בשני הסעיפים הקודמים בלבד.
   ה. מהו מקדם המתאם בין מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן למספר בקבוקים שאינם "מכבי" שנלקחו על ידי קרן?

3. במגירה 6 זוגות נעלים . יהודה הוציא מהמגירה 4 נעלים (לא בהכרח זוגות) באקראי. נסמן את W– מספר זוגות הנעליים שהוציא יהודה. נסמן את R - מספר הנעליים השמאליות שהוציא יהודה.
   א. מצא את ההתפלגות המשותפת של המשתנים שהוצגו .
   ב. האם המשתנים שהוצגו בלתי תלויים?
   ג. מצא את התפלגות מספר הנעליים השמאליות שהוצאו אם בסך הכול הוצא זוג נעלים יחיד על ידי יהודה.
   ד. אם ידוע שהוצאו לפחות 3 נעליים שמאליות מה הסיכוי שהוצא לכל היותר זוג אחד?

4. בכד 5 כדורים כחולים , 4 כדורים לבנים ו- 3 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי וללא החזרה 3 כדורים. נגדיר את המשתנים הבאים :

X- משתנה המקבל את הערך 1 אם נבחר לפחות כדור אחד כחול ו-0 אחרת.

Y – מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.

א. חשב את $P(X=1)$.

ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y .

ג. מה התוחלת של Y אם ידוע שלא הוצאו כדורים כחולים?

ד. מה השונות של X אם ידוע שהוצאו לכל היותר כדור לבן אחד?

5. ביום ההולדת 4 של טל הוא מחלק שלושה פרסים שונים באקראי ל- 5 ילדים. בכל פעם שטל מחלק פרס הוא בוחר באקראי ילד מתוך ה- 5 באופן אקראי ובלתי תלוי לבחירות הקודמות. נגדיר את המשתנים הבאים :

X- מספר הפרסים שקיבלה יוליה.

Y- מספר הילדים שלא קיבלו פרס.

א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של X ו- Y.

ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי מתואמים?

ג. מצאו את התוחלת של $X\cdot Y^2$.

ד. מה מקדם המתאם בין מספר הפרסים שקיבלה יוליה למספר הילדים שקיבלו פרס?

6. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות . נמקו.

א. אם שני משתנים הם מתואמים אזי הם תלויים.

ב. אם שני משתנים הם תלויים אזי הם מתואמים.

ג. אם שני משתנים הם בלתי תלויים אזי הם בלתי מתואמים .

ד. אם שני משתנים הם בלתי מתואמים אזי הם בלתי תלויים.

7. במקום עבודה 50 עובדים מתוכם 25 גברים ו- 25 נשים. כל עובד נתבקש לבחור מתנה לחג. לכל עובד מוצגות 5 אופציות , מתוכן הוא צריך לבחור אחת. העובדים בוחרים מתנה באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה.

נסמן X_i - מספר הגברים שבחרו במתנה i.

נסמן Y_i - מספר הנשים שבחרו במתנה i.

א. האם X_1 ו- Y_1 הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.

ב. האם X_1 ו- X_2 הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.

ג. מהי ההתפלגות של X_1+X_2 ?

ד. האם המתאם בין X_1 ו- X_2 מלא או חלקי ? חיובי או שלילי? אין צורך לחשב רק להסביר.

8. הוכח את הזהות הבאה עבור שלושת המשתנים :

$COV(X+Y,Z)=COV(X,Z)+\mathrm{COV}(Y,Z)$.

9. מספר העלים שנושרים בסתיו מהעץ בגינה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 50 עלים בדקה.

נסמן Y - מספר העלים שנושרים בסתיו בין 12:00 ל- 12:10 .

נסמן Q - מספר העלים שנושרים בין 12:05 ל- 12:30 .

א. חשבו את $COV(4Y,Q+6)$.

ב. מה המתאם בין Y ל- Q?

10. בסל 20 כדורים אדומים , 20 כדורים ירוקים ו- 20 כחולים. מוציאים באקראי מהסל 20 כדורים. מצאו את מקדם המתאם בין מספר הכדורים האדומים שהוצאו למספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

11. נתון ש : $Y\sim B(1,p)$ כאשר $0<p<1$ הוכח שאם מתקיים :

$P(X=x\,|\,Y=0)=P(X=x\,|\,Y=1)$ לכל X , אזי X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים.

12. נתון ש $X\sim B(n,p)$ ו- $Y\sim B(m,p)$ והם בלתי תלויים זה בזה. הוכח שמתקיים

$X\,|\,\mathrm{X+Y=k}\sim \mathrm{HG(n+m,n,k)}$.

פתרונות :

שאלה 1 :

א. $Y \sim B(2,\frac{1}{5})$ $X \sim B(3,\frac{1}{5})$

ב.

Y \ X	0	1	2	3	P_Y
0	$\frac{64}{125}$	$\frac{16}{125}$	0	0	$\frac{80}{125}$
1	0	$\frac{32}{125}$	$\frac{8}{125}$	0	$\frac{40}{125}$
2	0	0	$\frac{4}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{5}{125}$
P_X	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

ג. 0.816

ד. 0.816

שאלה 2 :

א.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	P_Y
0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{20}{35}$
1	$\frac{1}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{15}{35}$
P_X	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

ב. $V(Y)=\frac{12}{49}$ $E(Y)=\frac{3}{7}$ $V(X)=\frac{24}{49}$ $E(X)=\frac{12}{7}$

ג. $-\frac{8}{49}$

ד. $V(W)=\frac{20}{49}$ $E(W)=\frac{6}{7}$

ה. ‎-1

שאלה 3:

א.

$R \backslash W$	0	1	2	P_R
0	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
1	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
2	$\frac{90}{495}$	$\frac{120}{495}$	$\frac{15}{495}$	$\frac{225}{495}$
3	$\frac{60}{495}$	$\frac{60}{495}$	0	$\frac{120}{495}$
4	$\frac{15}{495}$	0	0	$\frac{15}{495}$
P_W	$\frac{240}{495}$	$\frac{240}{495}$	$\frac{15}{495}$	1

ב. המשתנים תלויים.

ד. 1

שאלה 4 :

א. $\frac{185}{220}$

ג. 1.714

ד. 0.071

שאלה 5:

ב. X ו-Y בלתי מתואמים.

ג. 4.128

ד. 0

<u>שאלה 6 :</u>

א. נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

<u>שאלה 7 :</u>

א. בלתי תלויים

ב. תלויים

ד. חלקי ושלילי.

<u>שאלה 8 :</u>

הוכחה

<u>שאלה 9:</u>

א.1000

ב. 0.316

<u>שאלה 10 :</u>

-0.5

<u>שאלה 11 :</u>

הוכחה

<u>שאלה 12 :</u>

הוכחה

פרק 39 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית

רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית מתפלגת נורמאלית בעצמה.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, כמו כן הגובה של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.

מה הסיכוי שגבר אקראי מהמדינה יהיה גבוה מאישה אקראית? (0.7823)

תרגילים:

1. המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
כמו כן המשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?

2. ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪ . ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?

3. צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?

4. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?

5. לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמאלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמאלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נימכר ב- 2 ₪ וליטר חלב עזה נימכר ב-3 ₪.
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ₪?
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל- 30 ליטר ?
ג. מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

<u>פתרונות:</u>

<u>שאלה 1</u>

0.2177

<u>שאלה 2</u>

א. תוחלת 7000, סטיית תקן 2247.

ב. 0.3264

ג. 9881

<u>שאלה 3</u>

א. תוחלת 300, שונות 576.

ב. 0.3372

ג. 294

<u>שאלה 4</u>

א. תוחלת 3000 מ״ל וסטיית תקן 40 מ״ל.

ב. 0.0062

פרק 40 - התפלגות לוג נורמלית

רקע:

נניח שלמשתנה Y ישנה התפלגות נורמלית , כלומר : $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$. נגדיר כעת את $X = e^Y$.

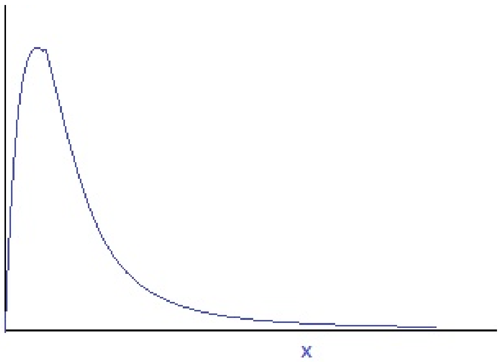
X הינו משתנה המתפלג לוג נורמלית. הסיבה שקוראים להתפלגות באופן כזה היא ש $\ln(X) = Y$ מתפלג נורמלית.

תחום ההגדרה של Y הינו $(-\infty,\infty)$ לעומת זאת תחום ההגדרה של X הינו $(0,\infty)$.

נסמן את ההתפלגות של X באופן הבא : $\mathrm{X} \sim \mathrm{LOGN}(\mu,\sigma^2)$.

בהתפלגות זו מתקיימים הקשרים הבאים:

$$E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \qquad V(X) = (e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$$



דוגמה : (פתרון בהקלטה)

$\mathrm{X} \sim \mathrm{LOGN}(10, 2^2)$

מצא את האחוזון התשעים של ההתפלגות.

תרגילים:

1. נתון ש : $X \sim LOGN(0,1^2)$.

א. מהי ההתפלגות של $\ln(X)=Y$?

ב. מהו החציון של X?

ג. חשב את $P(X>e)$

2. נתון שהשכר במשק מסוים מתפלג לוג נורמלית התוחלת של השכר היא 10 יחידות כסף עם שונות

2 נתבונן בהתפלגות ln השכר. כיצד מתפלגת ln של השכר ומה התוחלת והשונות שלו?

3. הוכח שהחציון של $X \sim LOGN(\mu,\sigma^2)$ הינו e^{μ}.

4. נתון ש $X_i \sim LOGN(\mu,\sigma^2)$ לכל $i=1,2,\dots,n$ כמו כן ידוע שהתצפיות הן בלתי תלויות זו בזו. הוכח $\prod_{i=1}^{n} X_i \sim LOGN(n\mu, n\sigma^2)$.

5. אורך חיים של מכשיר מתפלג לוג נורמלית עם תוחלת של 6 שנים וסטיית תקן של 1.5 שנים.

א. מצא את העשירון העליון של אורך חיי המכשיר.

ב. מה ההסתברות שהמכשיר יחיה יותר מ-3 שנים?

6. שפנים מתרבים פי X_i בכול חודש נתון ש- X_i מתפלג לוג נורמלית כאשר

$V(X_i)=e(e-1)$ $\quad E(X_i)=\sqrt{e}$. מה ההסתברות שכעבור שנה כמות השפנים גדלה פי 20?

פתרונות:

שאלה 1:

א. התפלגות נורמלית סטנדרטית

ב. 1

ג. 0.1587

שאלה 2:

$$N(\mu = \frac{1}{2}\ln(\frac{100}{1.02}), \sigma^2 = \ln(1.02))$$

שאלה 3:

הוכחה

שאלה 4:

הוכחה

שאלה 5:

א. 7.98

ב. 0.9963

שאלה 6:

0.1949

פרק 41 - סטטיסטיקה תיאורית - הקדמה

רקע:

בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת.
הקבוצה יכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי.
בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים.
למשל , בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.

בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

דוגמה :

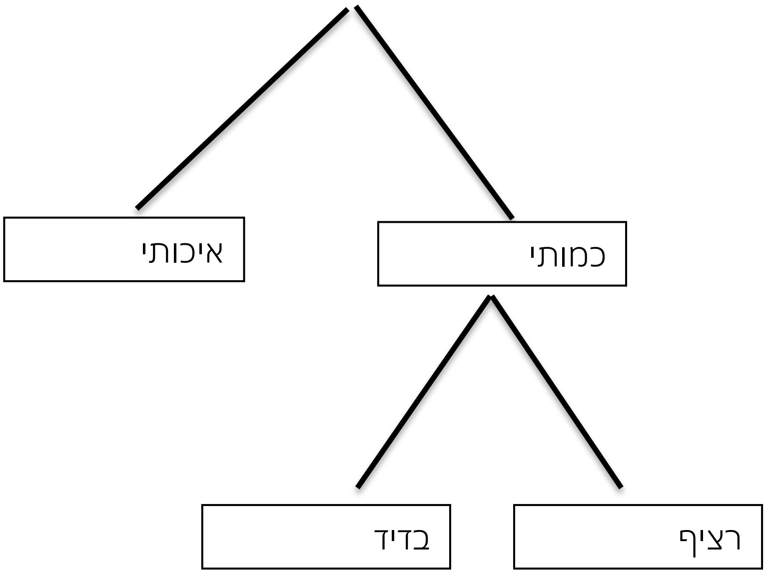
בתיק מניות 10 מניות . מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

מי הקבוצה הנחקרת?

מה גודל הקבוצה?

מה המשתנה הנחקר?

<u>סוגי משתנים:</u>



<u>משתנה איכותי</u> הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות , אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.

כמו : מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..)
מין האדם (זכר, נקבה)
מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

<u>משתנה כמותי</u> הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו : גובה אדם בס״מ, ציון בבחינה וכדומה.
את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים :

<u>משתנה בדיד</u> : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים .כמו : מספר ילדים למשפחה (1,2,3..)
ציון בבחינה (מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1)
הערה :

<u>משתנה רציף</u> : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים , הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים .
כמו : גובה בס״מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס״מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס״מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס״מ הוא גם גובה אפשרי)
משקל בק״ג , מהירות בקמ״ש וכולי.

תרגילים:

1. סווג את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:
   א. מספר הדירות בבניין.
   ב. גיל אדם בשנים.
   ג. אחוז האבטלה בעיר.
   ד. מקצוע לימוד מועדף.

2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".
   בחברה 200 עובדים.

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

   א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
   ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?

3. לפניכם רשימה של משתנים כמותיים. ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.
   א. שכר עובד בש"ח.
   ב. ציון בחינת בגרות.
   ג. תוצאה בהטלת קובייה.
   ד. מהירות ריצה בתחרות.
   ה. שיעור התמיכה בממשלה.

פרק 42 - סטטיסטיקה תיאורית - סיווג משתנים וסולמות מדידה

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם .
בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת. באותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה.
משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים : דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה.
חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה :

מיון משתנים לפי סולמות המדידה :

1. **סולם שמי** (נומינאלי)– משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות לדוגמה : מצב משפחתי רווק/נשוי/אלמן/גרוש ; אזור מגורים.
משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.

2. **סולם סדר (אורדינאלי)** – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל ,דרגה בצבא.

3. **סולם רווחים (אינטרוולי)** – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים.
למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

4. **סולם מנה/יחס** – משתנה שלערכיו בנוסף לשם , לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים.
למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג.
הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס.
בסולם מנה האפס הוא מוחלט , אבסולוטי, ומייצג אין.

סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים :

משתנה איכותי הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות , אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.

כמו : מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..)

מין האדם (זכר, נקבה)

מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

משתנה כמותי הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו : גובה אדם בס״מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים :

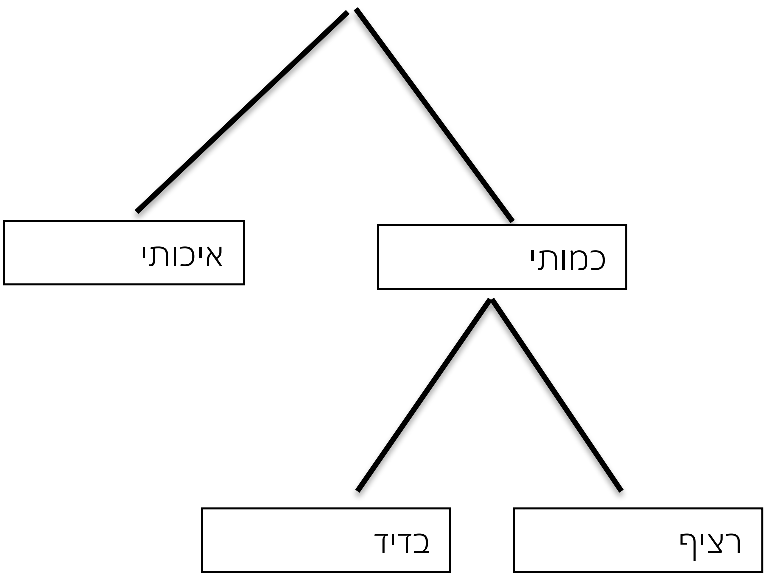
משתנה בדיד : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים .כמו : מספר ילדים למשפחה (1,2,3..)

ציון בבחינה (מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1)

משתנה רציף : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים , הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים .

כמו : גובה בס״מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס״מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס״מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (16.233 ס״מ הוא גם גובה אפשרי)

משקל בק״ג , מהירות בקמ״ש וכולי.



תרגילים:

1. לפניכם רשימה של משתנים :
   א. גובה אדם בס"מ.
   ב. מספר ילדים למשפחה.
   ג. מידת חרדה לפני מבחן .
   ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ 1 עד 7 (1 כלל לא מרוצה עד 7 מרוצה מאד)
   ה. השכלה .
   ו. מספר אוטובוס.
   ז. מקום מגורים.
   ח. מין (1=גבר ו-2=אישה).
   ט. מידת נעליים.

ציינו באיזה סולם מדידה המשתנה הנחקר (שמי , סדר, רווחים או מנה)

2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".
   בחברה 200 עובדים.

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

   א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
   ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי ? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
   באיזה סולם מדידה המשתנה?

3. לפניכם רשימה של משתנים כמותיים . ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.
   א. שכר עובד בש"ח.
   ב. ציון בחינת בגרות.
   ג. תוצאה בהטלת קובייה.
   ד. מהירות ריצה בתחרות.
   ה. שיעור התמיכה בממשלה.

<u>פרק 43 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציות על סולמות מדידה</u>

<u>רקע:</u>

טרנספורמציה הינו מצב שבו עושים שינוי לערכים במשתנה הנחקר.

להלן נפרט אילו טרנספורמציות מותרות על כל סולם מדידה.

1. **סולם שמי** (נומינאלי)–

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמצייה ששומרת על הזהות.

2. **סולם סדר (אורדינאלי)** –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הסדר.

3. **סולם רווחים (אינטרוולי)** –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה לינארית חיובית.

4. **סולם מנה/יחס** –

הטרנספורמציה המותרת היא הכפלה / חילוק במספר חיובי.

תרגילים:

1. ציינו באילו סולמות מדידה מותרות הטרנספורמציות הבאות:
   א. הכפלה באפס.
   ב. הכפלה ב 2.
   ג. הכפלה במינוס 1.
   ד. הוספה של 3.
   ה. הפחתה של 3.

בשאלות הבאות בחר בתשובה הנכונה ביותר:

2. איזו טרנספורמציה שומרת על סולם המשתנה "הטמפרטורה בחדר הסגלגל"?
   א. טרנספורמציה שומרת סדר.
   ב. טרנספורמציה לינארית חיובית.
   ג. טרנספורמציה שומרת יחס.
   ד. תשובות ב ו- ג נכונות.

3. באיזה סולם/ות מדידה מותרת החסרה של קבוע מכל מספר?
   א. בסולם שמי בלבד.
   ב. בסולמות שמי וסדר בלבד.
   ג. בסולמות שמי, סדר ורווחים בלבד.
   ד. בכל ארבעת סולמות המדידה.

4. איזו טרנספורמציה שומרת על סולם מספרי האוטובוסים של "אגד"?
   א. טרנספורמציה שומרת סדר.
   ב. טרנספורמציה לינארית חיובית.
   ג. טרנספורמציה שומרת יחס.
   ד. כל התשובות נכונות.

<u>פתרונות:</u>

2. ד
3. ג
4. ד

פרק 44 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו :

א. **רשימה של תצפיות:**

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה.

רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה , יעיל שיש מספר מועט של תצפיות.

ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים.

למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות :

3 4 3 5 4

ב. **טבלת שכיחויות בדידה** :

שם המשתנה - X	שכיחות – $f(X)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N}\times 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N}\times 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N}\times 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	f_k	$\frac{f_k}{N}\times 100$
סה"כ	$N=\sum_{i=1}^{k} f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות.

לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

למשל, להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

$\frac{f_i}{n}$	F_i	מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון -X
0.08=2/25	2	2	5
0.16=4/25	6	4	6
0.32=8/25	14	8	7
0.2=5/25	19	5	8
0.16=4/25	23	4	9
0.08=2/25	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות: F_i - השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שווות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי: $\frac{f_i}{n}$ - איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שווות לערך.

ג. **<u>טבלת שכיחויות במחלקות</u>**:

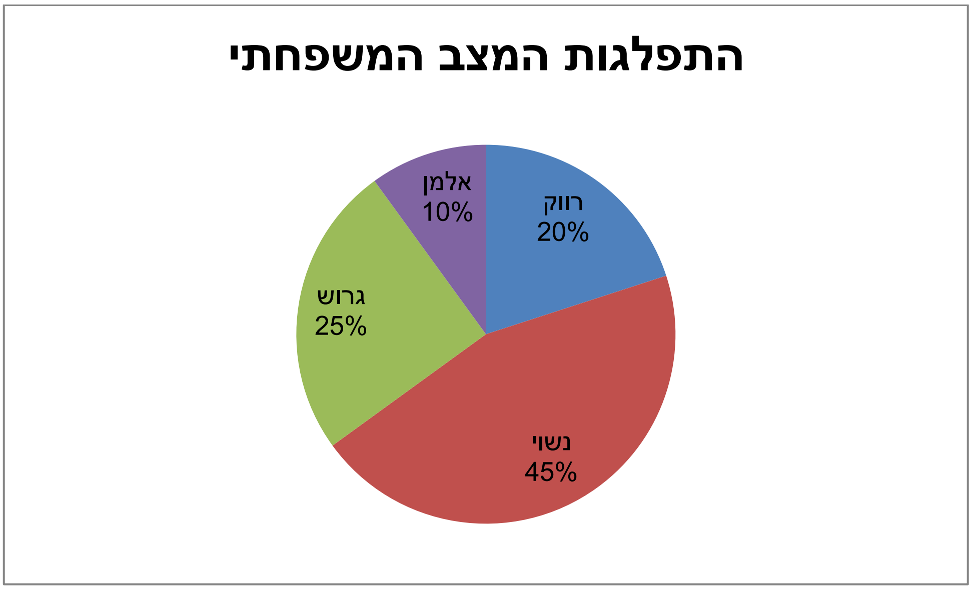
משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

למשל, נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

ד. **דיאגרמת עוגה**:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח" יחסי מהעוגה. הנתח בעוגה פרופורציוני לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



ה. **דיאגרמת מקלות**:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה הציר האנכי של השכיחות – הגובה של המקל מעיד על השכיחות .

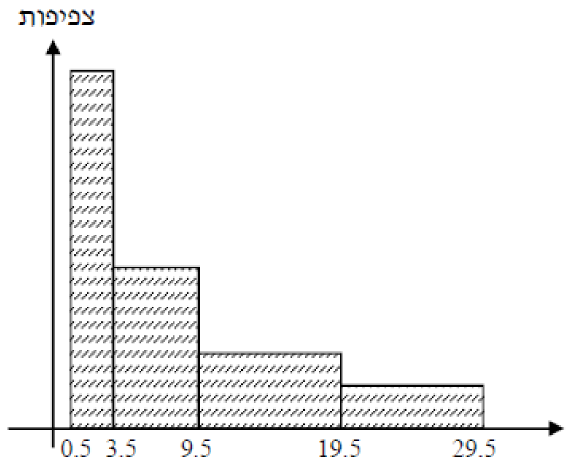
רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף .

כמו כן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

ו. **<u>היסטוגרמה</u>** :

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות.
רלבנטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה ציר האופקי הוא הציר של המשתנה וציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה.
אם המחלקות הן שוות ברוחב , ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

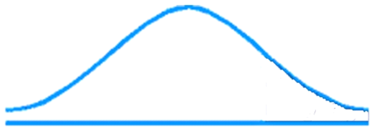
X	רוחב	אמצע	שכיחות	מצטברת	צפיפות
0.5 - 3.5	3	2	20	20	6.6667
3.5 - 9.5	6	6.5	18	38	3
9.5 - 19.5	10	14.5	14	52	1.4
19.5 - 29.5	10	24.5	8	60	0.8



<u>פוליגון- מצולעון</u> : אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

<u>צורות התפלגות נפוצות</u>

התפלגות סימטרית פעמונית- רוב התצפיות במרכז וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. למשל, ציוני IQ.



<u>ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות :</u>

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) –רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. למשל, שכר במשק.

התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית) רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. למשל , אורך חיים.

תרגילים:

1. בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו - 25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
   א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
   ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2. להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

המקצוע	מספר התלמידים
מתמטיקה	44
תנ"ך	20
אנגלית	12
היסטוריה	26

   א. מהו המשתנה הנחקר?
   ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3. להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

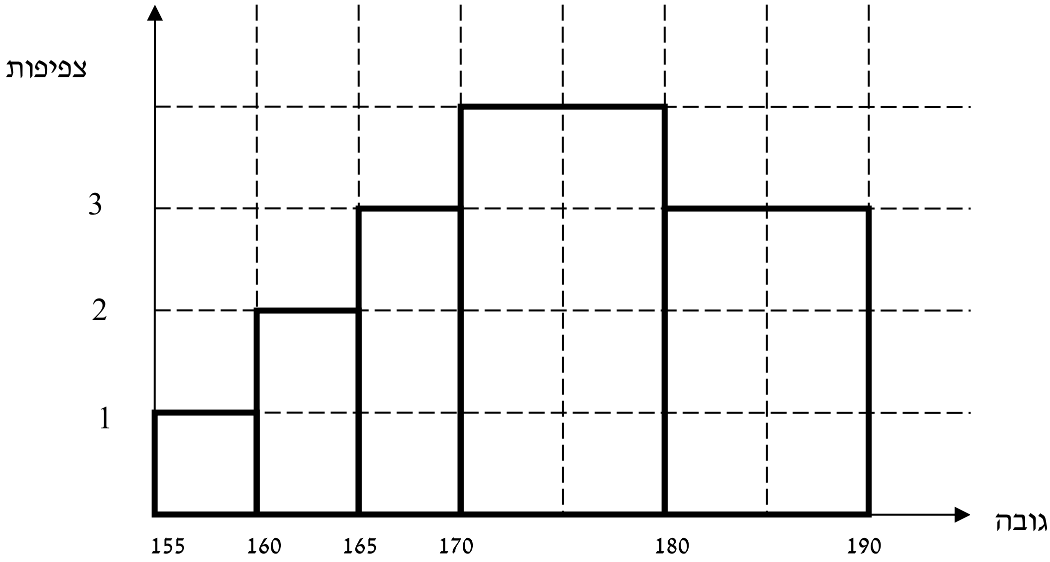
השכלה	מספר העובדים
נמוכה	60
תיכונית	120
אקדמאית	20

   א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?
   ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
   6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7

   א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
   ב. תאר את הרשימה בטבלת שכיחויות.
   ג. הוסף שכיחויות יחסיות לטבלה.
   ד. תאר את הנתונים באופן גרפי.

5. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסף שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסף את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

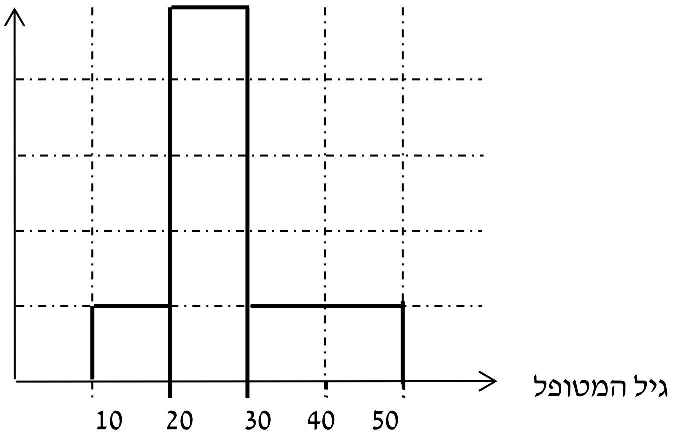
משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

א. תאר את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7. להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :

קנה מידה :

8 מטופלים=



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?

ב. מהי הקבוצה הנחקרת?

ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.

ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

פרק 45 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת.
לדוגמא משקל של בני אדם או משקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.
גבולות מדומים: כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים.
כשהגבולות מדומים ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.
רמת הדיוק חייבת להיות קבועה אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת.
בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמתיים.
כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמתיים?
לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2 את התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים.
אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)
להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח'.
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

X	f(x)
130-139	20
140-149	25
150-159	30
160-169	20
170-189	10

תרגילים:

1. להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים :

f(x)	X
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

2. להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת . יש לרשום את הנתונים בגבולות אמתיים.

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

פרק 46 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת כדי לרשום סכום של תצפיות:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

X_i	i
5	1
0	2
1	3
3	4
2	5

תרגילים:

1. בבניין 5 דירות, לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X) ומספר הנפשות החיות בדירה (Y).

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

חשבו:

$$\sum_{i=1}^{3} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{5} Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_i$$

$$(\sum_{i=1}^{4} X_i)^2$$

$$\sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i$$

$$\sum (X_i) \sum (Y_i)$$

2. נתון לוח ערכי המשתנים x_i ו y_i : כאשר $i=1,2,\ldots,6$:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	3	2	4	-2	1	4
y_i	2	0	0	1	-5	2

ונתונים הקבועים : $a=2$ $b=5$ חשבו את הנוסחאות הבאות :

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$

3. קבע לכל זהות אם היא נכונה :

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$

ג. $(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

4. נתון : $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$, $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$ חשב : $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$ (פתרון : 1160)

פרק 47 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – MODE

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

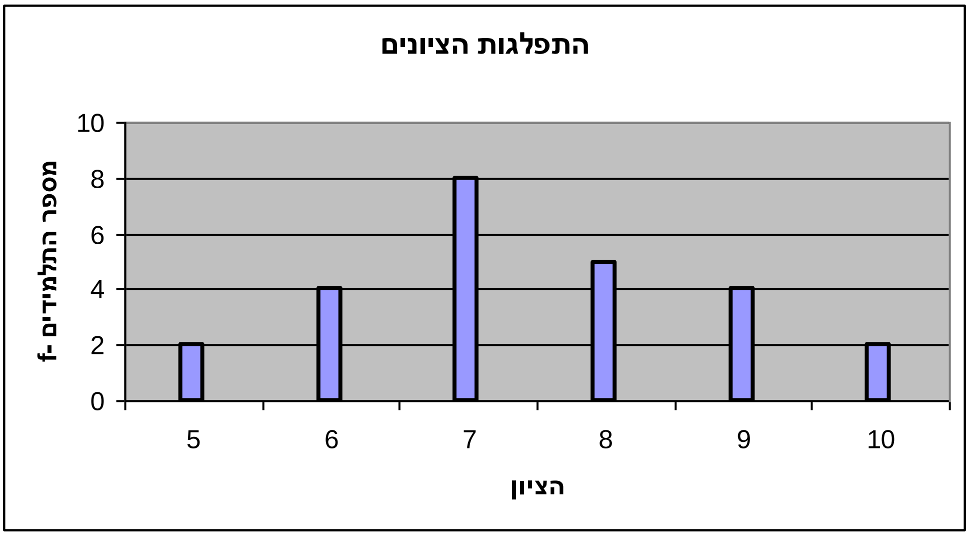
ברשימה : הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים .

7 9 4 8 4 10 6

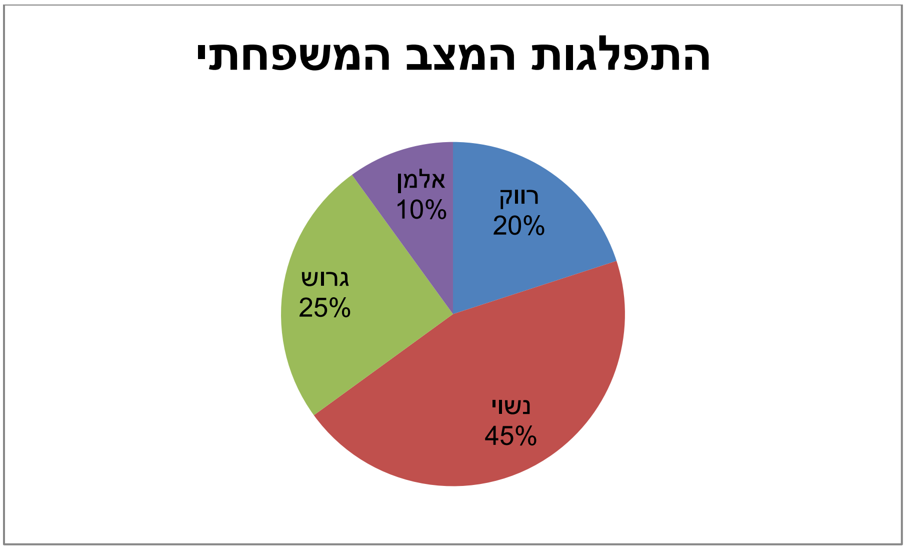
בטבלת שכיחויות בדידה : הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תכניות החיסכון	f(x)
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות : שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



<u>בעוגה</u> : הערך של הפלח הגדול ביותר.



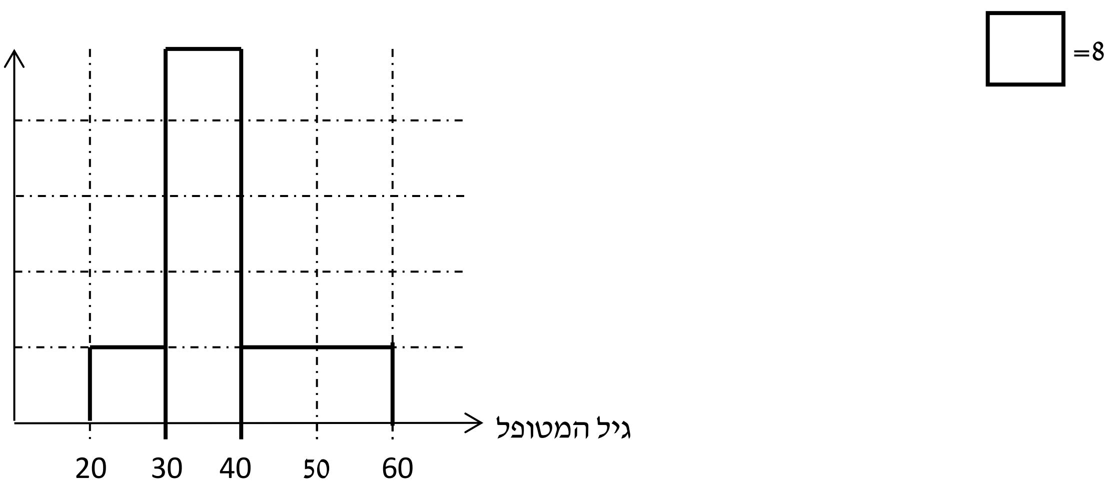
<u>בטבלת שכיחויות במחלקות</u> : אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.

התפלגות הציונים בכיתה.

f(x)	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

<u>בהיסטוגרמה</u> : שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :



כללי : יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

<u>אמצע תחום (טווח) – MIDRANGE</u>

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר.

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

<u>החציון - MEDIAN</u>

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו .

<u>ברשימה</u> : נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה : $\frac{n+1}{2}$

אם יש מספר זוגי של איברים החציון יהיה הממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$ והאיבר ה- $\frac{n}{2}+1$

כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה : $md = X_{\frac{n+1}{2}}$

ושיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה : $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

<u>בטבלת שכיחויות בדידה</u> : נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

<u>דיאגרמת מקלות</u> : נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

<u>בטבלת שכיחויות במחלקות</u> :

שלב א : נימצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב : נציב בנוסחה הבאה : $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 -גבול התחתון של המחלקה.

L_1 -גבול העליון של המחלקה.

<u>היסטוגרמה</u> : החציון הוא הערך על ציר ה-X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי : החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

<u>הממוצע:</u>

הנו מרכז הכובד של ההתפלגות.

<u>ברשימה</u> : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

<u>בטבלת שכיחויות</u> : $\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$

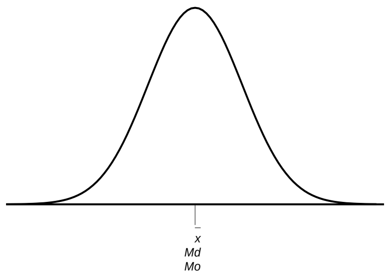
<u>במחלקות</u> : נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה X. הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

כללי : הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

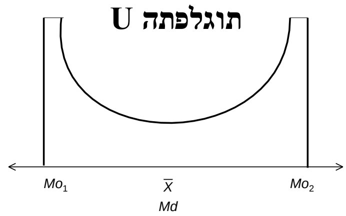
<u>מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:</u>

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה :

התפלגות סימטרית

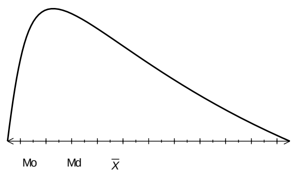


בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז :



בהתפלגות אסימטרית

התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7
חשב את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2. בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.
א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשב את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
ב. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

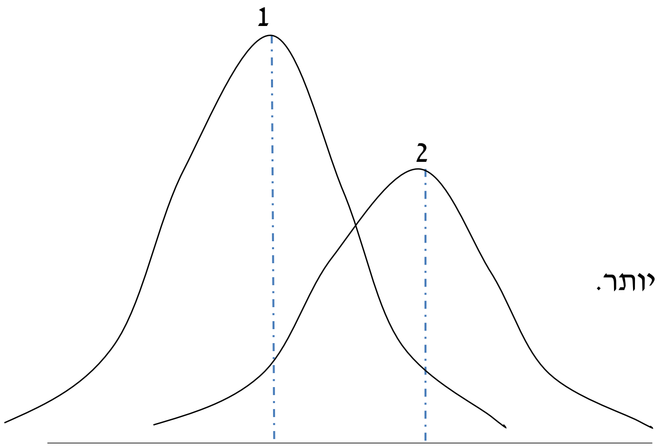
4. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

5. מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה.
בחר בתשובה הנכונה:



א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6. ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם, כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה) הסבירו ללא חישוב.

7. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

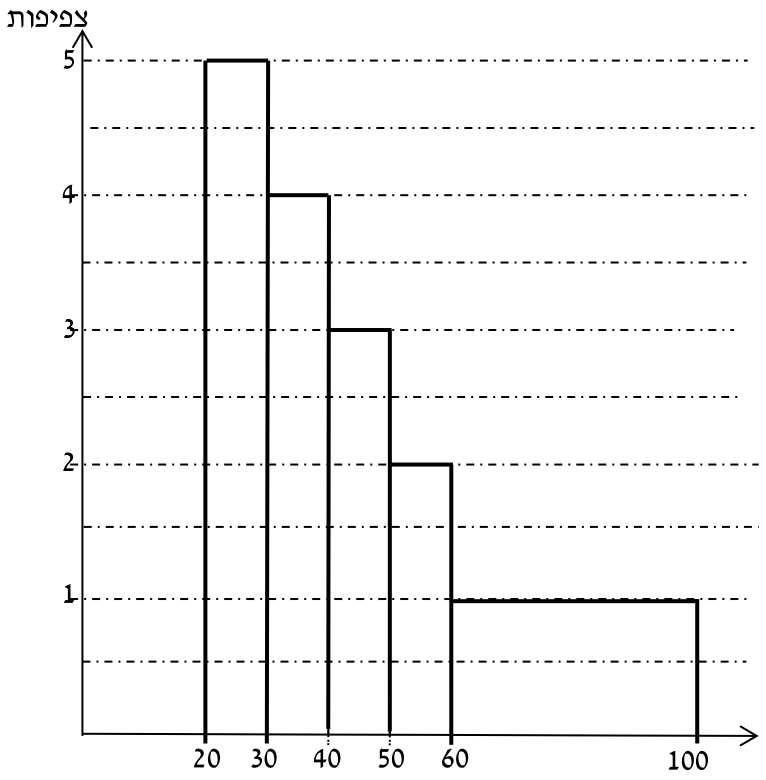
מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

8. להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.

שכיחות	גובה בס"מ
30	150-160
40	160-170
60	170-175
70	175-180
40	180-190

חשב את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

9. בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



א. מצא את השכיח בהתפלגות.

ב. מצא את החציון בהתפלגות.

ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן /שווה לחציון.

ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החיצון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

פתרונות:

שאלה 1:

החציון: 7

השכיח: 6

הממוצע: 6.9

שאלה 2:

א. 3

ב. שכיח: 3,4 חציון: 4

שאלה 3:

א. הממוצע: 1.7

החציון: 1.5

השכיח: 1

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

שאלה 4:

א. 630

ב. 34.13%

ג. שכיח וחציון: 3

ממוצע: 2.952

שאלה5:

תשובה: ב

שאלה 6 :

ב חציון: 2 שכיח: 2 אמצע טווח: 1.5

שאלה 7:

חציון וממוצע: 55

פרק 48 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן

רקע:

המטרה : למדוד את הפיזור של הנתונים כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח\תחום RANGE:

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר : $R = X_{\max} - X_{\min}$

שונות וסטיית תקן:

השונות היא ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים : $s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

דוגמה : נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה : 5,4,9

עבור טבלת שכיחויות: $s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44

הציון -X	השכיחות-f	$x^2 \cdot f$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		1430

$$s_x^2 = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$s = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7

חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

3. בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4. נתונה רשימה של 5 תצפיות , אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע:

2, 3, 2, -1 . חשב את השונות של חמש התצפיות.

5. בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

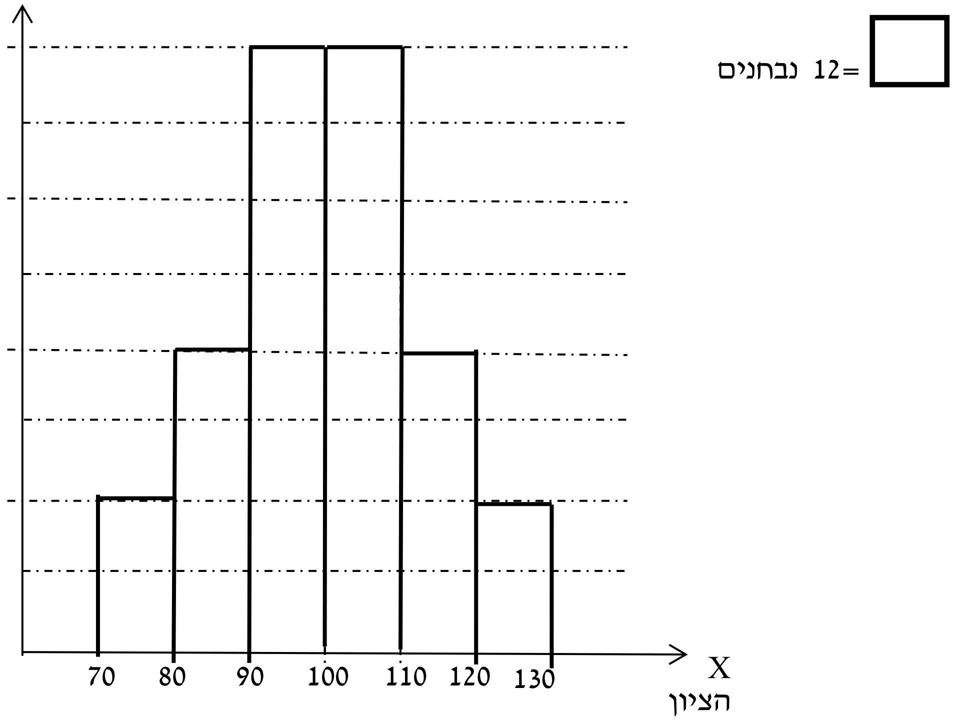
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג :

משקל	**מספר מקרים**
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

7. להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו- 100-110.
כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

פתרונות :

שאלה 1:

השונות : 2.19

סטיית תקן : 1.48

טווח : 6

שאלה 2:

א. סטיית תקן :1.106

ב. טווח 4

שאלה 3:

א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

שאלה 4:

10.8

שאלה 5:

א. 3.05

ב. 1.16

שאלה 6:

7.73

שאלה 7 :

א. 100

ב. 12.96

פרק 49 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור- טווח בין- רבעוני

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות :

מספר שנות ותק	$L_1 - L_0$ רוחב	f מספר עובדים (שכיחות)	F
$0.5 - 4.5$	4	56	56
$4.5 - 9.5$	5	50	106
$9.5 - 11.5$	2	48	154
$11.5 - 14.5$	3	36	190
$14.5 - 19.5$	5	10	200

שלב א : נימצא את הרבעון התחתון (האחוזון ה25) והרבעון העליון (האחוזון ה- 75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה : $\frac{n}{4}$

מיקום הרבעון העליון יהיה : $\frac{3n}{4}$

נוסחאות הרבעונים יהיו :

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0) \quad ; \quad Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

שלב ב : נחסר את הרבעונים :

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

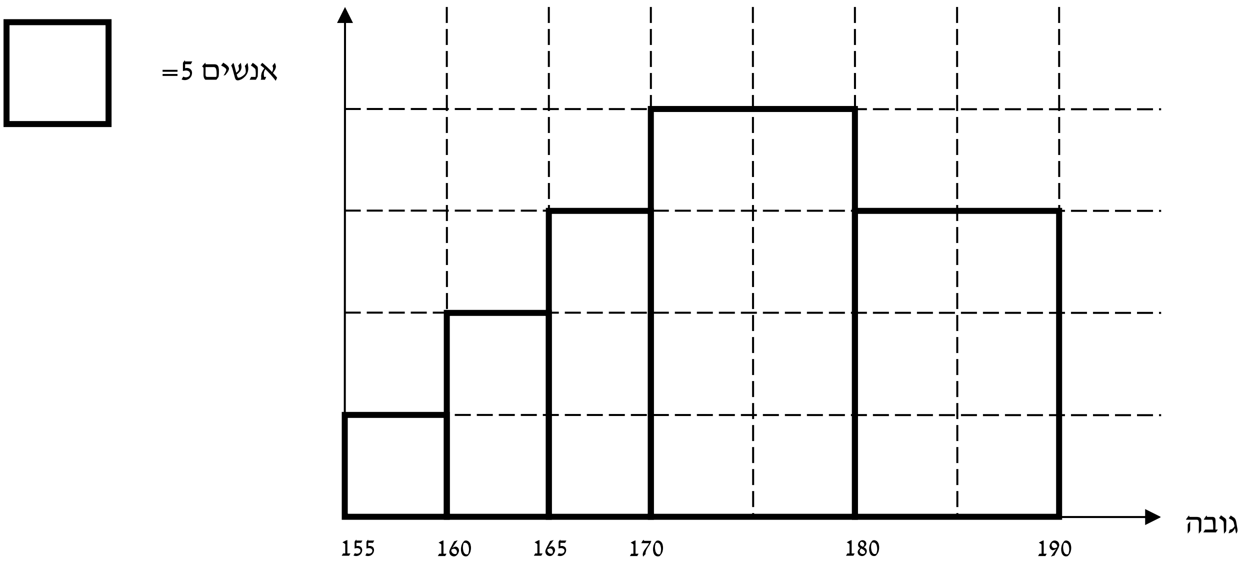
תרגילים:

1. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מצא את הטווח הבין-רבעוני.

2. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצא
את הטווח
הבין-
רבעוני.

פתרונות:

שאלה 1:

13.75

שאלה 2:

13.33

פרק 50 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון

רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן.

המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון.

הרעיון הוא למצוא בכמה בממוצע התצפיות סוטות בערכן המוחלט מהחציון.

כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות הנוסחה לחישוב המדד : $MAD=\frac{\sum_i |X_i-Md|}{n}$

אם מדובר בטבלת שכיחויות , הנוסחה לחישוב המדד : $MAD=\frac{\sum |X_i-Md|\cdot f(X)}{n}$

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור X את אמצע המחלקה.

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתונה רשימת המספרים הבאה : 3 6 7 8 2

מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

תרגילים:

1. נתונה רשימת המספרים הבאה : 3 5 6 9 12 8 . מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים :

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשב את החציון.

ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.

ג. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת היה משתנה אם 5 ממשפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

פתרונות:

שאלה 1 :

2.5

שאלה 2:

א. 1.5

ב. 1.14

ג. חציון לא ישתנה וממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

פרק 51 - סטטיסטיקה תיאורית - ממוצע משוקלל ושונות מצורפת

רקע:

מדובר על מצב שבו ישנן כמה קבוצות שרוצים לאחד אותן לקבוצה אחת גדולה.

מתעניינים בממוצע והשונות של הקבוצה הגדולה המתקבלת מאיחוד הקבוצות הקטנות.

$n_j =$ מס' התצפיות בקבוצת ה-j

j= אינדקס של הקבוצה.

N= מס' התצפיות בכל הקבוצות יחד (סכום כל ה n_j)

$\bar{x}_j =$ הממוצע בקבוצה ה- j

$S^2{}_j =$ השונות בקבוצה ה- j

הנוסחאות לממוצע משוקלל ושונות מצורפת:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j n_j}{N} \quad ; \quad N = \sum_{j=1}^{k} n_j \quad ; \quad s_c^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{N}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בחברה שני אגפים, אגף א' מונה עשרים עובדים, השכר הממוצע שם הוא 6,000 ₪ וסטיית התקן היא 2,000 ₪. באגף ב' עשרה עובדים השכר הממוצע הוא 12,000 ₪ וסטיית התקן היא 3,000 ₪.

מהו השכר הממוצע ומהי סטיית התקן של שכר העובדים בחברה?

תרגילים:

1. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשב את הממוצע המשוקלל בשכבה.

ב. חשב את השונות המצורפת בשכבה.

2. נתונות שתי קבוצות:

בקבוצה I פי שתים תצפיות מאשר בקבוצה II.

הממוצע בשתי הקבוצות הוא 70.

השונות בקבוצה I היא 100.

השונות בקבוצה II היא 400.

א. מצא את הממוצע של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

ב. מצא את סטיית התקן של התצפיות לאחר שאוחדו שתי הקבוצות לקבוצה אחת.

פתרונות:

שאלה 1	שאלה 2
א. 76.22	א. 70
ב. 173.5	ב. 14.14

פרק 52 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמות יחסית לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא : $Z = \dfrac{X - \bar{X}}{S}$

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע.

כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע.

ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.

ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.

ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במקום עבודה מסוים ממוצע המשכורות 8 אלפי ₪ עם סטית תקן של 2 אלפי ₪ באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים עם סטית תקן של 1.5 שנים.
ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערן יותר באופן יחסי משכיל או משתכר ?

תרגילים

1. תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו :

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל : 68 בלשון ו70 במתמטיקה.
א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים :

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
בחר בתשובה הנכונה.

א. התפוקה.
ב. כמות הפועלים.
ג. חריגים באותה מידה.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3. הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן 10 סנטימטר. המשקל הממוצע 66 ק"ג עם סטיית תקן 8 ק"ג. ערן התגייס, גובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים- גובהו או משקלו?
ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

פתרונות:

שאלה 1:

א. לשון

ב. 72

שאלה 2:

תשובה ב

שאלה 3:

א. משקל

ב. 70

פרק 53 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים במחלקות

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש p % מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p.

למשל, המאון ה- 25 הוא האחוזון ה- 25 או הרבעון התחתון : ערך ש- רבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן : $X_{0.25}$

<u>מציאת מאון במחלקות</u>:

<u>שלב א</u> : נימצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה $\frac{np}{100}$.

<u>שלב ב</u> : נציב בנוסחה הבאה : $x_p = L_0 + \dfrac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם רוצים לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה :

$$P_x = \left[\frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת :

שכר בש״ח	f(x)
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל5,000 ₪?

תרגילים:

1. להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה :

שכר X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

א. חשבו את המאון ה-60.

ב. מהו העשירון העליון?

ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?

ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7000 ₪?

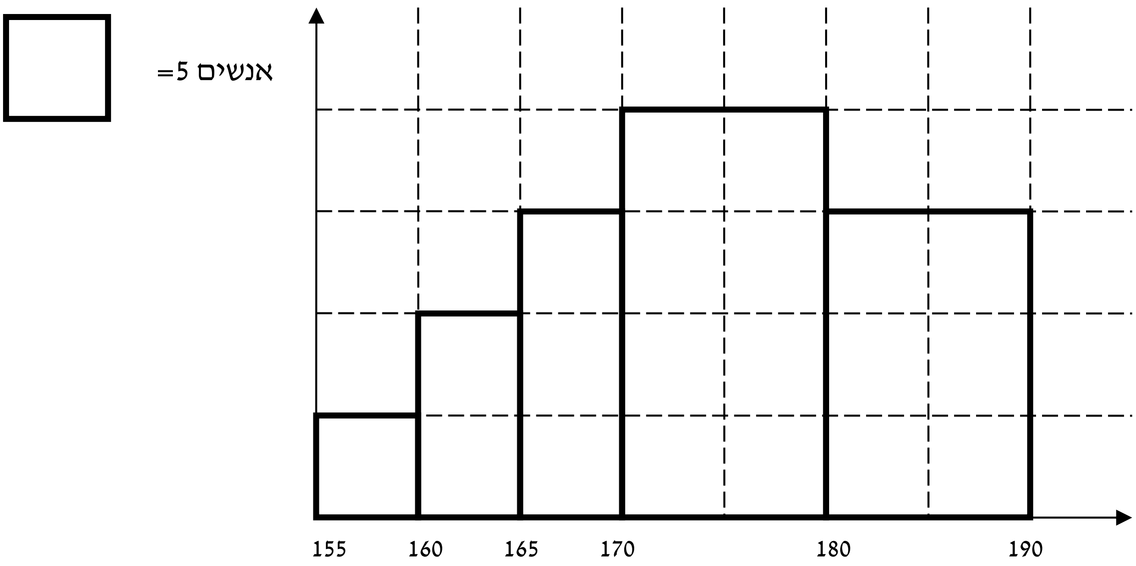
ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל25,000 ₪?

ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7000 ל-25,000 ₪?

2. למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחות החסרות.

ציון - X	$f(X)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

3. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. העשירון
התחתון.
ב. האחוזון ה-
.30
ג. הגובה ש-20%
מהתצפית גדולות ממנו.
ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.
ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.
ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

פתרונות:

שאלה 1 :

א. 13.23

ב. 22

ג. 17.2

ד. 8.82%

ה. 7.36%

ו. 83.82%

שאלה 3:

א. 162.5

ב. 170

ג. 183.33

ד. 3%

ה. 15%

ו. ת55%

פרק 54 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים בטבלת שכיחויות בדידה

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו כולל יש p % מהנתונים.

מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p.

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה :

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- p%.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בסניף בנק 250 לקוחות . ספרו לכל לקוח את מספר תכניות החיסכון שלו :

# תכניות החיסכון	f(x)	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

מצא את האחוזון ה-25.

מצא את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

תרגילים:

1. להלן התפלגות של משתנה כלשהו.

X	f(x)
0	10
1	40
2	30
3	15
4	5

מצא להתפלגות את:

האחוזון ה-60.

המאון ה-40.

העשירון העליון.

הטווח בין הרבעונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. רבעון עליון.

פתרונות:

שאלה 2

א. 1

ב. 2

ג. 4

ד. 4

פרק 55 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה של קבוע (או החסרה) והכפלה של קבוע (או חילוק) לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$

וכך יושפעו המדדים השונים:

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$

$$Mo_y = a \cdot Mo + b$$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$Md_y = a \cdot Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_X$$

$$s_y = | a | s_x$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$

$$Z_Y = \frac{a}{| a |} Z_X$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע של עובדים הנו 9000₪ וטווח 6000 ₪ חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב100 ₪.

תרגילים:

1. עבור סדרת נתונים התקבל:

$$\bar{X}=80$$
$$S=15$$
$$MO=70$$

הוחלט להכפיל את כל התצפיות פי-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשב את המדדים הללו לאחר השינוי.

2. בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב- 10% , אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3. במבחן הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות. והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4. דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. קבלו שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא. עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקנים בקופסא?

5. חברת בזק הציעה את החבילה הבאה:
שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים. ובנוסף 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת, אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע בחודש יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6. הוכח שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה ליניארית:

$$Y_i=a\cdot X_i+b$$

אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:

$$\bar{y}=a\cdot\bar{x}+b$$
$$s_y^2=a^2s_x^2$$

פתרונות :

שאלה 1 :

הממוצע : 315

סטיית התקן : 60

השכיח : 275

שאלה 2 :

הממוצע : 46

השונות : 30.25

שאלה 3 :

טווח : 40

חציון : 77

עשירון עליון :91

שאלה 4 :

ממוצע : 37

סטיית תקן : 1.5

שאלה 5:

ממוצע : 90

שונות : 25

ציון תקן : 2

פרק 56 - סטטיסטיקה תיאורית - מקדם ההשתנות

רקע:

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל). על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע הנתונים נחשב את ***מקדם ההשתנות - Coefficient of Variation***:

$$CV = \frac{S\left(X\right)}{\bar{X}}$$

ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע וככל שמקדם ההשתנות גבוהה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.

תרגילים:

1. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

2. נתונות שתי קבוצות:
הממוצע בקבוצה א 100 והשונות 100.
הממוצע בקבוצה ב 500 והשונות 400.
באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

3. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

לפי קריטריון CV . בחר את התשובה הנכונה.

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.

ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.

ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

פתרונות:

שאלה 1:

ב. כתה ב

שאלה 2:

קבוצה 2

שאלה 3:

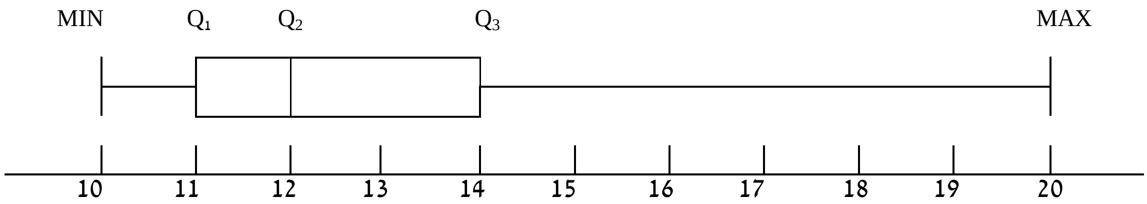
תשובה ב

פרק 57 - סטטיסטיקה תיאורית - תרשים קופסא - boxplot

רקע:

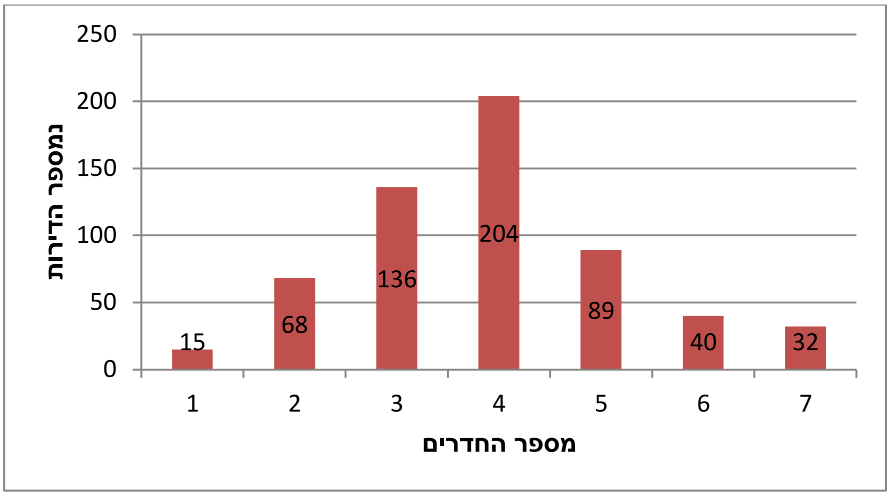
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון :

1. את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2)
2. את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני)
3. את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית)



תרגילים:

1. להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד.

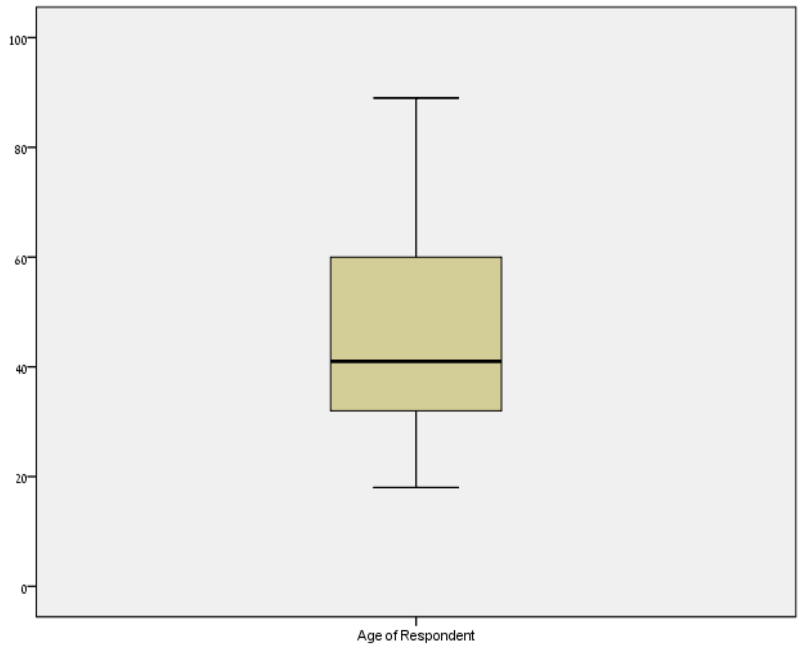


א. מצא את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.

ב. שרטט דיאגרמת קופסא להתפלגות.

ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2. להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל בשנים באוכלוסייה מסוימת:



א. מהו בערך הגיל החציוני באותה אוכלוסייה?

ב. מה בערך טווח הגילאים?

ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

פתרונות:

שאלה 1:

א. חציון : 4

רבעון תחתון : 3

רבעון עליון : 5

ג. כמעט סימטרית

שאלה 2:

א. חציון : 40

ב. טווח : 70

ג. התפלגות אסימטרית ימנית

פרק 58 - סטטיסטיקה תיאורית - ניתוח פלטים

תרגילים:

1. להלן פלט על התפלגות הגילאים באוכלוסייה מסוימת.

		Statistic
Age of Respondent	Mean	45.63
	Median	41.00
	Variance	317.140
	Std. Deviation	a
	Minimum	18
	Maximum	b
	Range	71
	Interquartile Range	28

א. מצא את הערכים בטבלה המסומנים ב a ו b .

ב. נתון שההתפלגות היא אסימטרית האם היא נוטה ימינה או שמאלה?

2. להלן התפלגות ההשכלה של העובדים בחברת "מתארר":

years of education

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	8.00	7	12.7	12.7	12.7
	9.00	4	7.3	7.3	20.0
	10.00	2	3.6	3.6	23.6
	11.00	14	25.5	25.5	49.1
	12.00	10	18.2	18.2	67.3
	13.00	2	3.6	3.6	70.9
	14.00	4	7.3	7.3	78.2
	15.00	7	12.7	12.7	90.9
	16.00	4	7.3	7.3	98.2
	18.00	1	1.8	1.8	100.0
	Total	55	100.0	100.0	

		Statistic
years of education	Mean	?
	Median	12.0000
	Variance	?
	Std. Deviation	2.54786
	Minimum	?
	Maximum	?
	Range	?
	Interquartile Range	?

מלא את הערכים המסומנים בסימני שאלה.

פתרונות:

שאלה 1

א. a=17.81

b=89

ב. אסימטרית ימנית

שאלה 2

הממוצע: 11.909

שונות: 6.492

טווח : 10

טב"ר: 3

פרק 59 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

1. בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם :

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?

ב. מהו המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?

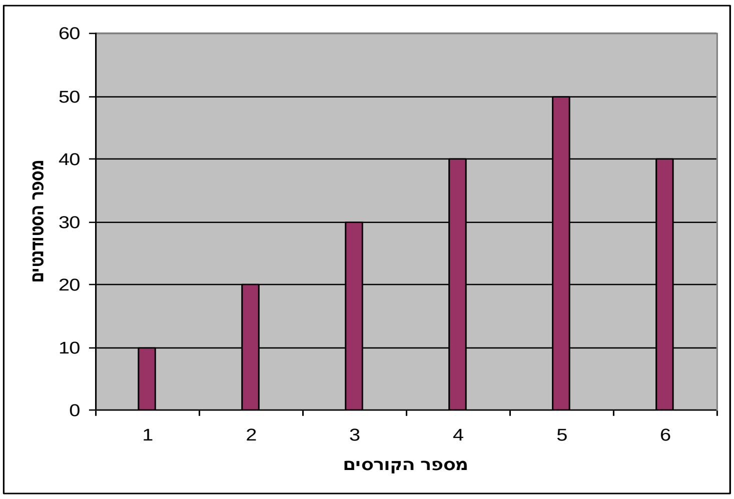
ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?

ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3 שגובהו 162 יותר חריג במשקל או בגובה?

ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן? (יגדיל יקטין או לא ישנה)

2. בפקולטה להנדסה אספה מזכירות הסטודנטים נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008.

להלן התוצאות שהתקבלו :



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?

ב. מהי צורת ההתפלגות?

ג. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ד. חשב את השכיח, החציון והטווח .

3. להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.
השתתפו במחקר 150 תלמידים.

ממוצע הציונים שהתקבל: $7\frac{1}{15}=\bar{X}$

ציון	מספר התלמידים
4	12
5	16
6	
7	38
8	
9	14
10	10

א. השלם את השכיחויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את הציון החציוני , השכיח .

ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה(1 – שביעות רצון נמוכה ועד 5 שביעות רצון גבוהה) להלן ההתפלגות שהתקבלה :

שביעות רצון	**מספר האנשים**
1	40
2	60
3	50
4	30
5	20

א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?

ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?

ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?

i. היסטוגרמה.

ii. דיאגרמת מקלות.

iii. דיאגרמת עוגה

ד. חשבו את המדדים הבאים :

1. טווח
2. שכיח
3. חציון

5. להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים בחברת "סטאר".
בחברה 200 עובדים.

מספר שעות עבודה	**שכיחות יחסית (פרופורציה)**	**שכיחות**
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

א. השלם את הטבלה.

ב. חשב את החציון, השכיח, והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.

ג. מהי סטיית התקן של מס' שעות העבודה?

ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?

ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?

ו. מה ציון התקן של רינה שעובדת 30 שעות בשבוע?

ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבר.

6. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	**מספר האנשים**
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?

ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?

ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשתמשים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?

ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן חשב:
1. ממוצע
2. שכיח
3. חציון
4. שונות

7. נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	**מספר הילדים**
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

א. שרטט היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.

ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א מהי צורת ההתפלגות?

ג. חשב את השכיח והחציון של ההתפלגות.

ד. הסבר, ללא חישובים, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון .

8. התפלגות ציוני מבחן אינטילגנציה היא סימטרית .

הציון	מספר הנבחנים
50-70	
70-90	
90-100	
100-110	
110-130	
130-150	

נתון שהעשירון העליון הוא 130 והרבעון התחתון הוא 90.

נתון שלמבחן נגשו 500 מועמדים.

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש 40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. אם יוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות . כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

9. להלן מספר טענות , עבור כל טענה ציין אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו .

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

פתרונות:

שאלה 1:

א. המשתנה הנחקר כאן הוא משקל תלמיד בק"ג והוא משתנה כמותי רציף.

ב.

$$\bar{X}=52$$

$$Md=X_{\frac{n+1}{2}}=X_3=58$$

השכיח הוא 58

ג. $R=28$

$s=10.12$

ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.

ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן .

שאלה 2:

א. מספר הקורסים. בדיד.

ב. התפלגות אסימטרית שמאלית

ד. השכיח: 5

הטווח: 5

שאלה3:

א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40

תלמידים קיבלו ציון 8.

החציון: 7

השכיח: 8

ג. השונות: 2.533

סטיית התקן: 1.592

שאלה 4:

א. 20%

ב. שביעות רצון (סדר)

ג. 2

ד. טווח: 4 שכיח: 2 חציון: 2.5

ה. חציון: 4

<u>שאלה 5:</u>

ב. החציון: 35

השכיח: 35

הממוצע: 35

ג. סטיית תקן: 12.65

ד. 53.333

ה. 25%

ו. ‎-0.395

ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל סטיית התקן תקטן.

<u>שאלה 6:</u>

א. 38%

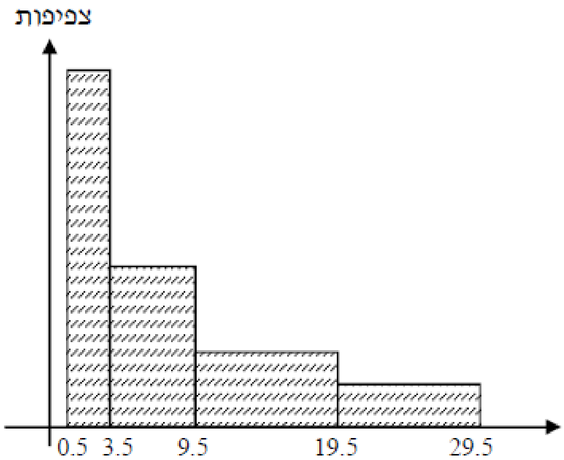
ב. 40%

ג. 150

ד. החציון: 100

<u>שאלה 7:</u>

א.



ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.

ג. שכיח: 2 חציון: 6.83

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים $Mo < Md < \bar{X} < MR$

שאלה 8:

א.

ציון	מספר הנבחנים
50-70	50
70-90	75
90-100	125
100-110	125
110-130	75
130-150	50

ב. 100

ג. 104

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות אך סטיית התקן לא תשתנה .

שאלה 9:

א. נכון

ב. לא נכון

ג. לא נכון

ד. לא נכון

ה. לא נכון

ו. נכון

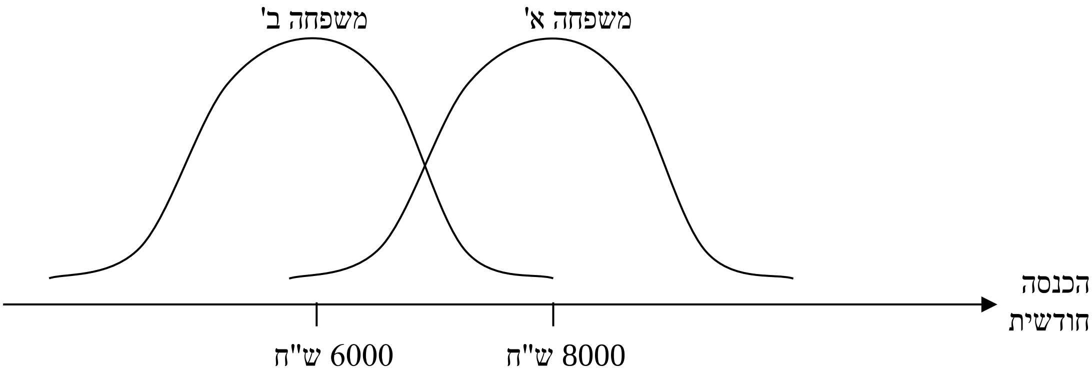
ז. לא נכון

ח. לא נכון

פרק 60 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות אמריקאיות

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



שאלה 1

לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?

א. משפחה א'

ב. משפחה ב'

ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה

ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

שאלה 2

באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?

א. משפחה א'

ב. משפחה ב'

ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת

ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

שאלה 3

באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?

א. משפחה א'

ב. משפחה ב'

ג. לשתיהן אותה סטית תקן

ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:

x	f(x)
0	?
1	10
2	6
3	15
4	?
סה"כ	50

כמו כן נתון הממוצע הוא 1.66

שאלה 4

השכיח של הנתונים הוא:

א. 0

ב. 15

ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו- 3

ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

שאלה 5

חציון הנתונים הוא:

א. 2

ב. 1.5

ג. 25.5

ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

שאלה 6

הטווח של הנתונים

א. 11

ב. 3

ג. 4

ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

שאלה 7

בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה- 30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

א. שלילי

ב. חיובי

ג. אפס

ד. לא ניתן לדעת ללא ידיעת הנתונים.

שאלה 8

סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע.

ממוצע הסדרה - 40 ושונות הסדרה - 100.

בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה: 50 ו- 30.

השונות של 12 התצפיות היא:

א. תקטן

ב. תגדל

ג. לא תשתנה

ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ש"ח וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ש"ח. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5 .

שאלה 9

מהי המשכורת הממוצעת החדשה :

א. 2,300 .

ב. 6,900 .

ג. 4,650.

ד. 4,600.

ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

שאלה 10

מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר ?

א. 200

ב. 300

ג. 675

ד. לא ניתן לדעת

שאלה 11

הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

א. תגדיל את סטיית התקן.

ב. תקטין את סטיית התקן.

ג. לא תשנה את סטיית התקן.

ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-14

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה :

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

שאלה 12

התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא :

א. מיטב.

ב. צבי.

ג. לובה.

ד. שרית.

ה. סטף.

שאלה 13

פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא :

א. 80.55

ב. 65

ג. 80

ד. 81.66

שאלה 14

איזו כיתה היא ההומוגנית ביותר . הכיתה של:

א. מיטב.

ב. צבי.

ג. לובה.

ד. שרית.

ה. סטף.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-18

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד נמצא ש:

שוקולד פגום	0	1	2	3	4	5	6	7
מס' קופסאות	35	63	48	12	13	11	10	8

שאלה 15

מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:

א. 1.

ב. 2.

ג. 4.

ד. לא ניתן לדעת

שאלה 16

מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא ?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. 4

ה. לא ניתן לדעת.

שאלה 17

מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה :

א. סדר.

ב. שמי.

ג. כמותי בדיד

ד. כמותי רציף

שאלה 18

השכיח של מספר הפגומים בקופסא :

א. 63

ב. 1

ג. 200

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 19

ביחס לציר המספרים רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים :

א. בערכים הגבוהים.

ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.

ג. בערכים הנמוכים.

ד. לא ניתן לדעת.

ה. אף לא תשובה מהנ"ל נכונה.

שאלה 20

בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר :

א. השכיחות ב 2 החברות זהה אך שונה מ 8.

ב. השכיח ב 2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.

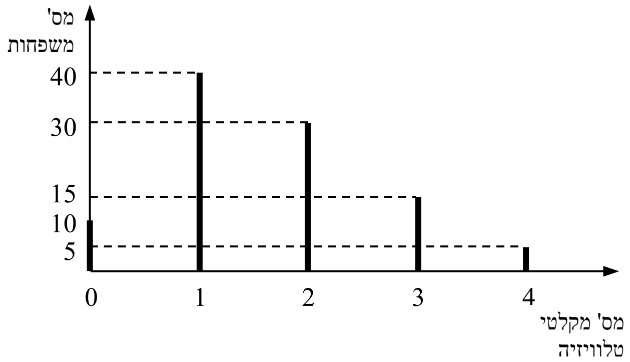
ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.

ד. שכיח בחברה אחת שונה מ 8 ובשנייה הוא 8.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 21 עד 25

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.
תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה :



שאלה 21

המשתנה הנחקר כאן הוא :
א. משתנה שמי.

ב. משתנה מסולם סדר.

ג. משתנה כמותי בדיד.

ד. משתנה כמותי רציף.

שאלה 22

הטווח של ההתפלגות הוא :
א. 35

ב. 4

ג. 3

ד. 2

שאלה 23

ממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה הוא :
א. 1.65

ב. 1.5

ג. 1

ד. 2

שאלה 24

השכיח של התפלגות זו היא:

א. 40

ב. 1.5

ג. 1

ד. 2

שאלה 25

מסתבר שיש בין 2 ל- 5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלוויזיה. ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות . כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

א. יקטין אותו.

ב. יגדיל אותו.

ג. לא ישנה אותו.

ד. אין לדעת

פתרונות:

שאלה	תשובה
1	א
2	ג
3	ג
4	ג
5	ב
6	ג
7	א
8	ג
9	ב
10	ב
11	ג
12	ה
13	ד
14	ג
15	ב
16	א
17	ג
18	ב
19	ג
20	ה
21	ג
22	ב
23	א
24	ג
25	ב

פרק 61 - מדדי קשר - מדד הקשר של קרמר

רקע:

מתי משתמשים במדד הזה?
כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי.
מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1 .
ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)
במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

Y \ X	בעד	נגד	נמנע	f(x)
גבר	50	40	10	100
אישה	30	60	10	100
f(y)	80	100	20	**n=200**

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed)
X- מין (גבר/אישה) – סולם שמי
Y-דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר
שלבים בחישוב r_c :

<u>שלב א'</u> : נבנה את טבלת E (Expected)
נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל $E_i=(f_{(x)}*f_{(y)})/n$

Y \ X	בעד	נגד	נמנע	f(x)
גבר				100
אישה				100
f(y)	80	100	20	**n=200**

<u>שלב ב'</u> : נחשב $\chi^2=\sum_i \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$

<u>שלב ג'</u> : נחשב : $r_c=\sqrt{\frac{1}{n(L-1)}\chi^2}$

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

תרגילים:

1. להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו. להלן התוצאות:

השכלה / מין	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמק!

2. נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנה טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי? חשב לפי מדד הקשר של קרמר.

פתרונות :

שאלה 1

0.595

שאלה 2

ב. 0.19

פרק 62 - מדדי קשר - מדד הקשר פי

רקע:

מדד הקשר פי הינו דרך קיצור על מנת לחשב את מדד הקשר של קרמר.
המדד רלבנטי רק כשטבלת השכיחות המשותפת היא מסוג 2/2 כלומר שני משתנים שהם דיכוטומיים.

הנוסחה : $\phi = \sqrt{\dfrac{(a \cdot d - b \cdot c)^2}{e \cdot f \cdot r \cdot k}}$

	a	b
	c	d

מפעל עובד בשתי משמרות, משמרת יום ומשמרת ליל, דגמו 300 מוצרים ממשמרת היום ו-200 ממשמרת הלילה, מתוך המוצרים שנדגמו ביום 10 היו פגומים, מתוך המוצרים שנדגמו בלילה 150 היו תקינים. האם יש קשר בין סוג המשמרת לטיב המוצר?

תרגילים :

1. להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין לדעה מסוימת. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו ודעתו האישית בדבר סוגיה מסוימת. הנחקרים היו צריכים לענות האם הם בעד, נמנעים או נגד הדעה שהוצגה להם. להלן התוצאות :

דעה / מין	בעד	נמנע	נגד
גבר	120	40	**20**
אישה	**20**	**20**	**80**

האם אפשר לחשב במקרה זה את מדד הקשר פיי? אם כן חשב.

2. נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

האם ניתן לחשב את מדד הקשר של ϕ ? אם כן חשב והסבר את המשמעות.

פרק 63 - מדדי קשר - מדד הקשר למדא

רקע:

מתי משתמשים?

כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אחר.

מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1 ככל שהוא קרוב יותר ל-1 הקשר יותר עוצמתי וככל שהוא קרוב ל-0 הוא יותר רופף וחלש.

מדד הקשר של למדא הוא מדד קשר א-סימטרי, כלומר אם נחליף בין X ל-Y נקבל תוצאה אחרת.

לכן בעצם יש שני מדדי למדא:

שלבים בחישוב מדד הקשר למדא X לפי Y:

<u>שלב א':</u>

נתבונן בעמודה הקיצונית ביותר ונפחית מ n את f(x) הכי גבוה והוא יקרא L_x.

<u>שלב ב':</u>

נעבור כל ערך של Y (כל עמודה) ונסכום עבור כל העמודות את f(y) פחות השכיחות הכי גבוהה באותה עמודה. יקרא: $L_{x/y}$

<u>שלב ג':</u>

נציב: $\lambda_{x/y} = \frac{L_x - L_{x/y}}{L_x}$

המדד ההפוך לפי אותו עקרון יהיה: $\lambda_{y/x} = \frac{L_y - L_{y/x}}{L_y}$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 120 גברים ו100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

דעה Y / מין X	בעד	נגד	נמנע	f(x)
גבר	50	40	30	120
אישה	30	60	10	100
f(y)	80	100	40	**n=220**

תרגילים :

1. להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו. להלן התוצאות :

השכלה / מין	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

א. חשב את מדד הקשר של למדא לניבוי השכלה על סמך מין.

ב. חשב את מדד הקשר של למדא לניבוי מין על סמך השכלה.

2. בעיר 4 שכונות. בכל שכונה נבדק המצב הכלכלי של כל משפחה. להלן טבלת השכיחות המשותפת שהתקבלה :

מצב כלכלי / השכונה	נמוך	בינוני	גבוה
A	40		
B		70	
C		**80**	
D			40

חשב את מדדי הקשר של למדא והסבר את הממצאים.

פתרונות :

שאלה 1:

א. 0.375

ב. 0.5

שאלה 2:

1

0.533

פרק 64 - מדדי קשר - מדד הקשר של ספירמן

רקע:

מתי נשתמש במדד ספירמן ?

כאשר אחד המשתנים מסולם סדר והשני מסולם סדר ומעלה.

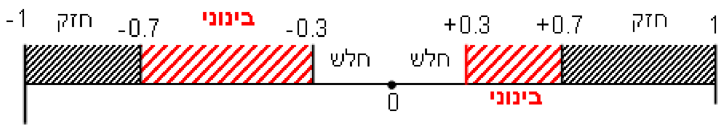
הקשר שהמדד בודק הוא קשר דירוגי.

מדד הקשר בודק :

1 כיוון של הקשר.

2 בודק את עצמת הקשר.

המדד מקבל ערכים בסקלה מ -1 ועד 1.



אם מדד הקשר של ספירמן יוצא 1 המשמעות היא שיש קשר דירוגי חיובי מלא : ככל המשתנה אחד עולה השני עולה ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי חיובי חלקי (שמקדם המתאם בין 0 ל-1) אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות אך לא באופן מוחלט.

אם מדד הקשר של ספירמן יוצא -1 המשמעות היא שיש קשר דירוגי שלילי מלא : ככל שהמשתנה אחד עולה השני יורד ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי שלילי חלקי (שמקדם המתאם הוא בין 0 ל- -1) אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אך לא באופן מוחלט.

על מנת לחשב את הקשר יש לבצע פעולת דירוג (RANK) נלמד את פעולת הדירוג דרך הדוגמה הבאה (פתרון בהקלטה)

שם התלמיד	הערכה	דירוג R
ערן	בינוני	
מיכל	מצוין	
עודד	חלש	
רוני	טוב	
יעל	טוב	

כאשר מדרגים אם יש כמה תצפיות שתופסות את אותו הערך אז הדירוג שלהם הוא הממוצע של המקומות שהן תופסות.

הנוסחה של מדד הקשר : $r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

בתחרות רוקדים עם כוכבים השתתפו 7 זוגות, 2 שופטים נתנו את ציוניהם לריקוד של כל זוג.

מהי מידת ההתאמה בין ציוני השופטים?

X- ציון שופט א (סולם סדר)

Y-ציון שופט ב (סולם סדר)

להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר הזוג	ציון שופט א	Rx	ציון שופט ב	Ry	$d=r_x-r_y$	d^2
1	4		5			
2	5		5			
3	6		7			
4	5		7			
5	8		9			
6	7		9			
7	3		7			

תרגילים:

1. בתחרות יופי חילקו שני שופטים ציונים למועמדות:

מספר מועמדת	1	2	3	4	5	6	7
ציון שופט א'	7	8	6	8	9	5	6
ציון שופט ב'	8	8	7	8	9	5	7

האם קיים קשר בין שתי הערכות השופטים? נמק והסבר!

2. משרד רצה לבחון האם קיים קשר בין מידת המוטיבציה של העובדים שלו לבין מספר החיסורים של העובדים בחודש עבודה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חיסורים	מידת מוטיבציה
0	גבוהה
4	נמוכה
2	בינונית
5	נמוכה
1	גבוהה

האם קיים קשר בין רמת המוטיבציה של העובד ומספר החיסורים שלו? חשב באמצעות מדד הקשר המתאים והסבר.

3. אם $r_s = 1$ הדבר אומר שערכי X תמיד שווים לערכי Y. האם הטענה נכונה? הסבר.

פתרונות:

שאלה 1:

0.973

שאלה 2:

-0.85

שאלה 3:

לא נכון

פרק 65 - מדדי קשר - מדד הקשר הלינארי (פירסון)

רקע:

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.

בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).למשל,
נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד –X מסבירה את ההכנסה שלו Y.
במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה , ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

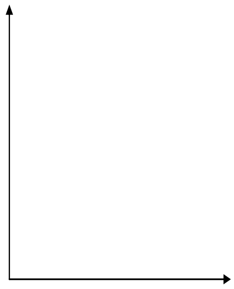
בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

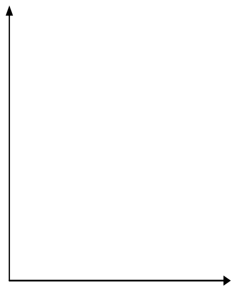
למשל, בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים :X - מס' חדרים בדירה. Y- מס' נפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

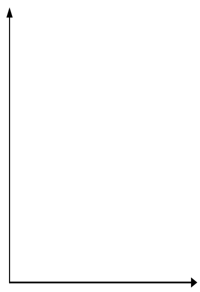
מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

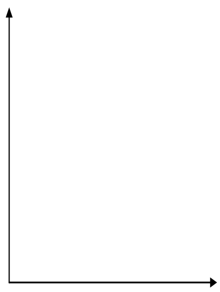
נשרטט מנתונים הללו דיאגרמת פיזור :

נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן :









בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים . המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.

המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי).

ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).

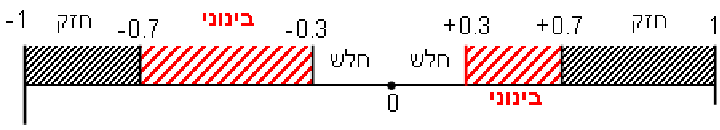
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל 1.

מקדם מתאם1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.



מקדם המתאם יסומן באות –r .

כדי לחשב את מקדם המתאם , יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת : $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\overline{x}\cdot\overline{y}$

שונות של המשתנה X: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\overline{x}^2$

שונות המשתנה Y: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\overline{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי : $r_{xy}=\frac{\text{cov}(x,y)}{s_x\cdot s_y}$

תרגילים:

1. להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן . בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
2	80
1	90
0	90
2	70
3	70
4	50

א. שרטט דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשב את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2. במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים.

להלן התוצאות שהתקבלו:

y	x
12	10
15	14
15	15
17	18
21	20

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

3. נסמן ב-X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪.
נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \quad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל-Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?

4. נסמן ב-X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪.
נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל-Y.

5. במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב- 3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6. להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$ $S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

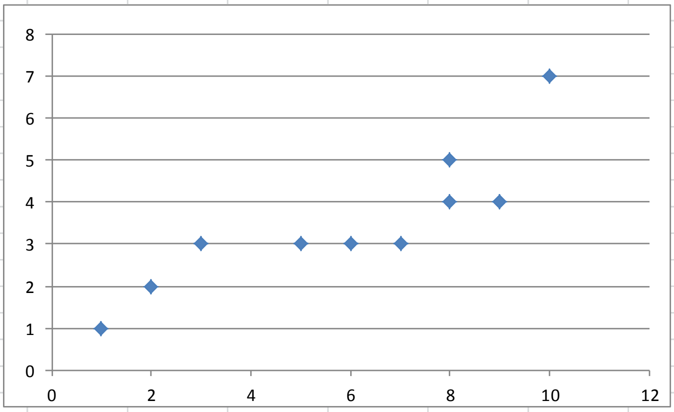
ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

<u>שאלות אמריקאיות:</u>

7. נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן :
   א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
   ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
   ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
   ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8. נלקחו 20 מוצרים וניבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש״ח (באותו היום ערך הדולר היה - 4.2 ₪) מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש״ח?
   א. 1
   ב. 0
   ג.4.2
   ד. לא ניתן לדעת.

9. להלן דיאגראמת פיזור :



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1

ב. 0.85

ג. 0.15

ד. 0

פתרונות:

שאלה 1:

א. בהקלטה

ב. ‎-0.9325

שאלה 2:

א. $\bar{y}=16$ $\bar{x}=15.4$

ב. $r_{xy}=0.96$

שאלה 3:

א : 0.8

שאלה 4:

0.8

שאלה 5:

1

שאלה 6:

א. נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

שאלה 7:

התשובה : ג

שאלה 8:

התשובה : א

שאלה 9:

התשובה : ב

פרק 66 - מדדי קשר - השפעת טרנספורמציה לינאריות על מדד הקשר של פירסון

רקע:

טרנספורמציה לינארית בין אם נעשית על X ובין אם נעשית על y, או בין אם נעשית על שניהם, אינה משנה את עוצמת הקשר . היא עלולה רק לשנות את כיוונו אם השיפועים של שתי הטרנספורמציות שוני סימן.

$$r_{[(aX+b),(cY+d)]} = \begin{cases} r_{x,y} \_\_\_ if \_\_ a\cdot c>0 \\ -r_{x,y} \_\_ if \_\_ a\cdot c<0 \end{cases}$$

תרגילים:

1. מבחן בנוי מחלק כמותי ומילולי.
מקדם המתאם בין שני הציונים של שני החלקים הוא 0.9.
   א. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב- 20% , מה יהיה מקדם המתאם בין הציון המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?
   ב. נגדיר משתנה חדש W להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי בבחינה- 150. מצא את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- W ובין W ל-לציון הכמותי.

2. מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7 . אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, אז מה יהיה מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה להוצאה החדשה?

3. חברת "לקי" המייצרת גלידה החליטה לערוך מחקר לבדיקת הקשר בין מספר חבילות הגלידה הנמכרות ביום לבין הטמפרטורה באותו יום. נבדקו 10 ימים והתקבל מתאם לינארי 0.85.
חברת "לקי" דואגת להתחיל כל יום עם מלאי של 150 חבילות גלידה. בנוסף, מעוניינים כי הטמפרטורה תבוטא במעלות פרנהייט במקום במעלות צלסיוס. מה ערכו של מקדם המתאם בין מספר חבילות הגלידה שנשארות בסוף היום לבין הטמפרטורה במעלות פרנהייט?
הקשר בין מעלות צלסיוס (C°) למעלות פרנהייט (F°) נתון ע"י $F=\frac{9}{5}C+32$.
<u>בחר בתשובה הנכונה:</u>
   א. 0.85
   ב. -0.85
   ג. 1
   ד. לא ניתן לדעת.

4. מקדם המתאם בין X ל- Y הנו 0.4 כל ערכי ה-X הוכפלו ב- 2 לכן מקדם המתאם החדש בין שני המשתנים יהיה:
<u>בחר בתשובה הנכונה:</u>
   א. 0.8
   ב. 0.4
   ג. -0.4
   ד. לא ניתן לדעת.

פתרונות :

שאלה 1:

א. בין הציון המילולי הישן לחדש :1

בין הציון המילולי החדש לכמותי :0.9

ב. בין W ל ציון המילולי : 1-

בין W לציון הכמותי :0.9-

שאלה 2:

0.7

שאלה 3:

התשובה : ב

שאלה 4:

התשובה : ב

פרק 67 - מדדי קשר - רגרסיה ליניארית

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבויי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר.

מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X. השיטה למציאת הקו הנ״ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - בעצם נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא ניקרא החותך של הקו.
b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.
להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה:

$$\tilde{Y} = bX + a$$

$$b = r\frac{S_Y}{S_X}$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

אם נרצה לבנות קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

תרגילים:

1. נסמן ב-X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \quad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל-Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מצא את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבר את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.

ג. משפחת כהן הכניסה 15,000 ₪, מה ההוצאה הצפויה שלה?

1. נסמן ב-X את ההשכלה של אדם בשנות למוד. נסמן ב-Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_Y = 5 \qquad S_X = 2$$

$$\bar{Y} = 8 \qquad \bar{X} = 14$$

$$COV(X,Y) = 7.5$$

א. חשב את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.

ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?

ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000 ₪?

3. חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב?

ב. על פי משוואת הרגרסיה תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון ?

ג. מהו קו הרגרסייה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4. נתונים 2 משתנים Y,X. כמו כן נתון: X ממוצע = 1.5, שונות X = שונות Y = 4, וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו $Y = -0.2X + 0.5$. חשב מהו מקדם המתאם בין X ל-Y?

פתרונות:

שאלה1:

א. 0.8

ב. $\tilde{Y} = 0.8X + 0.4$

ג. 12.4

שאלה 2:

א. 0.75

ב. 4.25 אלפי ש"ח

ג. 14.6 שנים

שאלה 3:

א. 1.2

ב. 29

ג. y=1.2x+29

שאלה 4:

-0.2

פרק 68 - מדדי קשר - רגרסיה - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

רקע:

המטרה ברגרסיה הנה להסביר את השונות של המשתנה התלוי.
למשל, להסביר את השונות של המשכורות באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 -נותן בעצם איזה חלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר.
השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים.
השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

תרגילים :

1. נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.

א. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?

ב. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?

ג. מהי השונות המוסברות ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?

2. להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

ב. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות אמריקאיות:

בשאלות הבאות יש לבחור בתשובה הנכונה.

3. בקשר בין שני משתנים התקבל $\mathbf{0.64 = r^2}$ לכן :

א. ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.

ב. 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.

ג. הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.

ד. כל התשובות נכונות.

4. אם מגדילים את r^2 מה ניתן לומר?

א. אחוז השונות המוסברת יקטן

ב. אחוז השונות המוסברת יגדל

ג. אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.

ד. סטיית התקן משתנה

ה. לא ניתן לדעת

5. בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים : מבחן בסוף סימסטר א (X) ומבחן בסוף סימסטר ב (Y) . כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב לפי הציון במבחן סוף סמסטר א התקבלה שונות טעויות של 80 , ושונות ניבויים של 20 . לפי נתונים אלו מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב הוא :

א. 0.44 .

ב. 0.44 - .

ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44 , אך אין אפשרות לדעת את סימנה.

ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.

ה. 0.35

פרק 69 - מדד הקשר אתא

רקע:

מדד הקשר אתא הינו מדד קשר אסימטרי. כלומר , יש שני מדדי קשר מסוג זה :

$\eta_{y|x}$ - אתא Y לפי X. אפשרי לחישוב כאשר Y מסולם רווחים או מנה ו- X מכול סולם.

$\eta_{x|y}$ - אתא X לפי Y. אפשרי לחישוב כאשר X מסולם רווחים או מנה ו- Y מכול סולם.

מדד הקשר לא בודק כיוון קשר אלא רק את העוצמה , לכן מקבל ערכים בין 0 ל- 1.

שלבים בחישוב המדד : $\eta_{y|x}$ (ניבוי y בהינתן x)

שלב א : נחשב את הממוצע הכללי של y שיסומן $\bar{\bar{y}}$.

נחשב לכל ערך של X את הממוצע של Y.

שלב ב : חישוב השונות הכללית של y, כלומר השונות של ההתפלגות השולית של y :

$$S_y^{\,2} = \frac{\sum_y y^2 \cdot f(y)}{n} - \bar{\bar{y}}^2$$

שלב ג : חישוב שונות הניבויים של y, כלומר השונות של הממוצעים הקבוצתיים של y :

$$S_{\bar{y}}^{\,2} = \frac{\sum_y \bar{y}_x^{\,2} \cdot f(x)}{n} - \bar{\bar{y}}^2$$

שלב ד : נחשב : $\eta^2_{\;y|x} = \dfrac{S^2_{\;\bar{y}}}{S^2_{\;y}}$

שלב ה : נוציא שורש $\eta_{\;y|x} = \sqrt{\eta^2_{\;y|x}}$

<u>דוגמה</u> : (פתרון בהקלטה)

להלן טבלת שכיחות משותפת עבור קבוצת סטודנטים , כאשר :

X- מגדר

Y- מספר הקורסים שנרשם הסטודנט הסמסטר

ג			
א			

א. איזה מדד קשר של אתא ניתן לחשב כאן?

ב. חשב את המדד האפשרי.

תרגילים:

1. להלן נתונים על משפחות בישראל .

בדקו לגבי כל משפחה באיזה אזור היא גרה בארץ -Y וכמו כן כמה מקלטי טלוויזיה יש להם בבית –X.

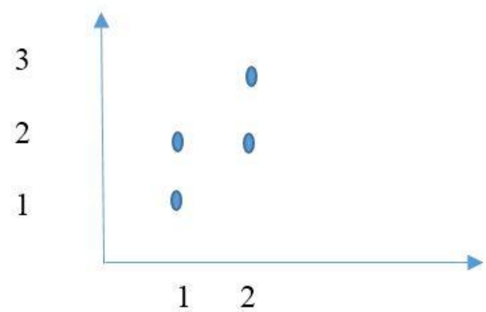
להלן התוצאות שהתקבלו.

דרום	צפון	מרכז	
0	15	5	**0**
20	5	5	**1**
0	0	5	**2**

א. איזה מדד קשר של אתא ניתן לחשב ?

ב. חשב את מדד הקשר של אתא שניתן לחישוב.

2. להלן דיאגרמת פיזור של 4 תצפיות :



א. בנה טבלת שכיחות משותפת לנתונים.

ב. חשב את $\eta_{y/x}$ ואת $\eta_{x/y}$.

פתרונות:

<u>שאלה 1 :</u>

א. $\eta_{x/y}$

ב. 0.585

<u>שאלה 2 :</u>

$$\eta_{x/y} = \eta_{y/x} = 0.707$$

פרק 70 - תרגול טענות

לפניך מספר טענות. ציין לגבי כל טענה נכון/לא נכון ונמק תשובתך. (תשובה ללא נימוק לא תתקבל!)

1. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

2. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

3. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובית.

4. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

5. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

6. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

7. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

8. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

9. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

10. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X}=\bar{Y}=6$ $S_x=S_y=1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

11. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

12. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

13. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

14. בסדרה המונה 13 תצפיות, ידוע כי הממוצע הוא 40 והשונות היא 100. מוסיפים שתי תצפיות חדשות, שהן 35 ו-45. כתוצאה מכך, הממוצע בסדרה החדשה (הכוללת 15 תצפיות) יקטן והשונות תקטן.

15. לסדרה סטטיסטית בת 61 תצפיות הממוצע 120 והחציון 110. לסדרה זו הוסיפו עוד שתי תצפיות: 100, 140. בעקבות כך, הממוצע והחציון של הסדרה בת 63 התצפיות אינם משתנים.

16. לסדרה סטטיסטית בת 100 תצפיות הממוצע 75 וסטיית התקן 10. נוספו לסדרה זו עוד 2 תצפיות: 75 ; 75. כתוצאה מכך, הממוצע החדש (של 103 התצפיות) לא ישתנה, אך סטיית התקן תקטן.

17. לסדרת נתונים המונה 10 תצפיות ממוצע 25 וסטיית תקן 2 . נתון כי הסדרה סימטרית סביב הממוצע. בשלב מאוחר יותר נוספו שלש תצפיות לסדרה: 23, 25 ו- 27 .
לכן סטיית התקן של 13 התצפיות לא תשתנה.

18. בהתפלגות אסימטרית חיובית, הערך המתאים למאון ה- 30, ציון התקן שלו בהכרח שלילי.

19. סטיית התקן של סדרת נתונים תמיד תגדל אם נוסיף גודל קבוע לכל נתוני הסדרה.

20. נתונים המאורעות A, B במרחב מדגם Ω. ידוע כי $P(A)=P(B)=0.3$.
ההסתברות לכך שיקרה בדיוק מאורע אחד אם המאורעות זרים היא $2\cdot 0.7\cdot 0.3=0.42$
.

21. בהטלת קובייה הוגנת 4 פעמים, ההסתברות שיתקבלו לפחות 2 תוצאות זהות היא $\frac{936}{1296}$.

22. המאורעות A ו- B הם מאורעות בלתי-תלויים שהסתברויותיהם הן 0.5 ו 0.3 בהתאמה.
לכן ההסתברות שיקרה לפחות אחד מהם היא 0.8.

23. A ו- B מאורעות כלשהם במרחב מדגם Ω. ידוע כי $P(A)=P(B)=0.2$. אם A ו- B מאורעות בלתי תלויים, ההסתברות שיתרחש בדיוק מאורע אחד מביניהם היא 0.4 .

24. לסביבון 4 פאות . הסיכוי שבהטלת הסביבון שלוש פעמים נקבל את אותה תוצאה בכל פעם הוא : $\frac{1}{16}$

25. אם $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, אזי X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים.

26. מספר הדרכים השונות לסדר שלושה חיילים בשלשה הוא 9.

27. יש לחלק שישה צעצועים שונים ל-4 בנות ו-2 בנים מספר הדרכים לחלק את הצעצועים הוא 48.

28. קוד של כספומט מורכב מ 4 ספרות, מתוך 0-9. ההסתברות שארבע הספרות יהיו שונות הוא 0.504 .

29. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילוים עם מספר אפשרויות בילוי :
בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג הוא 0.3

30. בכיתה ישנם 3 תלמידים . הסיכוי שתלמיד כלשהו בכיתה יעבור את הבחינה הינו 0.8. כל התלמידים לא תלויים אחד בשני. הסיכוי שלפחות אחד יעבור את הבחינה הוא 0.992 .

31. בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. לכן גם השכיח שווה בין שתי החברות.

32. לפי מחקר שנעשה הטמפרטורה בחודשי החורף באזור מסוים בארץ מתפלגת נורמאלית עם תוחלת 14 וסטיית תקן 4. ההסתברות שהטמפרטורה באזור גבוהה מ 17 מעלות בחורף קטנה מ 0.5 .

33. בחדר אוכל של קיבוץ מגישים תפריט ובו :
- 3 מנות ראשונות
- 4 מנות עיקריות
- 2 מנות אחרונות

מספר המנות שאפשר להרכיב שיכללו מנה ראשונה + מנה עיקרית + מנה אחרונה הוא 9.

34. התקיימה תחרות קליעה למטרה. אתה משחק עד שאתה פוגע אך בכל מקרה לא יותר מ 4 פעמים. הסיכוי של ירון ,אחד מחברי הנבחרת ,לפגוע במטרה הוא 0.6 .
הסיכוי שירון זרק 4 פעמים למטרה בלבד הוא 0.064 .

35. הוותק הממוצע של עובדי מפעל מסוים הוא 12 שנים וסטיית התקן של הוותק 8 שנים. בעוד 3 שנים – אם כל העובדים ימשיכו לעבוד במפעל ולא יתווספו עובדים חדשים – נקבל כי: הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 8 שנים.

36. נתונה סדרה של 4 תצפיות. להלן הסטיות שלהן מהממוצע עבור 3 תצפיות מתוך ה4 : 4, 3, 2- .
לכן השונות של 4 התצפיות היא 7.25.

37. הסיכוי שירון יכין שיעורים ביום מסוים הוא 0.7 אם אימא ביקשה ממנו, ו-0.4 אם אימא שלו לא בקשה ממנו. ב-60% מהימים אימא של ירון מבקשת ממנו להכין את השיעורים.
הגעת לבקר את ירון והבחנת שהוא מכין שיעורים לכן ההסתברות שאימא שלו ביקשה ממנו להכין אותם באותו היום הוא: 0.742

38. 70% מבתי האב גרים בבתים אשר בבעלותם מתוכם 50% משלמים משכנתא על בית זה. נבחרו 20 בתי אב אקראיים . תוחלת מספר הבתים אשר גרים בהם בעליהם ומשלמים בהם משכנתא הוא 7.

39. מספר ראשי התיבות שניתן ליצור בעברית (22 אותיות) עבור שם פרטי ומשפחה הוא 44.

40. מספר המספרים התלת ספרתיים בהם הספרות שונות זו מזו הוא 648.

41. בהתפלגות נורמלית ככל שסטיית התקן יותר גבוהה אחוז המקרים שמתחת לממוצע קטן.

42. הציון הממוצע של 5 סטודנטים הוא 78. 4 סטודנטים מתוכם קיבלו את הציונים הבאים: 74,72,86,70. הציון של הסטודנט החמישי הוא: 76.

43. בתיק השקעות של משקיע מתחיל 10 מניות. הסיכוי שביום מסוים מניה תעלה הוא 0.6. נניח כי המניות אינן תלויות זו בזו. סטית התקן של מספר המניות, מתוך תיק ההשקעות, שתעלינה ביום מסוים היא 2.4 .

44. ישנן שני מאורעות ונתון ששני המאורעות זרים הסיכוי שכל אחד מהם יקרה הוא 0.3 ולכן הסיכוי שלפחות אחד מהם יקרה הוא 0.6

45. A, B ו- C שלושה מאורעות במרחב מדגם Ω .

ידוע כי $P(A)=P(B)=P(C)=0.2$.

ההסתברות שיקרה **רק** מאורע B אם המאורעות בלתי תלויים היא 0.2 .

46. אוכלוסיה מסוימת מתפלגת לפי 4 סוגי הדם כדלקמן :

סוג דם	אחוז מהאוכלוסייה
A	40%
O	30%
B	20%
AB	10%

נבחרו ארבעה אנשים אקראיים מאותה אוכלוסייה. ההסתברות שבדיוק אחד מהם בעל סוג דם A הוא 0.4

47. חושב מקדם המתאם של ספירמן בין שני משתנים והתקבל 1 לכן אם יחושב מדד הקשר של פירסון יתקבל גם כן 1.

48. חושב מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים והתקבל 1 אם יחושב מדד הקשר של ספירמן יתקבל גם 1.

49. שונות של סכום משתנים שווה תמיד לסכום השונויות של המשתנים.

50. נגדיר את A להיות : התוצאה 4 בהטלת קובייה ואת B להיות : ראש בהטלת מטבע לכן המאורעות הללו הם מאורעות זרים.

פתרונות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	נכון	26	לא נכון
2	לא נכון	27	לא נכון
3	לא נכון	28	נכון
4	לא נכון	29	לא נכון
5	לא נכון	30	נכון
6	נכון	31	לא נכון
7	לא נכון	32	נכון
8	לא נכון	33	לא נכון
9	נכון	34	נכון
10	לא נכון	35	נכון
11	לא נכון	36	לא נכון
12	נכון	37	נכון
13	נכון	38	נכון
14	לא נכון	39	לא נכון
15	נכון	40	נכון
16	נכון	41	לא נכון
17	לא נכון	42	לא נכון
18	נכון	43	לא נכון
19	לא נכון	44	נכון
20	לא נכון	45	לא נכון
21	נכון	46	לא נכון
22	לא נכון	47	לא נכון
23	לא נכון	48	נכון
24	נכון	49	לא נכון
25	לא נכון	50	לא נכון

פרק 71 - שאלות אמריקאיות על כל חומר הלימוד

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 1-4

פסיכולוגים צפו במשך שבוע שלם בהתנהגותם של 28 ילדים בגן חובה. לאחר מכן נאלצו לדווח על רמת הביטחון העצמי של כל ילד בסקלה של 1 עד 5. כאשר 5 נחשב לרמת בטחון עצמי גבוהה ו-1 לרמת בטחון עצמי נמוכה.

להלן סיכום התוצאות:

בטחון עצמי	מספר הילדים
1	6
2	7
3	10
4	4
5	1

שאלה 1

מהו סולם המדידה של המשתנה הנחקר?

א. שמי.

ב. סדר.

ג. רווח.

ד. מנה.

שאלה 2

מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר כדי לתאר את הנתונים?

א. טבלת שכיחויות.

ב. דיאגרמת מקלות.

ג. היסטוגרמה.

ד. דיאגרמת עוגה.

שאלה 3

מהו השכיח של התפלגות הנתונים שנאספו?

א. 2

ב. 1

ג. 3

ד. 10

שאלה 4

התווסף עוד ילד עם רמת בטחון עצמי נמוכה לכן סטיית התקן של המשתנה הנחקר כתוצאה מההוספה:

א. תגדל
ב. תקטן
ג. לא תשתנה
ד. אין לדעת

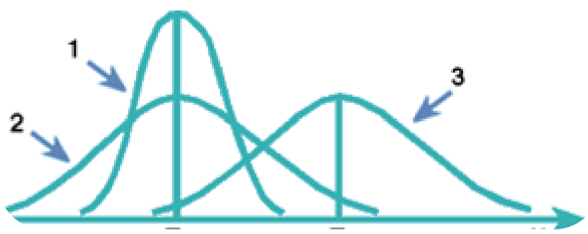
שאלה 5

אם נרצה לבדוק האם המוצא (אסיה, אירופה ,אפריקה ,אמריקה) משפיע על ההשכלה בשנים של העובדים נעשה זאת על ידי.

א. מדד הקשר הלינארי.
ב. טבלת שכיחות משותפת.
ג. תרשימי קופסא.
ד. דיאגרמת פיזור.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 6-10

להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



שאלה 6

לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

א. 1
ב. 2
ג. 3
ד. אין לדעת.

שאלה 7

לאיזו התפלגות השכיח הגדול ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת

שאלה 8

במה התפלגות 1 ו 2 זהות?

א. בעשירון העליון.

ב. בממוצע.

ג. בשונות.

ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

שאלה 9

איזה מהמשפטים הבאים נכון לגבי התפלגות מספר 3?

א. הממוצע שווה לחציון בהתפלגות.

ב. הטווח שווה לטווח הבין רבעוני.

ג. העשירון התחתון שווה לעשירון העליון.

ד. סטיית התקן היא אפס.

שאלה 10

לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-11 :
מוכר החליט לתת 20% הנחה לכל המוצרים שבחנות שלו.

נסמן ב- X המחיר של מוצר לפני ההנחה בש״ח וב- Y את המחיר של המוצר אחרי ההנחה בש״ח.
המוכר חישב את המדדים הבאים לפני ההנחה :

ממוצע	80
חציון	70
שונות	300
טווח	48

כמו כן הוא חישב גם את כל הנתונים לגבי המשתנה Y.

שאלה 11

מה יהיה הממוצע של המחירים בש״ח אחרי ההנחה?

ה. 16

ו. 64

ז. 80

ח. 70

שאלה 12

מה יהיה טווח המחירים בש״ח אחרי ההנחה?

א. 9.6

ב. 38.4

ג. 48

ד. 70

שאלה 13

מה תהיה השונות של המחירים אחרי ההנחה?

א. 300

ב. 60

ג. 240

ד. 192

שאלה 14

מהו מקדם ההשתנות (CV) של המחירים לפני ההנחה?

א. 3.75

ב. 0.267

ג. 0.2165

ד. 4.619

שאלה 15

אם המוכר יחשב את מקדם המתאם על X ו-Y התוצאה שתתקבל תהיה?

א. 0

ב. 1

ג. -1

ד. אין לדעת .

שאלה 16

בהתפלגות אסמטרית ימנית סטיית התקן יותר גדולה מאשר בהתפלגות אסמטרית שמאלית.

א. הטענה תמיד נכונה.

ב. הטענה תמיד אינה נכונה בהכרח.

ג. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

שאלה 17

ביחס לציר המספרים רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים :

א. בערכים הגבוהים.

ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.

ג. בערכים הנמוכים.

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 18

הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

א. תגדיל את סטיית התקן.

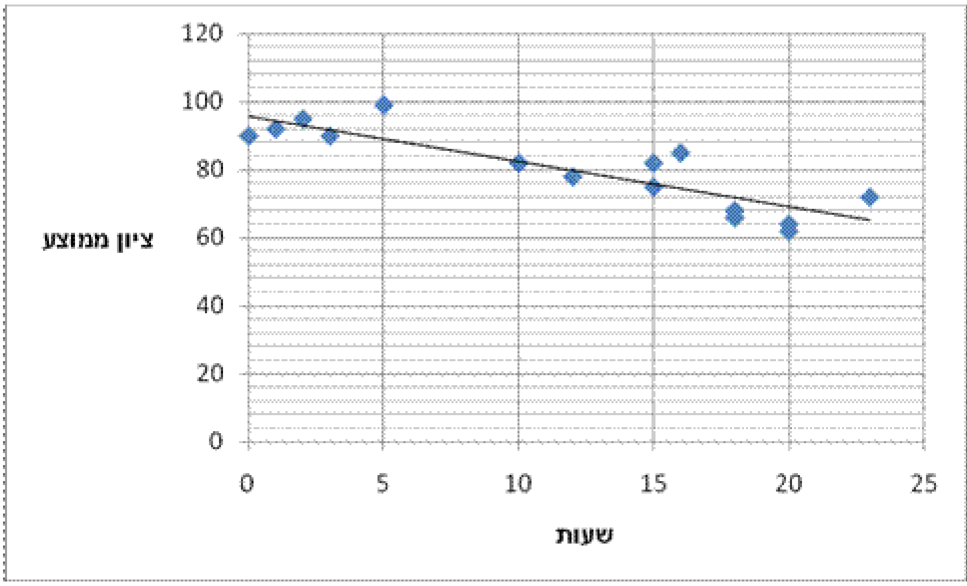
ב. תקטין את סטיית התקן.

ג. לא תשנה את סטיית התקן.

ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 19-21

חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר בעזרת האקסל דיאגרמת פיזור. החוקר אף הוסיף לדיאגרמה את קו המגמה המתאים לנתונים.



שאלה 19

מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

א. ציון ממוצע.

ב. מספר שעות לבילוי.

ג. מספר הסטודנטים.

שאלה 20

מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

(הסתמכו על הנתונים ולא על דעתכם האישית...)

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.

ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.

ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.

ד. ככל שהציון יורד הסטודנט מבלה פחות.

שאלה 21

איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?

א. 0.85

ב. 0.15

ג. -0.85

ד. -0.15

שאלה 22

סטיית התקן של משתנה מסוים X- הייתה 2. הוחלט לבצע טרנספורמציה למשתנה לפי הקשר הבא: $Y = 3X - 2$.

שונות Yאחרי הטרנספורמציה היא:

א. 4

ב. 6

ג. 10

ד. 12

ה. 36

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 23-25

בכיתה 30 סטודנטים אותם 30 נבחנו במבחן באנגלית ובמבחן בסטטיסטיקה .

להלן פלט לגבי ציונים :

	אנגלית	סטטיסטיקה
ממוצע	90	80
שונות	121	100

שאלה 23

באיזה מקצוע להתפלגות הציונים פיזור יחסית יותר גבוה?

א. אנגלית.

ב. סטטיסטיקה

ג. אותו פיזור בשני המקצועות באופן יחסי.

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

שאלה 24

יערה קיבלה 92 באנגלית ו821 בסטטיסטיקה. באיזה מקצוע היא יותר טובה יחסית לכיתתה?

א. אנגלית.

ב. סטטיסטיקה

ג. אותו דבר יחסית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

שאלה 25

עודד שקיבל 80 בסטטיסטיקה העתיק בבחינה. הוחלט לחשב מחדש את השונות של הציונים בסטטיסטיקה בלעדיו. השונות החדשה :

א. תקטן

ב. תגדל

ג. לא תשתנה

ד. אין לדעת

שאלה 26

חושב הטווח הבין רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס. לכן :

א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.

ב. סטיית התקן היא אפס.

ג. ההתפלגות היא סימטרית.

ד. מצב זה כלל לא יתכן.

שאלה 27

נתונה התפלגות של משתנה כלשהו.

א. הטווח של 20% התצפיות הגבוהות ביותר שווה לטווח של 20% התצפיות הנמוכות ביותר.

ב. הטווח של 50% התצפיות המרכזיות הינו הטווח הבין רבעוני.

ג. הרבעון העליון שווה לרבעון התחתון.

ד. הטווח הבין רבעוני הוא מחצית מהטווח.

הנתונים הבאים מתייחסים לכל השאלות 28-29

חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון במבחן הרשות בסטטיסטיקה ומימון לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות : הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

שאלה 28

על פי משוואת הרגרסיה של שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב :

א. 1.5 נקודות.

ב. 0.53 נקודות.

ג. 0.66 נקודות.

ד. 1.20 נקודות

ה. 0.96 נקודת.

שאלה 29

על פי משוואת הרגרסיה תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון :

א. 29.

ב. 0.

ג. 33.

ד. 24.

ה. 26.

שאלה 30

אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא שלילי אזי :

א. הערכים של המשתנים הם שליליים.

ב. ככל שמשתנה אחד עולה השני עולה.

ג. ככל שמשתנה אחד יורד השני יורד.

ד. קיימת טרנספורמציה לינארית שלילית בין שני המשתנים.

ה. אף טענה אינה נכונה.

שאלה 31

בתיק 10 מניות . בהנחה שהמניות לא תלויות זו בזו והסיכוי שביום מסוים מניה תעלה 0.6.
מה סטית התקן של מספר המניות שייעלו ביום מסוים?

א. 6

ב. 2.4

ג. 1.55

ד. 2.46

שאלה 32

הסטטיסטיקאית המפורסמת זהבה טוענת כי כאשר מאורעות E ו- F הינם זרים, ניתן לומר כי הסתברות שמאורע E וגם מאורע F יתקיימו, שווה למכפלת ההסתברות כי מאורע E לבדו יתקיים בהסתברות כי מאורע F לבדו יתקיים (או בכתיב מתמטי($P(E\cap F)=P(E)\times P(F)$)
האם זהבה צודקת בטענתה?

א. לא ניתן לדעת

ב. לא

ג. כן

ד. המונח "מאורעות זרים" לא קיים בסטטיסטיקה

ה. אף תשובה לא נכונה

שאלה 33

ככל שההתפלגות הנורמאלית חדה וצרה יותר במרכזה אזי:

א. השונות שלה יותר גבוהה

ב. הממוצע שלה יותר גבוה

ג. היא מייצגת אנשים גבוהים יותר

ד. השונות שלה נמוכה יותר

ה. החציון שלה גבוה יותר

שאלה 34

נתונה סדרה של N מדידות שלא כולן זהות.

נניח ששתי מדידות נוספות צורפו לסדרה ושתיהן זהות לממוצע הסדרה. האם וכיצד תשנה הוספת שני הערכים החדשים את שונות הסדרה?

א. שונות הסדרה תקטן

ב. שונות הסדרה תגדל

ג. לא ניתן לדעת, זה תלוי במספר התצפיות

ד. לא ניתן לדעת, זה תלוי בערכו של הממוצע

שאלה 35

הוותק הממוצע של עובדי מפעל מסוים הוא 12 שנים וסטיית התקן של הוותק 8 שנים. בעוד 3 שנים – אם כל העובדים ימשיכו לעבוד במפעל ולא יתווספו עובדים חדשים – נקבל כי:

א. הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 8 שנים

ב. הממוצע 12 שנים וסטיית התקן 11 שנים

ג. הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 11 שנים

ד. הממוצע 12 שנים וסטיית התקן 8 שנים

שאלה 36

שני סטודנטים עזבו את החוג לכלכלה. הציון של כל אחד מהם היה שווה לציון הממוצע . כיצד תשפיע עזיבתם על הממוצע ושונות ציוני התלמידים הנותרים ? אם הממוצע לפני העזיבה היה 80 והשונות 100.

א. הממוצע לא ישתנה והשונות תגדל.

ב. הממוצע לא ישתנה והשונות תקטן.

ג. הממוצע לא ישתנה והשונות לא תשתנה.

ד. הממוצע יקטן והשונות תגדל.

ה. הממוצע יגדל והשונות תקטן.

שאלה 37

החציון של סדרת נתונים מסוימת הוא 90. הוסיפו שתי תצפיות נוספות: 100 ו- 20, לכן החציון:

א. יקטן.

ב. יגדל.

ג. לא ישתנה.

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 38

סטיית התקן של המשכורות בחברה הנה 3000 ₪ אם נוסיף לכל עובדי החברה 200 ₪ לשכר אז:

א. סטיית התקן תגדל אך אין לדעת בכמה.

ב. סטיית התקן תגדל בהכרח ב – 200 ₪.

ג. סטיית התקן לא תשתנה.

ד. סטיית התקן תקטן.

ה. לא ניתן לדעת .

שאלה 39

בתיק השקעות 5 מניות. נגדיר את המאורע: אף מניה לא תעלה מחר מבין מניות התיק.
המאורע המשלים למאורע זה הוא (הנח שמניה יכולה או לעלות או לרדת בלבד).

א. לפחות מניה אחת תעלה.

ב. לפחות מניה אחת תרד

ג. כל המניות יעלו.

ד. בדיוק מניה אחת תעלה.

שאלה 40

ממוצע של סידרת נתונים הנה 50 וסטיית התקן 10. אם נוסיף עוד שתי תצפיות שערכן 50 סטיית התקן:

א. תקטן.

ב. תגדל.

ג. לא תשתנה.

ד. אין לדעת.

שאלה 41

בהתפלגות אסימטרית עם זנב ימני ציון התקן של הרבעון התחתון:

א. בהכרח שלילי.

ב. בהכרח חיובי.

ג. אפס.

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 42

אם השונות של המשתנה שווה אפס. מה ניתן לומר על המשתנה?

א. עולה.

ב. יורד

ג. קבוע

ד. נורמלי

ה. לא ניתן לדעת

שאלה 43

נתון משתנה מקרי W עם שונות 10 .

מה תהיה השונות אם נכפיל את ערכי המשתנה W פי 2 ?

א. 20

ב. 10

ג. 400

ד. 40

ה. 0

שאלה 44

נמצא שקיים מקדם מתאם חיובי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן :

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו חיוביים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

שאלה 45

נתונים שני מאורעות המקיימים : $P(A \cup B) = 0.95$ $\quad P(B) = 0.5$ $\quad P(A) = 0.45$

איזו טענה נכונה לגבי המאורעות הללו ?

א. המאורעות בלתי תלויים.

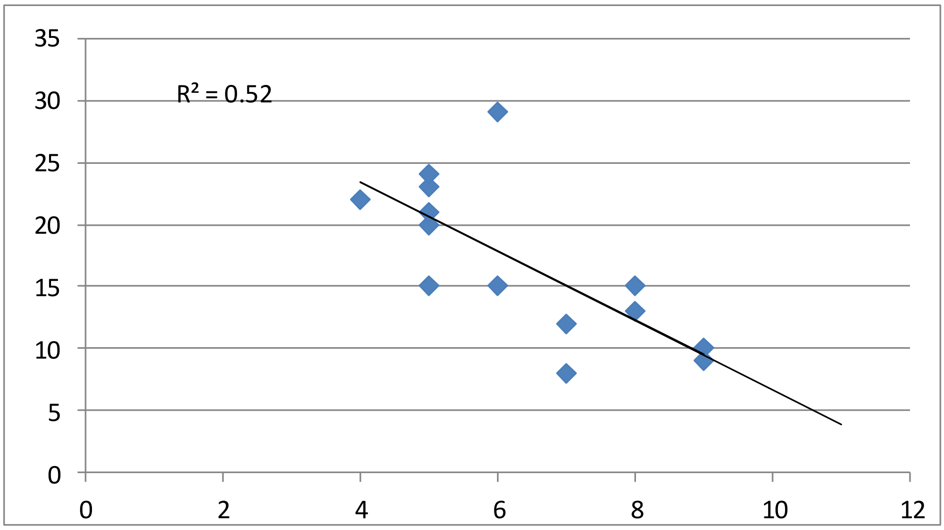
ב. המאורעות זרים.

ג. המאורע B מכיל את המאורע A .

ד. המאורעות משלימים .

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 46-48

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים X (משתנה בלתי תלוי-בציר האופקי) ו- Y (משתנה תלוי), כמו כן הועבר קו הרגרסיה וחושב ריבוע מקדם המתאם.



שאלה 46

לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של מקדם המתאם שתופעל על הנתונים?

א. 0.52

ב. -0.52

ג. -0.72

ד. 0.72

שאלה 47

מה תהיה התוצאה הכי מתאימה לפרמטר b ברגרסיה?

א. 0.52

ב. 2.79

ג. -2.79

ד. -0.52

שאלה 48

מהו טווח התפלגות התצפיות של המשתנה הבלתי תלוי –X?

א. 5
ב. 12
ג. 6.5
ד. 7

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 49-51

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים :

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

שאלה 49

איזו טענה מהטענות הבאות נכונה?

א. המספר המקסימלי של העובדים במפעל הוא 17 עובדים.
ב. התפוקה הכוללת במשך ה- 40 ימים הללו הייתה 192,000 מצברים.
ג. הטווח של התפלגות תפוקת המצברים הוא 20 מאות.
ד. אף אחת מהטענות לא נכונה.

שאלה 50

לפי קריטריון CV (מקדם ההשתנות)

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.
ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.
ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.
ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

שאלה 51

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.

מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים?

א. חריגים באותה מידה.

ב. כמות הפועלים.

ג. התפוקה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

שאלה 52

התפלגות הציונים במבחן מסוים היא סימטרית לכן:

א. סטיית התקן של הציונים היא אפס.

ב. הציון החציוני שווה לציון הממוצע.

ג. העשירון העליון שווה לעשירון התחתון של הציונים.

ד. כל הטענות בשאר הסעיפים לא נכונות.

שאלה 53

מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7 . אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, אזי מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה של 10 המשפחות הנ"ל:

א. לא ישתנה ויישאר 0.7.

ב. יהפוך להיות 0.7 - .

ג. אין מספיק נתונים כדי לדעת מה יהיה מקדם המתאם.

ד. אפשר לדעת רק מה יהיה מקדם המתאם באוכלוסייה כולה.

ה. בין 0.7 ל- -0.7.

שאלה 54

איזה מהמשפטים הבאים אינו נכון?

א. אם מוסיפים קבוע לתצפיות הדבר לא משפיע על פיזור הנתונים.

ב. בהתפלגות סימטרית הממוצע שווה לשכיח.

ג. אם כל התצפיות זהות סטיית התקן בהכרח אפס.

ד. הכפלה בקבוע משנה את סטיית התקן.

שאלה 55

איזה מהמשפטים הבאים נכון?

א. הטווח הבין רבעוני הוא אפס רק אם כל הצפיות זהות.

ב. הרבעון העליון שווה לרבעון התחתון בהתפלגות סימטרית.

ג. בהתפלגות סימטרית החציון שווה לממוצע.

ד. 90% מהתצפיות נמצאות מעל האחוזון התשעים.

שאלה 56

מעוניינים למצוא את הסיכוי לאיחוד שני מאורעות. מותר לחבר הסתברויות אלה בשביל זה ,רק אם המאורעות :

א. זרים.

ב. לא זרים

ג. תלויים

ד. בלתי תלויים

שאלה 57

במכון לשטיפת מכוניות זמן שטיפת המכונית מתפלג נורמלית עם תוחלת של 25 דקות וסטיית תקן של 5 דקות. מחיר שטיפת מכונית הוא 40 ₪ אם זמן שטיפת המכונית הוא עד 25 דקות.
אם זמן שטיפת המכונית עובר את 25 הדקות משלמים 20 שקלים בלבד.
עידן הכניס את המכונית לשטיפה. מהי תוחלת התשלום של השטיפה?

א. 30 ₪

ב. 32.5 ₪

ג. 35 ₪

ד. 25 ₪

ה. לא ניתן לחשב ללא נתונים נוספים

שאלה 58

הכפלה בגודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

א. תגדיל את סטיית התקן.

ב. תקטין את סטיית התקן.

ג. לא תשנה את סטיית התקן.

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 59

בעיר "חולית", בקיץ, כמות הגשם היורד בחודש מתפלג נורמלית עם תוחלת 10 מ"מ וסטיית התקן 2, ובחורף עם תוחלת 10 מ"מ וסטיית התקן 3.

איפה יש יותר סיכוי שירד יותר מ 12 מ"מ גשם?

א. בקיץ

ב. בחורף

ג. סיכוי שווה.

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 60

בהתפלגות שבה המאון ה-40 שווה לממוצע. ציון התקן של הממוצע יהיה:

א. חיובי.

ב. שלילי.

ג. אפס.

ד. לא ניתן לדעת.

פתרונות:

1	ב	11	ב	21	ג	31	ג	41	א	51	ב
2	ב	12	ב	22	ה	32	ב	42	ג	52	ב
3	ג	13	ד	23	ב	33	ד	43	ד	53	א
4	א	14	ג	24	ב	34	א	44	ב	54	ב
5	ג	15	ב	25	ב	35	א	45	ב	55	ג
6	ג	16	ג	26	א	36	א	46	ג	56	א
7	ג	17	ג	27	ב	37	ג	47	ג	57	א
8	ב	18	ג	28	ד	38	ג	48	א	58	ד
9	א	19	ב	29	א	39	א	49	ב	59	ב
10	א	20	א	30	ה	40	א	50	ב	60	ג

פרק 72 - נוסחת התוחלת השלמה

רקע:

אם נזהה שהתפלגות של משתנה X תלויה במשתנה אחר Y מתקיים ש:

$$E(X)=E\left[E(X/Y)\right]$$

עבור משתנה Y בדיד כלשהו:

$$E(X)=\sum_{y}E(X\,|\,Y=y)\cdot P(Y=y)$$

עבור משתנה Y רציף כלשהו:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}E(X\,|\,Y=y)\cdot f(y)dy$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

מרצה מלמד שתי כיתות. הוא מעוניין לבדוק 5 מחברות בחינה. בכיתה מספר 1: 10 בנים ו- 20 בנות.

בכיתה מספר 2: 15 בנים ו-15 בנות. המרצה בוחר כיתה באופן מקרי וממנה בוחר 5 מחברות בחינה באקראי. יהי X מספר מחברות הבחינה של בנים שנבחרו. יש לחשב את E(X).

תרגילים:

1. בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. שולפים כדור באקראי. אם הכדור ירוק מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 1. אם הכדור כחול מטילים קובייה עד אשר מתקבלת התוצאה 5. אם הכדור אדום מטילים קובייה עד אשר מתקבלת תוצאה זוגית. חשבו את תוחלת מספר הפעמים שהקובייה הוטלה.

2. מטילים n מטבעות ומוציאים מהמשחק את כל המטבעות שהראו ראש.כעת מטילים את כל המטבעות שנותרו. בטאו באמצעות n את תוחלת מספר הראשים שהתקבלו בסבב השני של ההטלות.

3. בהגרלה מבצעים את התהליך הבא: בסיכוי 0.25 מגרילים מספר ממכונה A בסיכוי 0.75 מגרילים מספר ממכונה B. במכונה A המספר המוגרל מתפלג פואסונית עם תוחלת 6. במכונה B המספר המוגרל מתפלג פואסנית עם תוחלת 2.
אם הוגרל המספר 0 זוכים ב15 ₪. אחרת זוכים ב-50 ₪. חשבו את תוחלת סכום הזכיה.

4. נתון ש $Y/X \sim U(0,X)$ כאשר פונקציית הצפיפות של X הינה:

$$f(x)=\begin{cases} 0.1 & 2\le x\le 6 \\ 0.2 & 6<x\le 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשבו את E(Y).

5. בתכנית הריאליטי "המרוץ למיליון" מגיעים לנקודה שבה שלוש אפשרויות בפני המתמודדים:
נקודה A שבה חוזרים אחרי 1 שעות לנקודת המוצא.
נקודה B שבה חוזרים אחרי 2 שעות לנקודת המוצא.
נקודה C המובילה תוך 2 שעות לנקודת הסיום.
המתמודדים בוחרים בכל פעם את הנקודה באופן מקרי. נסמן ב-X את זמן ההגעה לנקודת הסיום.
חשבו את E(X).

<u>פתרונות:</u>

<u>שאלה 1</u>

4.4

<u>שאלה 2</u>

$$\frac{n}{4}$$

<u>שאלה 3</u>

46.4

<u>שאלה 4</u>

3.05

<u>שאלה 5</u>

5

פרק 73 - חישוב תוחלת ושונות על ידי פירוק לאינדיקטורים

רקע:

נלמד שיטה לחישוב תוחלת ושונות של משתנה מקרי על ידי פירוקו לסכום של משתני אינדקטור.

אינדיקטור הינו משתנה שפונקציית ההסתברות של נראית כך :

X	1	0
P(X)	P	1-P

נגיד ש X_i הינו משתנה אינדיקטור כאשר i=1,2,…,n ו $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

נעזר בנוסחאות תוחלת ושונות סכום משתנים מקרים כדי לחשב את התוחלת והשונות של X.

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$V(X)=V(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)+2\cdot\sum_{i<j} COV(X_{i,}X_j)$$

כאשר עבור משתנים אינדיקטורים מתקיים ש :

$$E(X_i)=P(X_i=1)$$

$$V(X_i)=P(X_i=1)\cdot P(X_i=0)$$

$$COV(X_i,X_j)=P(X_i=1,X_j=1)-P(X_i=1)P(X_j=1)$$

דוגמה :(פתרון בהקלטה).

יוסי החליט להזמין 8 חברים למסיבת יום הולדתו. הוא הכין 8 הזמנות שעליהן רשם את השם של כל אחד מהחברים. ההזמנות הוכנסו למעטפות וחולקו באקראי ל-8 החברים. נסמן ב-X את מספר ההזמנות שהגיעו לחבר הנכון. חשבו את E(X) ואת V(X).

תרגילים:

1. יהיו X ו-Y משתני אינדיקטורים.

הוכיחו ש:

$$E(X)=P(X=1)$$
$$V(X)=P(X=1)\cdot\left[1-P(X=1)\right]$$
$$COV(X,Y)=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)$$

2. 400 אנשים נבחרו מכלל האוכלוסייה.

א. חשבו את הסיכוי שביום מסוים בשנה יהיה בדיוק אדם אחד מתוך ה-400 שיש לו יום הולדת.

ב. נגדיר את X_i משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם ביום i בדיוק אדם אחד מתוך ה400 עם יום הולדת באותו היום. חשבו את התוחלת והשונות של X_i.

ג. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הימים בשנה שבהם יש יום הולדת בדיוק לאחד מ400 האנשים הללו.

3. 3 משחקים הוכנסו באקראי ל-5 מגרות. מגירה יכולה להכיל יותר ממשחק אחד. נסמן ב-W את מספר המגרות בהן בדיוק משחק אחד. חשבו את התוחלת והשונות של W על ידי פירוק לאינדיקטורים.

4. A, B ו- C הם שלושה מאורעות כך ש:

$$P(A)=0.3,\ \ P(B)=0.2,\ \ P(C)=0.1$$

נגדיר את Y להיות מספר המאורעות מתוך השלושה שמתקיימים.

חשבו את התוחלת והשונות של Y כאשר:

א. המאורעות בלתי תלויים זה בזה.

ב. $C\subset B\subset A$

ג. A, B,ו-C זרים זה לזה.

5. מטילים קובייה 10 פעמים. נסמן ב-W את מספר התוצאות השונות שהתקבלו.

א. מצאו את E(W)

ב. מצאו את V(W)

6. מסדרים בשורה 6 כוסות קולה ו-4 כוסות מים. רצף של שתי כוסות נקרא "ג'נק" אם שתי הכוסות הן ברצף של קולה.

נסמן ב-X את מספר הרצפים מסוג "ג'נק" שיש לשתי כוסות. למשל, הסידור הבא:

קולה, מים, מים,קולה, מים,קולה, מים, קולה, קולה, קולה, $X=2$.

חשבו את התוחלת והשונות של X.

7. מסדרים בשורה n זוגות גרביים באקראי (בסך הכול 2n גרבים). חשבו את התוחלת והשונות של מספר הזוגות מתוך n הזוגות שבהם זוג הגרביים אינם עומדים זה לצד זה.

8. בקייטנה 100 ילדים. מחלקים לכל ילד 2 ארטיקים מתוך 200 הארטיקים שנרכשו לקייטנה. מתוך 200 הארטיקים שנרכשו 100 בטעם תות ו-100 הם בטעם לימון. נסמן ב-X את מספר הילדים שקיבלו 2 ארטיקים בטעמים שונים. נסמן ב-Y את מספר הילדים שקיבלו שני ארטיקים בטעם לימון.

א. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ב. בטאו את Y כפונקציה של X וחשבו את התוחלת והשונות של Y.

ג. מהי השונות המשותפת של X ו-Y?

פתרונות :

שאלה 3

תוחלת : 1.92, שונות : 1.1136

שאלה 4

תוחלת בכל המקרים : 0.6

שונות :

א. 0.46 ב. 1.04 ג. 0.24

שאלה 5

א. 5.03

ב. 0.568

שאלה 6

תוחלת : 3

שונות : $\frac{2}{3}$

שאלה 7

תוחלת : n-1 שונות : $1-\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2(2n-1)}$

שאלה 8

א. תוחלת : 50.251

שונות : 25.126

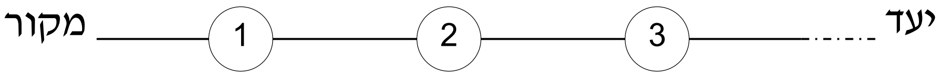
ב. $Y=-0.5X+50$

ג. -12.563

פרק 74 - מערכות חשמליות

רקע:

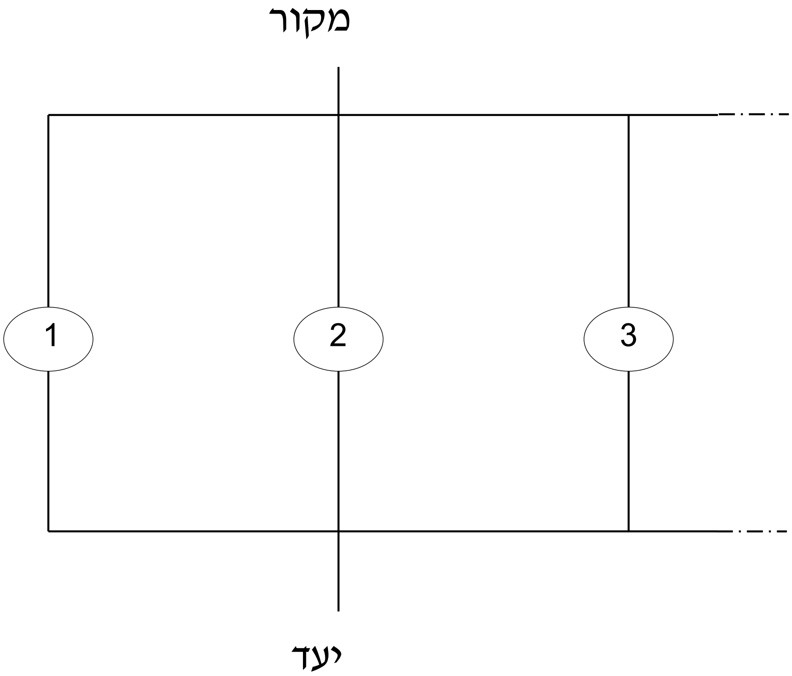
מערכת חשמלית בטור הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא :



נסמן ב A_i את המאורע : רכיב i פועל.

כדי שהמערכת כולה תפעל צריך להתקיים ש $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

מערכת חשמלית במקביל הינה מערכת חשמלית בה הרכיבים מסודרים באופן הבא :



כדי שהמערכת החשמלית כולה תפעל צריך להתקיים ש : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

<u>דוגמא</u>: הפתרון בהקלטה.

במערכת חשמלית 4 רכיבים בלתי תלויים שלכל אחד מהם סיכוי P לפעול. בטאו באמצעות P את הסיכוי שהמערכת תפעל.

א. כל הרכיבים מחוברים בטור זה לזה.

ב. כל הרכיבים מחוברים במקביל זה לזה.

תרגילים :

1. נתונים שלושה רכיבים חשמליים המחוברים בטור. אורך החיים של כל מכשיר מתפלג באופן הבא :

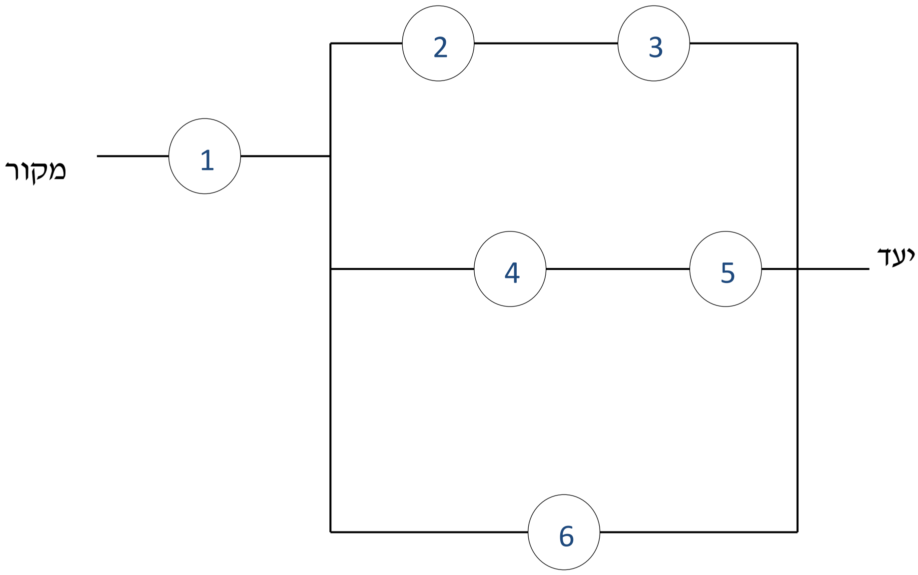
$X_1 \sim U(2,4)$

$X_2 \sim N(3,1)$

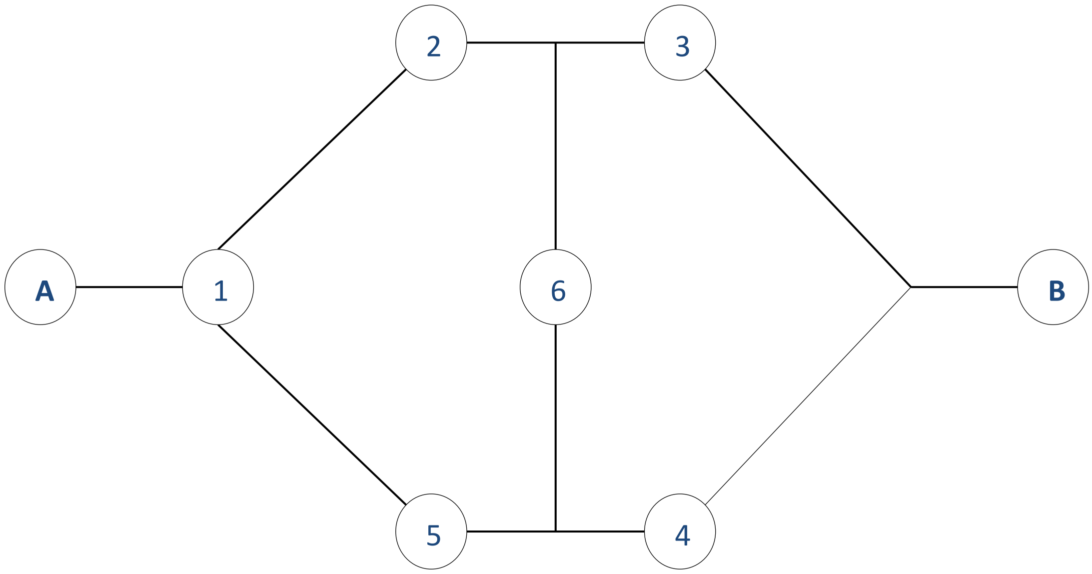
$X_3 \sim \exp(1)$

כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. כל הרכיבים הופעלו כעת. מה הסיכוי שבעוד 3 שעות המערכת תפעל?

2. המערכת החשמלית הבאה מכילה 6 רכיבים כמוראה בשרטוט :



כל רכיב פועל באופן בלתי תלוי זה לזה. רכיבים מספר 1, 2,6 פועלים בסיכוי 0.9 . רכיב מספר 3 פועל בסיכוי 0.8. רכיבים מספר 4,5 פועלים בסיכוי P.מצא את P אם הסיכוי שהמערכת תפעל הוא 0.887148.

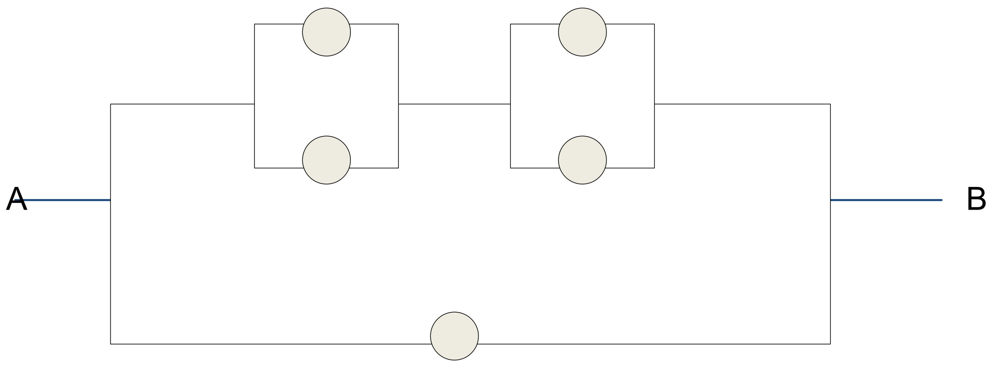


בין שני המחשביםAו- B נמצאים 6 שרתים כמוראה בשרטוט. כל אחד מהשרתים תקין בסיכוי 0.9. על מנת שהודעה תצליח לעבור ממחשב A ל-B צריך להיות לפחות מסלול אחד שבו כל השרתים תקינים.

א. מה ההסתברות לכך שההודעה תעבור בהצלחה ממחשב A ל-B?

ב. ההודעה לא הצליחה לעבור ממחשב A למחשב B. מה הסיכוי ששרת מספר 1 לא תקין?

3. נתונה המערכת החשמלית הבאה:



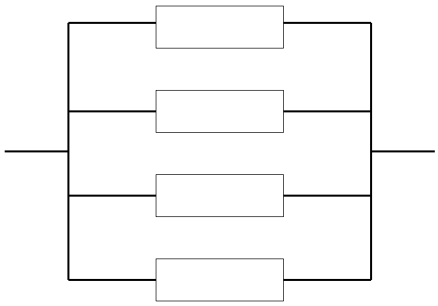
כל יחידה עובדת באופן בלתי תלוי ובהסתברות p.

כדי שהמערכת תפעל צריך לעבור זרם מהנקודה A לנקודה B.

הוכח שהסיכוי שהמערכת תפעל:

$$P+(1-P)(2P-P^2)^2$$

4. מערכת חשמלית כוללת 4 רכיבים אלקטרוניים זהים הפועלים במקביל כמוראה בשרטוט:



על מנת שהמערכת תפעל בצורה תקינה נדרש שלפחות אחד מהמרכיבים יהיה תקין.
אורך החיים של כל רכיב מתפלג מעריכית עם ממוצע של 100שעות.

ג. מה ההסתברות שהמערכת תפעל בצורה תקינה במשך 100 שעות לפחות?

ד. מעוניינים להוסיף במקביל עוד רכיב למערכת. עלות הוספת רכיב היא K ₪. כמו כן אם המערכת עבדה פחות מ-100 שעות נגרם הפסד של A ₪.
מה התנאי שבו יהיה כדאי להוסיף את הרכיב למערכת?

פתרונות :

שאלה 1

0.1245

שאלה 2

0.7

שאלה 3

א. 0.880632

ב. 0.837745

שאלה 5

א. 0.8403

ב. $0.0588A > K$

פרק 75 - התפלגות מינימום ומקסימום

רקע:

התפלגות מקסימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה. נגדיר את

$$U = \max(x_1, x_2, \dots x_n)$$

מתקיים ש:

$$F_U(t) = (F_X(t))^n$$

ולכן:

$$f(u) = n \cdot (F_x(u))^{n-1} \cdot f_x(u)$$

התפלגות מינימום:

נניח ש- X_i הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי אותה התפלגות רציפה. נגדיר את

$$Z = \min(X_1, X_2 \dots, X_n)$$

מתקיים ש:

$$F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n$$

ולכן: $f(z) = n \cdot [1 - F_x(z)]^{n-1} \cdot f_x(z)$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

$$X_i \sim \exp(\lambda)$$

הוכח ש: $\min(x_i) \sim \exp(n\lambda)$ $\quad\quad i = 1, 2, \dots n$

תרגילים:

1. א.הוכח שאם X_i מתפלג רציף עבור כל $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקצית צפיפות $f(x)$ ו- $Z=\min(X_1,X_2...X_n)$.

מתקיים ש: $f(z)=n[1-F_X(z)]^{n-1}\cdot f_x(z)$

ב. הוכח שאם X_i מתפלג רציף עבור כל $i=1,2,...,n$ באופן בלתי תלוי עם פונקצית צפיפות $f(x)$ ו - $U=\max(x_1,x_2,...x_n)$.

מתקיים ש: $f(u)=n\cdot(F_x(u))^{n-1}\cdot f_x(u)$

2. אורך חיי רכיב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 יום.
א. מכשיר בנוי מ-3 רכיבים בלתי תלויים המחוברים במקביל. בנו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של אורך חיי מכשיר.
ב. חזרו על סעיף א' אם הרכיבים מחוברים בטור.
ג. מה התוחלת והשונות של אורך חיי המכשיר המתואר בסעיף ב?

3. בכיתה 30 תלמידים, כל תלמיד נרדם תוך זמן המתפלג אקספוננציאלית עם קצב של 8 הירדמויות בשעה. המורה צועק אחרי שנרדם התלמיד הראשון ועוזב את הכיתה שנרדם התלמיד האחרון.
א. מה הסיכוי שיצעק אחרי פחות מדקה?
ב. מה הסיכוי שיצא מהכיתה אחרי פחות מדקה?

4. שלושה אנשים משתתפים בתחרות ריצה של 100 מטרים. כל אחד מהם רץ את המרחק בזמן שהוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה בתחום בין 10 ל-12 שניות.
א. מה הסיכוי שהמנצח סיים את הריצה בזמן הגבוה מ-10.5 שניות?
ב. מה הסיכוי שהמפסיד סיים את הריצה בזמן הנמוך מ-11.2 שניות?
ג. מהי התפלגות זמן הריצה של המפסיד בתחרות? מצא את התוחלת והשונות שלו?

5. X_1,X_2 מתפלגים נורמאלית סטנדרטית. נגדיר את $Z=\min(X_1,X_2)$ ואת $Y=\max(X_1,X_2)$
א. חשב $P(z>1)$
ב. חשב $P(Y>1)$
ג.חשב $P(Y>1/Y>0)$

6. רונית נכנסת למכון יופי. היא מבצעת טיפול פדיקור ומניקור בו זמנית. משך זמן הפדיקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות ומשך זמן המניקור מתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות.
נניח שאין תלות במשך זמן הטיפול של המניקור והפדיקור.
א. מצא את ההסתברות שמשך זמן הטיפול לא יעלה על שעה.
ב. ידוע שמשך זמן טיפול הפדיקור עלה על 10 דקות. מה ההסתברות שמשך זמן בטיפול במכון היופי לא יעלה על 20 דקות?

7. נתון ש: $X\sim \exp(\lambda)$ ו- $Y\sim \exp(\mu)$. $U=\min(x,y)$ כמו x,y בלתי תלויים. הוכח ש
$U\sim \exp(\mu+\lambda)$

8. X_1 ו- X_2 שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים אחיד בין 0 ל- 1. נגדיר $Y=\max(x_1,x_2)$. חשב את $P(Y>0.5)$

9. נתון ש $X_i\sim U(0,2)$ בלתי תלויים זה בזה כאשר $i=1,2,\ldots,5$. מצא את פונקצית הצפיפות של $T=\max(X_i)$

10. נתון משתנה מקרי X בעל פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & o\le x\le 1\\ \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נגדיר את $W=\max(X_i)$ כאשר $i=1,2,\ldots,10$ חשב את $E(W)$

פתרונות:

שאלה 1

הוכחה

שאלה 2

ג. תוחלת : 10

שונות : 100

שאלה 3

א. 0.9817

ב. 0

שאלה 4

א. 0.421875

ב. 0.216

ג. תוחלת : 11.5   שונות : 0.15

שאלה 5

א. 0.02518

ב. 0.2922

ג. 0.3896

שאלה 6

א. 0.9328

ב. 0.2898

שאלה 7

הוכחה

שאלה8

0.75

שאלה 9

$$\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^4$$

שאלה 10

$$\frac{30}{31}$$

פרק 76 - משתנה מקרי דו ממדי רציף

רקע:

יהיו X ו-Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים.

פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי: $f(x,y)$.

פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

1 $f(x,y)\ge 0$ לכל $(x,y)\in R$

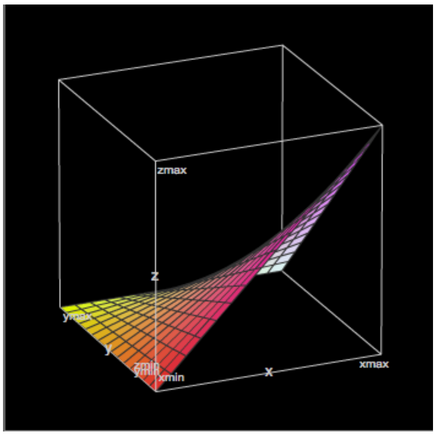
2 $\iint_R f(x,y)dxdy=1$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתונה הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

הראה שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.



פונקציית צפיפות שולית:

פונקציית הצפיפות השולית של X תתקבל באופן הבא :

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

פונקציית הצפיפות השולית של Y תתקבל באופן הבא :

$$f(\mathrm{y})=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

מצא לפונקציית הצפיפות :

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ \\ 0 & else\end{cases}$$

את פונקציית הצפיפות השולית של X וחשב את E(X) דרכה.

אי תלות בן משתנים רציפים

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים אם עבור כל X ו - Y בתחום ההגדרה שלהם, R מתקיים ש : $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

האם X ו Y המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת :

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ \\ 0 & else\end{cases}$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי

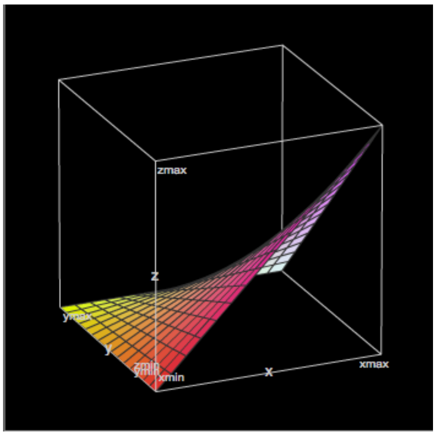
הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x,y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות שX וY יהיו בתחום הזה: $P[(x,y)\in A]=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$

<u>דוגמה:</u> (פתרון בהקלטה)

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ \\ 0 & else\end{cases}$$

חשב את הסיכוי $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.



פונקציית התפלגות מצטברת משותפת

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים :

$$F(s,t)=P(X\le s\cap Y\le t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s}f(x,y)dxdy$$

<u>דוגמה :</u>(פתרון בהקלטה)

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות :

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ \\ 0 & else\end{cases}$$

מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת ועל פיה חשב את הסיכוי :
$P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית צפיפות מותנית

אם ל – X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת f(x,y) אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X בהינתן ש $Y = y$ לכל ערכי y המקיימים $f(y) > 0$ על ידי :

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

ובאופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש $X = x$ לכל ערכי x המקיימים $f(x) > 0$ על ידי : $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$.

<u>**דוגמה :**</u>(פתרון בהקלטה)

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות :

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

מצא את $f(x|y)$

תוחלת מותנית

ל – X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת f(x,y) .

התוחלת של X בהינתן ש $Y=y$ תהיה : $E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{-\infty} x\cdot f(x\mid y)dx$.

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש $X=x$ תהיה : $E(Y\mid X=x)=\int_{-\infty}^{-\infty} y\cdot f(y\mid x)dy$.

<u>דוגמה :</u> (פתרון בהקלטה)

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות :

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

מצא את $E(X\mid Y)$

תרגילים:

1. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=x+y$ המוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 1$ וגם $0\le y\le 1$. הוכח שמדובר בפונקציית צפיפות.

2. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=Ax(x-y)$ המוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 2$ וגם $-x\le y\le x$. מצא את ערכו של הפרמטר A.

3. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{(x\cdot y)^3+x\cdot y}{C}$ המוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 1$ וגם $0\le y\le 1$.

   א. מצא את ערכו של C.
   ב. מצא את $f(y)$.
   ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4. משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{1}{800}$ המוגדרת בתחום שבו $60\le x\le y$ וגם $60\le y\le 100$.

   א. הראה שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.
   ב. מצא את פונקציית הצפיפות השולית של Y.
   ג. חשב את $V(X)$ $E(X)$.
   ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
   ה. חשב את מקדם המתאם בין X ל- Y.
   ו. חשב את הסיכוי: $P(Y>X+10)$

5. משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\lambda\mu\cdot e^{-(\lambda x+\mu y)}$
המוגדרת בתחום שבו $x,y>0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y.
ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?
ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y?
ד. חשב את הסיכוי: $P(Y>X)$.

6. Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע $[2,4]$.
בנוסף נתון ש X הינו משתנה מקרי רציף המקיים:
$f\left(x|y\right)=\dfrac{2x}{y^2}\quad 0\le x\le y$. מצא את השונות המשותפת של X ו Y.

7. נתונים שני משתנים מקרים רציפים: X ו Y . פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא:

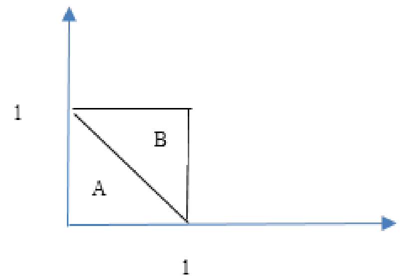
$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} x & 0<y<1 \quad 1-y\le x\le 1+y \\ 0 & \text{אחר ת} \end{cases}$$

א. מצא את $f\left(x\right)$.
ב. מצא את $f\left(y|x\right)$.
ג. מצא את $\mathrm{E}\left(Y|\mathrm{X}\right)$.

8. יהי X ו Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו :
$(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ושל Y.
ג. חשבו את התוחלת של X ושל Y.
ד. האם X ו Y משתנים בלתי מתואמים?
ה. האם X ו Y משתנים בלתי תלויים?

9. פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא :
הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 ואילו הצפיפות על פני משולש B היא 0.5 .



א. האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?
ב. מצאו את $f\left(x\right)$.
ג. מצאו את $f\left(x|y\right)$.

10. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת $f\,(\mathrm{x},\mathrm{y})=cx$ פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו $0\le x\le 1$ וגם $0\le y\le x^2$.
א. מצאו את הקבוע C .
ב. חשבו את ההסתברות ש $6\mathrm{Y}<1-\mathrm{X}$.

11. נתונים X ו Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y\sim U(0,1)$ ו-
$X\,|\,Y=y\sim U(0,\sqrt{y})$ חשב את $E(\mathrm{Y}\,|\,\mathrm{X}=0.5)$

12. נתונה פונקציית הצפיפות $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=2e^{-x}\cdot e^{-2y}$ בתחום שבו $x,y\geq 0$. חשבו את הסיכוי $P(X<Y)$.

13. נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\dfrac{e^{-y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$ פונקציה זו מוגדרת לרביע הראשון.
חשבו את $P(X>1|Y=2)$.

14. יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל 9:00. נניח שבזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה. מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ 10 דקות?

15. נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X\sim N(Y,1)$ ו $Y\sim U(0,2)$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ושל Y.

ב. מצאו את $E(X^2|Y)$

ג. מצאו את $E(X)$

16. פונקציית הצפיפות המשותפת של X ושל Y היא: $f(x,y)=1$ פונקציה זו מוגדרת בתחומי $0\leq x,y\leq 1$

הוכח ש: $E(|X-Y|^n)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

17. $X\sim\exp(1)$ וכמו כן $Y\sim\exp(1)$ הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

נגדיר את $Z=\dfrac{X}{X+Y}$. הוכח: $Z\sim U(0,1)$.

פתרונות:

שאלה 2:

$$A=\frac{1}{8}$$

שאלה 3:

א. $\frac{5}{16}$

ב. $f(y)=0.8y^3+1.6y$

ג. תלויים.

שאלה 4:

א. הוכחה

ב. $f(y)=\frac{y-60}{800}$

ג. $V(X)=88\frac{8}{9}$ $\quad E(X)=73\frac{1}{3}$

ד. לא.

ה. 0.5

ו. 0.5625

שאלה 5:

א. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $\quad f(y)=\mu e^{-\mu y}$

ב. לא.

ג. 0

ד. $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

שאלה 6:

$$\frac{2}{9}$$

שאלה 7:

א.
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-x^2 & 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב.
$$f(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0\le x<1 \quad 1-x<y<1 \\ \frac{1}{2-x} & 1\le x\le 2 \quad x-1<y<1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג.
$$E(y|x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{x}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שאלה 8:

א.
$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & 1+x<y<1-x \quad -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$$

ב.
$$f(x)=\begin{cases} -2x & -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} y & 0\le y<1 \\ 2-y & 1\le y\le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג. $E(X)=-\frac{2}{3} \quad E(Y)=1$

ד. כן.

ה. לא.

שאלה 9:

א. כן.

ב.
$$f\left(x\right)=\begin{cases}1.5-x & 1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$$

ג.
$$f\left(x|y\right)=\begin{cases}\dfrac{1.5}{1.5-y} & 0\le x<1-y\\ \dfrac{0.5}{1.5-y} & 1-y\le x\le 1\\ 0 & \text{אחר ת}\end{cases}$$

שאלה 10:

א. 4

ב. 0.0947

שאלה 11 :

$$\frac{7}{12}$$

שאלה 12:

$$\frac{1}{3}$$

שאלה 13 :

$$e^{-\frac{1}{2}}$$

שאלה 14:

$$\frac{25}{72}$$

שאלה 15:

א.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$$

ב. y^2+1

ג. 1

שאלה 16:

הוכחה.

שאלה 17:

הוכחה.

פרק 77 - קונבולוציה

רקע:

X ו- Y יהיו שני משתנים מקריים בלתי תלויים ונתעניין בהתפלגות סכומם : $T = X + Y$, שגם הוא משתנה מקרי.

אם מדובר במשתנים מקריים רציפים עם פונקציות צפיפות f_X ו- f_Y , פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$, תינתן על ידי נוסחת הקונבולוציה הבאה:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y) \cdot f_Y(y)dy$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נתון : $X \sim \exp(1)$ כמו כן $Y \sim \exp(2)$. מצא את פונקציית הצפיפות של $T = X + Y$.

<u>תרגילים:</u>

1. נתון ש $Y,X \sim \exp(\lambda)$. כמו כן ידוע ש X ו- Y בלתי תלויים. מצא את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

2. נתון ש X ו- Y משתנים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית סטנדרטית הוכח ש $T=X+Y$ מתפלג נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 2.

3. סוללה מסוג A בעלת אורך חיים המתפלג אחיד בין 1 ל 3 שעות . כמו כן נתונה סוללה מסוג B בעלת אורח חיים המתפלג מעריכית עם תוחלת חיים של שעה. מכשיר מופעל על ידי סוללה A וברגע שהסוללה מתרוקנת אוטומטית מופעלת סוללה B. נסמן ב- Z את הזמן הכולל של פעילות המכשיר.
   א. מצא את פונקציית הצפיפות של Z.
   ב. מה הסיכוי שהמכשיר יפעל פחות מ – 4 שעות?

4. X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי פונקציות הצפיפות הבאות:

$$f_X(x)=\frac{1}{4} \quad -2\le x\le 2$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} y+1 & -1\le y\le 0 \\ 1-y & 0\le y\le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

מצא את פונקציית הצפיפות של $X+Y$.

5. X ו- Y משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X\sim U(2,3)$ $Y\sim U(1,5)$.
   א. מהי ההתפלגות של סכום המשתנים הללו?
   ב. מה הרבעון העליון של סכום המשתנים?

6. X, Y ו- Z מתפלגים אחיד רציף באופן בלתי תלוי בין 0 ל- 1. מצא את פונקציית הצפיפות של $X+Y+Z$.

7. הוכח את נוסחת הקונבולוציה עבור המקרה הרציף. (רמז : העזר בפונקציית הצפיפות המשותפת ובהגדרה של משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים).

פתרונות :

שאלה 1

$$f_T(t)=\lambda^2\cdot e^{-\lambda t}\cdot t \qquad t\ge 0$$

שאלה 2

הוכחה

שאלה 3

א.

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{1-z}) & 1\le z\le 3\\ \frac{1}{2}(e^{3-z}-e^{1-z}) & z>3\\ 0 & else\end{cases}$$

ב. 0.841

שאלה 4

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{8}(t+3)^2 & -3\le t\le -2\\ \frac{1}{8}(2-(t+1)^2) & -2<t<-1\\ \frac{1}{4} & -1\le t\le 1\\ \frac{1}{8}(2-(t-1)^2) & 1<t<2\\ \frac{1}{8}(t-3)^2 & 2\le t\le 3\\ 0 & else\end{cases}$$

<u>שאלה 5</u>

א.

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{t-3}{4} & 3\le t\le 4\\ \frac{1}{4} & 4<t>7\\ \frac{8-t}{4} & 7\le t\le 8\end{cases}$$

ב. 4.5

<u>שאלה 6</u>

$$f_W(w)=\begin{cases}\frac{w^2}{2} & 0\le w\le 1\\ -w^2+3w-1.5 & 1<w<2\\ \frac{(3-w)^2}{2} & 2\le w\le 3\end{cases}$$

<u>שאלה 7</u>

הוכחה