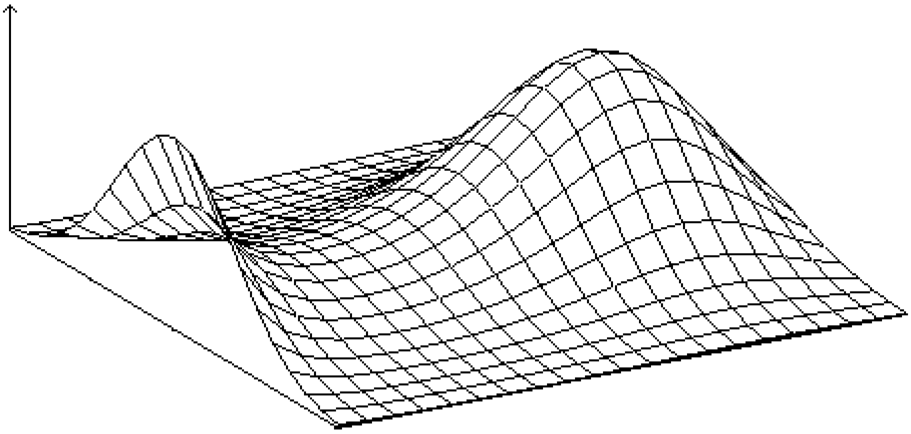
# חשבון
# דיפרנציאלי
# ואינטגרלי
# II



## גיא סלומון

**<u>סטודנטים יקרים</u>**

**ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.**

**שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.**

**הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.**

**הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות.**
**הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.**

**לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר** http://www.gool.co.il **הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.**

**לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: חדוא 2**

**תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.**

**גיא סלומון**

## תוכן

# פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

## טור גיאומטרי

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

## טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

## טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

## תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

## מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan n$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

## מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \, (p>1)$ 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \, (p \le 1)$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

## מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

## מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot K \cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot K \cdot(3n+2)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n!\cdot 3^n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

## מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1}$ 2) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n}$

## **התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי**

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

## **הוכח או הפרך**

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ד. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ה. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

## פתרונות

(1)

1) מתכנס ל- $11/14$ 2) מתכנס ל- $1/3$ 3) מתבדר

4) מתכנס ל- $-64/7$ 5) מתכנס ל- $11/12$ 6) מתכנס ל- 8

(2)

1) מתכנס ל- $1/2$ 2) מתכנס ל- $1/12$ 3) מתבדר

(3)

1) מתכנס 2) מתבדר 3) מתבדר

4) מתבדר 5) מתכנס 6) מתכנס

(4)

1) מתכנס 2) מתבדר 3) מתבדר

(5)

1) מתבדר 2) מתבדר 3) מתבדר

4) מתבדר 5) מתבדר 6) מתבדר

(6)

1) מתבדר 2) מתבדר 3) מתכנס

4) מתכנס 5) מתבדר 6) מתכנס

(7)

1) מתכנס 2) מתבדר 3) מתכנס

4) מתבדר 5) מתכנס 6) מתכנס

7) מתבדר 8) מתכנס 9) מתכנס

(8)

1) מתבדר 2) מתכנס 3) מתכנס

4) מתכנס 5) מתכנס 6) מתכנס

7) מתכנס 8) מתכנס 9) מתכנס

(9)

1) מתכנס 2) מתכנס 3) מתכנס

(10)

1) מתבדר 2) מתכנס בהחלט 3) מתכנס בתנאי

4) מתכנס בתנאי 5) מתכנס בהחלט 6) מתכנס בהחלט

7) מתכנס בתנאי 8) מתכנס בתנאי 9) מתכנס בתנאי

# פרק 2 - טורי פונקציות וטורי חזקות

## טורי פונקציות

(1) מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

(1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ (2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$ (3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

(4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 nx}$ (5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ (6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

(2) בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים בתחום המופיע לידן :

(1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}\ (-\infty<x<\infty)$ (2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}\ (-1\le x\le 1)$

(3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}\ (-\infty<x<\infty)$ (4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)\ (\frac{1}{4}\le x\le 4)$

(5 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\ (-a\le x\le a)$ (6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}\ (-\infty<x<\infty)$

## טורי חזקות

(3) מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

(1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ (2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ (3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

(4 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ (5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ (6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

(7 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ (8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ (9 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

(10 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ (11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ (12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

(4) מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות.

1) $f(x)=\frac{1}{1+x}$
2) $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$
3) $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$
4) $f(x)=\frac{1}{x-5}$
5) $f(x)=\frac{x}{4x+1}$
6) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$
7) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$
8) $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$
9) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$
10) $f(x)=\ln(1+x)$
11) $f(x)=\ln(1-x)$
12) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$
13) $f(x)=\ln(5-x)$
14) $f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$
15) $f(x)=\arctan(x/3)$

**הערות חשובות:**
1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 7,8 עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים 9,10,14,15 עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

# פתרונות

(1)

1) $x>0$

2) $x\neq 5$

3) $x<3\frac{9}{10}$ or $x\geq 4\frac{1}{10}$

4) $0<x\neq \frac{1}{n}$

5) $x>0$

6) $x\neq 0,-1,-2,-3,\ldots$

(2)

1) מתכנס במידה שווה

2) מתכנס במידה שווה

3) מתכנס במידה שווה

4) מתכנס במידה שווה

5) מתכנס במידה שווה

6) מתכנס במידה שווה

(3)

1) $-1\leq x<1\ ,\ R=1$

2) $-\infty<x<\infty\ ,\ R=\infty$

3) $-0.2\leq x\leq 0.2\ ,\ R=0.2$

4) $-1\leq x\leq 1\ ,\ R=1$

5) $-3<x\leq -1\ ,\ R=1$

6) $-1<x<1\ ,\ R=1$

7) $x=1\ ,\ R=0$

8) $-\infty<x<\infty\ ,\ R=\infty$

9) $-5<x\leq 3\ ,\ R=4$

10) $-\frac{19}{3}<x<-\frac{11}{3}\ ,\ R=4/3$

11) $-9\leq x\leq 11\ ,\ R=10$

12) $-7<x<-3\ ,\ R=2$

(4)

1) $\displaystyle (|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

2) $\displaystyle (|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

3) $\displaystyle (|x|<\tfrac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

4) $\displaystyle (|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

5) $\displaystyle (|x|<\tfrac{1}{4})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

6) $\displaystyle (|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

7) $\displaystyle (|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

8) $\displaystyle (|x|<\tfrac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

9) $\displaystyle (|x|<1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$

10) $\displaystyle (-1<x\leq 1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

11) $\displaystyle (-1\leq x<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$

12) $\displaystyle (|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

13) $\displaystyle (-5\leq x<5)\ \ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$

14) $\displaystyle (|x|<\tfrac{1}{2})\ \sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$

15) $\displaystyle (|x|\leq 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$

# פרק 3 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות :
( היעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח בעמוד 79 )

1) $f(x)=\sin 2x$ 2) $f(x)=x^2e^{-4x}$ 3) $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ 5) $f(x)=\cos^2 x$ 6) $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ 8) $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ 9) $f(x)=\arcsin x$

**הערה חשובה:** פיתוח לטור מקלורן של 15 פונקציות נוספות תמצא בשאלה 4 בפרק 2 .

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=x_0$ של הפונקציות הבאות :

1) $f(x)=\ln x\ \left(x_0=1\right)$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ \left(x_0=2\right)$ 3) $f(x)=\sin x\ \left(x_0=\frac{\pi}{2}\right)$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

1) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ 2) $f(x)=\tan x$ 3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ 8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$\frac{1}{e}$ (1 $\quad \sin 3^\circ$ (2 $\quad \arctan 0.25$ (3

(7) חשב בעזרת $n$ איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב :

$(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ (1 $\quad (n=1)\cos 4^\circ$ (2 $\quad (n=4)\ln 1.5$ (3

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$ .

ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$ .

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$ .

(9)

א. עבור אילו ערכי $x$ , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001 .

ב. עבור אילו ערכי $x$ , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01 .

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$ .

$\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$ (1 $\quad (\varepsilon = 0.0001)$ $\qquad \int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ (2 $\quad (\varepsilon = 0.001)$

$\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ (3 $\quad (\varepsilon = 0.001)$

**הערה לגבי קירובים:**

אם מבקשים קירוב שהוא **מדויק ל-** $n$ **ספרות אחרי הנקודה**, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-n}$ . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$ .
אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

# **פתרונות**

**(1)**

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\left(-1\le x<1\right)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(-1<x<1\right)$

**(2)**

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$ $\left(0<x\le 2\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$ $\left(0<x<4\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$ $\left(-\infty<x<\infty\right)$

**(3)**

1) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

2) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\dots$

3) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

**(4)**

1) $e$ 2) $e^{-2}$ 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$ 6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$

**(5)**

1) 1/120 2) 1/3 3) 1/3

**(6)**

1) 53/144 2) $\pi/60$ 3) 47/192

**(7)**

1) $\frac{5}{8}$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$

2) 1 בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$

3) $\frac{77}{192}$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$

**(8)**

1) $(\pi/6)^5/5!$ 2) $(0.01)^2/2$ 3) $(0.2)^6/6!$

**(9)**

1) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$ 2) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$

**(10)**

1) $449/2250$ 2) $39/400$ 3) $143/576$

# פרק 4 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו- 8 תאר את משטחי הרמה).

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

7) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

8) $f(x,y,z)=z^2-x^2-y^2$

---

(2) חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)}\frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)}(x^2+y)\ln(x^2+y)$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1^+,1^+)}\frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

8) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)}\frac{\sin\left(x(y^2+z^2)\right)}{xy^2}$

---

(3) חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^2}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)$

8) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהייה רציפה בנקודה ?

1) $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

## **פתרונות**

(1) 1) $x \neq 0$ , המישור ללא ציר $y$ . 2) $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
3) כל המישור . 4) $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה. 5) $y < x^2$
6) $y \geq 0$ , חצי המישור העליון. 7) ת.ה - כל המרחב. 8) ת.ה. - כל המרחב.
(2) 1) 1 2) $1/12$ 3) 1 4) 0 5) אינסוף 6) $1/2$ 7) 2 8) 5 .
(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) 1) 0 2) 0 3) 0 4) 0 5) 3 6) 0 7) 0 8) 0 .
(5) 1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. 2) הפונקציה רציפה.

# פרק 5 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ $\left(\text{only } f_x\right)$

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin\left(xy\right)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin ut$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=\sin\left(10x+4y\right)$

4) $f(x,y,z)=xyz$

(3) (1 חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.
(2 האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$ ?
(3 האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה ?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$ :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad (1$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad (2$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**הערת סימון:**

$$f=f(x,y)\ \Rightarrow\ \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2\\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22}\\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21}\end{array}$$

## פתרונות

(1) (1 $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad f_y = -6x^2y + 3$

(2 $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

(3 $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$

(4 $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

(5 $f_x = \dfrac{x^2+2xy^2+3y}{\left(x+y^2\right)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{-3x+3y^2-2x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}$

(6 $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $\quad f_y = \cos(xy)\cdot x$

(7 $f_x = \dfrac{2}{1+(2x+3y)^2}$ $\quad f_y = \dfrac{3}{1+(2x+3y)^2}$

(8 $f_r = \cos\theta$ $\quad f_\theta = -r\sin\theta$

(9 $f_x = y^2z^3$ $\quad f_y = 2xyz^3$ $\quad f_z = 3xy^2z^2$

(10 $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $\quad f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

(2) (1 $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$

$f_y = -2x^2y + 10$ $\quad f_{yy} = -2x^2$

$f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

(2 $f_x = 4x^3\ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2\ln y$

$f_y = \dfrac{x^4}{y}$ $\quad f_{yy} = -\dfrac{x^4}{y^2}$

$f_{xy} = \dfrac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \dfrac{4x^3}{y}$

(3 $f_x = 10\cos(10x+4y)$ $\quad f_{xx} = -100\sin(10x+4y)$

$f_y = 4\cos(10x+4y)$ $\quad f_{yy} = -16\sin(10x+4y)$

$f_{xy} = -40\sin(10x+4y)$ $\quad f_{yx} = -40\sin(10x+4y)$

(4 $f_x = yz$ $\quad f_{xx} = 0$ $\quad f_{xy} = z$ $\quad f_{xz} = y$

$f_y = xz$ $\quad f_{yx} = z$ $\quad f_{yy} = 0$ $\quad f_{yz} = x$

$f_z = xy$ $\quad f_{zx} = y$ $\quad f_{zy} = x$ $\quad f_{zz} = 0$

(3) (1 הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$ שוות אפס.

(2 הפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

(3 פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) (1 לא דיפרנציאבילית (2 דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

# פרק 6 - כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

(1) נתון $z=\ln(x^2-y^2)$, $x=2u-v,\ y=u^2+v^3$. חשב $z_u,\ z_v$.

(2) נתון $z=e^{u-v}$, $u=t^2+4m$, $v=4t+k^2$. חשב $\frac{\partial z}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial m},\ \frac{\partial z}{\partial k}$.

(3) נתון $z=f(x^2-y^2)$. הוכח $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

(4) נתון $z=f(xy)$. הוכח $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

(5) נתון $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכח $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

(6) נתון $z=f(x-y,y-x)$. הוכח $z_x+z_y=0$.

(7) נתון $w=f(x-y,y-z,z-x)$. הוכח $w_x+w_y+w_z=0$.

(8) נתון $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$. הוכח $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

(9) נתון $z=y\cdot f(x^2-y^2)$. הוכח $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

(10) נתון $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכח $x\cdot z_x+y\cdot z_y=xy+z$.

(11) נתון $u(x,y,z)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$. הוכח $xu_x+yu_y+zu_z=2u$.

(12) נתון $h(x,y)=f(y+ax)+g(y-ax)$. הוכח $h_{xx}=a^2\cdot h_{yy}$.

(13) נתון $u(x,y)=f(e^x\sin y)-g(e^x\sin y)$.

הוכח: א. $u_{xx}+u_{yy}=\frac{u_{xx}-u_x}{\sin^2 y}$. ב. $u_{xy}=u_{yx}$.

חשב: ג. $u_{xy}(1,\pi)$ אם ידוע ש- $f'(0)=2,\ g'(0)=1$.

(14) נתון $y=r\sin\theta\ ,\ x=r\cos\theta\ ,\ u=f(x,y)$ .

א. הוכח $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$ .

ב. הוכח $u_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$ .

ג. הוכח $f_{xx}+f_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r}u_r$ .

(15) נתון $z=h(u,v)$ ונתון כי $u=f(x,y)\ ,\ v=g(x,y)$ מקיימות את מישוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x$ .

הוכח כי:

א. $u,v$ מקיימות את משוואת לפלס. כלומר $u_{xx}+u_{yy}=0\ ,\ v_{xx}+v_{yy}=0$ .

ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$ .

(16) נתון $y=r\sinh s\ ,\ x=r\cosh s\ ,\ u=f(x,y)$ .

הוכח כי $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$ .

## <u>פתרונות</u>

(13) ג. $-e$ .

# פרק 7 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

(1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של $f$ ואת אורכו בנקודה $(3,4)$. מהי משמעות התוצאה ?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של $f$ העובר דרך $(3,4)$.

(2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,\pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של $45^\circ$ עם החלק החיובי של ציר $x$.

(5) תהי $f(x,y)=xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

(6) תהי $f(x,y)=x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של $f$ בנקודה $(2,1,4)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי $V$ בנקודה $(x,y)$ נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון הנקודה $(2,6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$ בנקודה $(0,0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$ בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$ ואתה נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר , באיזה כיוון עליך ללכת?

הערות סימון

**א**. במישור $R^2$ : $\mathbf{i}=(1,0)$ , $\mathbf{j}=(0,1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים : $\vec{u}=(x,y)$ או $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u}=(3,4) \Leftrightarrow \vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

במרחב $R^3$ : $\mathbf{i}=(1,0,0)$ , $\mathbf{j}=(0,1,0)$ , $\mathbf{k}=(0,0,1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים : $\vec{v}=(x,y,z)$ או $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u}=(3,4,5) \Leftrightarrow \vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k}$

**ב**. יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם כך $\underline{u}$ או כך $\mathbf{u}$.

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

## **פתרונות**

(1) א. הגרדיאנט (6,8) . אורך הגרדיאנט 10 .

(2) 48/5 (3) ½ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) 88/3

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (1,1) ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל- 22 .

(10) בכיוון הוקטור (-2,2,-2) .

# פרק 8 - פונקציות סתומות , מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים

## פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות

(1) מצא את $y'$ כאשר $x^2+y^5=xy+1$ . חשב את $y'(0)$ .

(2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy}+x^2y^2=5x-4$ .

(3) מצא את $y'(e)\ ,\ y''(e)$ כאשר $2\ln x+\ln y=1$ .

(4) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$.

חשב את : $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0),\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ .

(5) נתון $z^2-e^{x^2+y^2}+(x+y)\sin z=-e^4$ $\left(y=y(x,z)\geq 0\right)$.

חשב את $y_x(0,0),\ y_z(0,0)$ .

(6) נתון $z^3-2xz+y=0$ $\left(z=z(x,y)\geq 0\right)$. מצא $z_{xx}(1,1)$ .

(7) נתונה משוואה $z^3-3xyz=4$ ונקודה $(2,1,-2)$ .

מצא : (1 $z_{xx}(2,1)$ (2 $z_{xy}(2,1)$ (3 $z_{yy}(2,1)$ .

(8) אם $u^2-v=3x+y$ ו- $u-2v^2=x-2y$ ,

מצא את $u_x,v_x,u_y,v_y$.

(9) אם $x=u+v,\ y=u^2+v^2,w=u^3+v^3$ , מצא את $w_x,\ w_y$ .

## שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

(10) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ $(z<0)$.
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה $P$ בה $x=-2,\ y=1$.

(11) מצא משוואה של מישור משיק למשטח $xyz=8$ בנקודה $(-2,2,-2)$ וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

(12) מצא מישור המשיק למשטח $x^2+8y^2=21-27z^2$ המקביל למישור $x+8y+18z=0$.

(13) למשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים $x,y,z$ בנקודות $A,B,C$ בהתאמה. נסמן $O=(0,0,0)$. הוכח $OA+OB+OC=a$.
( למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה ).

## פתרונות

(1) $y'(0)=\frac{1}{5}$

(2) $y'(1)=5$

(3) $y'(e)=-\frac{2}{e^2},\ y''(e)=\frac{6}{e^3}$

(4) $z_x(0,0)=z_y(0,0)=-\frac{\sin 1}{2}$

(5) $y_x(0,0)=0,\ y_z(0,0)=\frac{1}{2e^4}$

(6) $z_x(1,1)=-16$

(7) $z_{xx}(2,1)=z_{xy}(2,1)=1,\ z_{yy}(2,1)=4$

(8) $u_x=\frac{1-12v}{1-8uv},\ u_y=\frac{-4v-2}{1-8uv},\ v_x=\frac{2u-3}{1-8uv},\ v_y=\frac{-4u-1}{1-8uv}$

(9) $w_x=-3uv,\ w_y=1.5(u+v)$

(10) $3x-6y+2z+18=0$

(11) $x-y+z+6=0$ , $(-2,2,-2)+t(1,-1,1)$

(12) $x+8y+18z=21$ , $x+8y+18z=-21$

# פרק 9 - נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם

## נוסחת טיילור

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה $(a,b)$ :

(1) $f(x,y)=x^2y+3y-2$ $\quad (a,b)=(1,2)$

(2) $f(x,y)=(1+y)\ln(1+x-y)$ $\quad (a,b)=(0,0)$

(3) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$ $\quad (a,b)=(0,0)$

(4) $f(x,y)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}$ $\quad (a,b)=(2,1)$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2 , חשב בקירוב את $\ln(1.5)$ .

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3 , חשב בקירוב את $e^3$ .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4 , חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$ .

## הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.
ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על $2\%$,
ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על $4\%$ .
הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן : $a=10_{cm}$ , $b=24_{cm}$ .
חשב את השינוי המדוייק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך
אלכסון המלבן אם את הצלע $a$ יאריכו ב- $4_{mm}$ ואת הצלע $b$ יקצרו ב- $1_{mm}$ .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל
מדידה אינה עולה על $5\%$ . הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית
באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$ .

## פתרונות

(1) $f(x,y)=6+4(x-1)+4(y-2)+2(x-1)^2+2(x-1)(y-2)$

(2) $f(x,y)=x-y-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2$

(3) $f(x,y)=1+4y-x^2+14y^2$

(4) $f(x,y)=1+\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{3}(y-1)-\frac{7}{81}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)(y-1)$

(5) $3/8$

(6) $19$

(7) $101/81$

(8) 8%

(9) שינוי מדויק 0.06472 , שינוי מקורב 0.06153.

(10) 5%.

(11) $2\,7/3200$

# פרק 10 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף.

(1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

(2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

(3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

(4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

(5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

(6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

(7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

(8) $f(x,y)=e^x\cos y$

(9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$ .
מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק עומד את הביקוש $Q_1$ למחשבון בארץ ואת הביקוש $Q_2$ למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1=116-30P_1+20P_2$$
$$Q_2=144+16P_1-24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, $P_1$ ו- $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה ?

## **פתרונות**

(1) (-0.5,1) אוכף ; (1.5,-3) מינימום.

(2) (1, 2) מינימום ; (-1,-2) מקסימום ; (-1, 2) , (1,-2) אוכף.

(3) (0,0) אוכף ; (1,1) מינימום.

(4) (-1, 1) , (-1, -1) מינימום ; (1, 0) מקסימום ; (-1, 0) , (1,1) , (1, -1) אוכף.

(5) (0, 2) מקסימום.

(6) (4, 4) מקסימום.

(7) (-0.5, 4) מקסימום.

(8) אין נקודות קריטיות.

(9) $z=4$ , $z=3$ .

(10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .

(11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר (1/3,4/3,10/3) .

(12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$ , רווח מקסימלי 288$ .

# פרק 11 - קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)

## שיטת מינימום הריבועים הפחותים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

(1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

(2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $z^3+z+xy-2x-y+2=0$ $(z=f(x,y))$

(4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

(5) $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $(x,y,z>0)$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$ לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

## שיטת הריבועים הפחותים

(7) נתונות $n$ נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y=h(x)$

כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי:

$h(x)=ax+b$ , הדגם עבור הנקי' $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$

$h(x)=ax^2+bx$ , הדגם עבור הנקי' $(-1,2),(2,0),(0,-2)$

$h(x)=ax+\frac{b}{x}$ , הדגם עבור הנקי' $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$

$h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$ , הדגם עבור הנקי' $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$

$h(x)=ax^2+bx+c$ , הדגם עבור הנקי' $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$

(8) נתונות $n$ נקודות : $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$.

מצא ישר $y=ax+b$ כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור $a$ ו- $b$.

הערה : בשאלות (7) ו- (8) ניתן להניח ש- $a$ ו- $b$ המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$ נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

## **פתרונות**

(1) $(t,t)$ לכל $t$ ממשי, מקסימום.

(2) $(0,0)$ מקסימום.

(3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

(4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

(5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

(6) $0.375$

(7.א) $y=0.88x+0.3$

(7.ב) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$.

(7.ג) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

(7.ד) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

(7.ה) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

(8) $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$ , $a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

# פרק 12 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג׳)

## פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון :

(1) $f(x,y)=x^2+y^2 \ ; \ 2x^2+3xy=1-2y^2$

(2) $f(x,y)=x^2-y^2 \ ; \ x^2+y^2=1$

(3) $f(x,y)=4x+6y \ ; \ x^2+y^2=13$

(4) $f(x,y)=x^2y \ ; \ x^2+2y^2=6$

(5) נתונה בעיית הקיצון $Max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

(6) נתונה בעיית הקיצון $Max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$ , מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$ לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז : מרחק הנקודה $(x_0,y_0)$ מהישר $ax+by+c=0$ הוא $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק $x$ ק״ג מלפפונים ו- $y$ ק״ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל $(x,y)$ נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק״ג מלפפונים 1 ש״ח. מחיר ק״ג עגבניות 2 ש״ח.
מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק $x$ ק״ג מלפפונים ו- $y$ ק״ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל $(x,y)$ נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק״ג מלפפונים 1 ש״ח. מחיר ק״ג עגבניות 3 ש״ח.
לדני תקציב של 12 ש״ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.

דני מחפש את הסל (אננס,מנגו) = $(x,y)$, על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעייה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$. המחירים ליחידת $K$ ו-$L$ הם $P_K=2,\ P_L=1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $(K^*,L^*)$ המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

## <u>פתרונות</u>

(1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $Max\left(\pm 1,\mp 1\right)$

(2) $\min\left(\pm 1,0\right)$ $Max\left(0,\pm 1\right)$

(3) $\min\left(-2,-3\right)$ $Max\left(2,3\right)$

(4) $\min\left(\pm 2,1\right)$ $Max\left(\pm 2,1\right)$

(5) $Max\left(6,2\right)$

(6) $Max\left(9,36\right)$

(7) $\left(6,2\right)$

(8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $Max\left(\pm 1,\mp 1\right)$

(9) $7/\sqrt{45}$

(10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

(11) $Max\left(6,2\right)$

(12) $Max\left(2,3\right)$

(13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100$ ; $\min\left\{2K+L\right\}$

# פרק 13 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')

## פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.
ב. מצא נקי' על המישור $-2x-2y+z=0$ שהיא הקרובה ביותר לנקי' $(1,2,3)$.
ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$.
רמז: מרחק הנקודה $(x_0,y_0,z_0)$ מהמישור $ax+by+cz+d=0$ הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

## פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

**הערה חשובה**
בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות.
ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

## פתרונות

(1) רוחב 4 ס״מ , אורך 4 ס״מ , גובה 2 ס״מ .

(2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$ .

הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$ .

(3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$ .

(4) $(0,0,1)$ , $(0,0,-1)$ .

(5) מרחק קצר ביותר $256/13$ . מרחק ארוך ביותר $320/13$ .

(6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$ .

(7) מרחק מינימלי $75/17$ . מרחק מקסימלי 10.

## פרק 14 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

(1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
$f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם: $(0,5),(3,0),(0,0)$.

(2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
$f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

(3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
$f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

(4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
$f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור,
$R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0\,,y\le 0\}$.

(5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור,
$R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

### פתרונות

(1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט 11-.
(2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט 1-.
(3) מקסימום מוחלט $33/4$. מינימום מוחלט $-1/4$.
(4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט 1-.
(5) מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.

# פרק 15 - אינטגרלים כפולים

## אינטגרלים כפולים

1) חשב את האינטגרלים:

סעיף 1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

סעיף 2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

סעיף 3) $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

2) באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

סעיף 1) $D$ – משולש בעל הקודקודים: $B(1,1)\,,A(1,0)\,,O(0,0)$

סעיף 2) $D$ – משולש בעל הקודקודים: $B(-2,1)\,,A(2,1)\,,O(0,0)$

סעיף 3) $D$ – טרפז בעל הקודקודים: $C(0,1)\,,B(1,2)\,,A(1,0)\,,O(0,0)$

סעיף 4) $D$ – עיגול $x^2+y^2\le 1$

סעיף 5) $D$ – עיגול $x^2+y^2\le y$

סעיף 6) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

סעיף 7) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

3) חשב את האינטגרלים הבאים:

סעיף 1) $\iint_D xy^2dxdy$ כאשר $D$ חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

סעיף 2) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$ כאשר $D$ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של המעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

סעיף 3) $\iint_D |x\,y|dxdy$ כאשר $D$ עיגול בעל הרדיוס $a$ שמרכזו בראשית.

סעיף 4) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ כאשר $D$ מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a, y=3a\ (a>0)$

סעיף 5) $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$ כאשר $D$ התחום הכלוא בין $x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}$.

## החלפת סדר אינטגרציה באינטגרל כפול

4) החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים:

$$\int_0^2\int_x^{2x} f(x,y)dydx \ (1 \qquad \int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx \ (2 \qquad \int_0^1\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx \ (3$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx \ (4 \qquad \int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx \ (5 \qquad \int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)dydx \ (6$$

5) חשב את האינטגרלים הבאים (רמז: שנה את סדר האינטגרציה):

$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy \ (1 \qquad \int_0^3\int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy \ (2$$

$$(x,y\ge 0)\ \int_0^1\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \ (3 \qquad \int_0^4\int_x^4 \sin(y^2)dydx \ (4$$

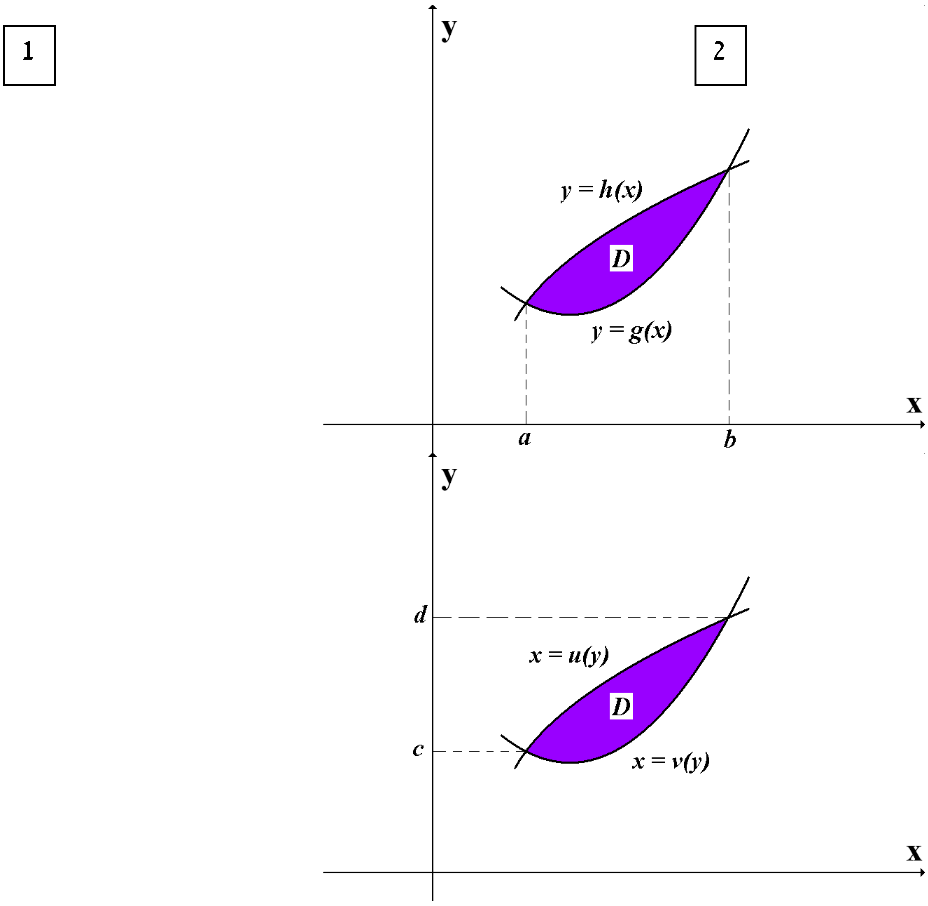
**הערות סימון:**

$\boxed{1}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$




לתשומת לבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישום $dxdy$ והרישום $dydx$ הוא זהה.

# **פתרונות**

**תרגיל 1**

1) $1$ 2) $\frac{1}{40}$ 3) $\frac{a^3}{3}\pi$

**תרגיל 2**

1) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$

2) $\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

5) $\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

7) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

**תרגיל 3**

1) $\frac{32}{21}$ 2) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$ 3) $\frac{a^4}{2}$ 4) $14a^4$ 5) $0$

## תרגיל 4

1) $\int_{0}^{2} dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_{0}^{1} dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

## תרגיל 5

1) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$ 2) $\frac{241}{60}$ 3) $\frac{1}{4}(e-2)$ 4) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

# פרק 16 - שימושי האינטגרל הכפול

(1) חשב את **שטחי התחומים** החסומים ע"י העקומים הבאים :

1) $x+y=2,\ x^2-4y=4$ 2) $xy=a^2,\ x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$

3) $y^2=9-x,\ y^2=9-9x$ 4) $x+y=3,\ y^2=4x$

(2) חשב את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים הבאים :

1) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

2) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

3) $y=\frac{2}{x},\ y=2x,\ y=0.5x,\ z=x^2+y,\ z=0,$ $(x>0)$

4) $2y^2=x,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ z=0,$

5) $z=y,\ x^2+\frac{y^2}{4}=1$ $(z\geq 0)$

6) $z=0,\ y=0,\ x=0,\ z=6,\ z=x+y$

(3) ללוח דק בצורת משולש, שקודקודיו הם (0,0) , (1,0) ו- (0,1) , יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y)=xy$ .

1) חשב את מסת הלוח. 2) חשב את מרכז הכובד של הלוח.

(4) ללוח דק בצורת מלבן $R=\{(x,y)\mid -b/2\leq y\leq b/2\,,\ -a/2\leq x\leq a/2\}$ , יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני). חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר $z$ .
בטא את תשובתך באמצעות המסה $M$ של הלוח.

(5) מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$ הנמצא מעל למלבן $R=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 4\}$ שבמישור $xy$ .

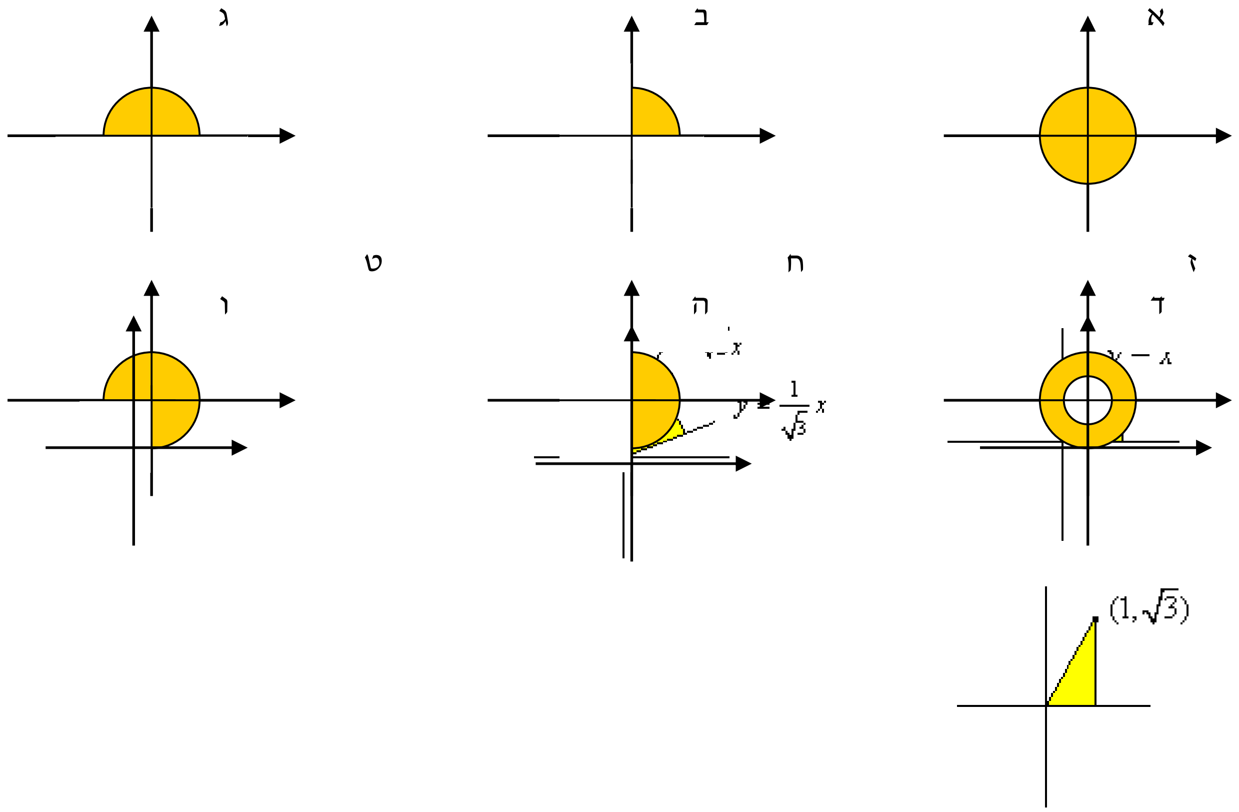
## פתרונות

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $^{64}\!/\!_{3}$ (1 | $a^2\left({}^{15}\!/\!_{8}-2\ln 2\right)$ (2 | 32 (3 | $^{64}\!/\!_{3}$ (4 | | |
| (2) | $^{5}\!/\!_{6}$ (1 | $^{88}\!/\!_{105}$ (2 | $^{17}\!/\!_{6}$ (3 | $16\frac{1}{5}$ (4 | $^{8}\!/\!_{3}$ (5 | 36 (6 |
| (3) | $^{1}\!/\!_{24}$ (1 | $(\frac{2}{5},\frac{2}{5})$ (2 | | | | |
| (4) | $\frac{M(a^2+b^2)}{12}$ | | | | | |
| (5) | $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1)$ | | | | | |

# פרק 17 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

(1) חשב $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$ כאשר $D$ התחום המתואר בשרטוט.

לתשומת לבך : לכל המעגלים רדיוס 4 . בסעיף ד למעגל הקטן רדיוס 1.
בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.



(2) חשב את האינטגרלים הבאים תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות :

1) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

2) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

6) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

7) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

8) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

9) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

10) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

11) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

12) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

13) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

15) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים חשב את **נפח הגוף** המתואר :

1) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

2) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$ בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין מישור $xy$ - מלמטה.

3) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$ בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור $xy$ - מלמטה.

(4) חשב את **שטח התחום** החסום על ידי : $x^2+y^2=2x\,,\ y=0,\ y=x\sqrt{3}$.

## **פתרונות**

(1) 1) $\frac{128\pi}{3}$ 2) $\frac{32\pi}{3}$ 3) $\frac{64\pi}{3}$ 4) $42\pi$ 5) $\frac{64\pi}{3}$ 6) $32\pi$

7) $\frac{16\pi}{3}$ 8) $\frac{32\pi}{9}$

(2) 1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\pi$ 3) $\frac{\pi}{8}$ 4) $\frac{\pi}{2}$ 5) $\pi a^2$ 6) $2\pi$

7) $36$ 8) $\frac{4}{3}$ 9) $\pi\ln\frac{e}{2}$ 10) $\pi(4-\pi)$ 11) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$ 12) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

13) $\frac{\pi}{2}+1$ 14) $-\frac{4}{5}$ 15) $\pi\ln\frac{4}{e}$ 16) $\pi$

(3) 1) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ 2) $\frac{32}{9}$ 3) $\frac{5\pi}{32}$

(4) $\pi/3+\sqrt{3}/4$

---

# פרק 18 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

(1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA$ כאשר $R$ הוא

התחום המוגבל על ידי הישרים $y=x,\ y=x-1,\ y=1-x,\ y=3-x$.

(2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy}dA$ כאשר $R$ הוא

התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x,\ y=0.5x,\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{2}{x}$.

(3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$ כאשר $R$ הוא

התחום בצורת משולש שקודקודיו הם: $\mathrm{A}(0,0),\ \mathrm{B}(2,0),\ \mathrm{C}(1,1)$.

(4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y)dA$ כאשר $R$ הוא

התחום בצורת מקבילית שקודקודיה הם: $\mathrm{A}(-1,3),\ \mathrm{B}(1,-3),\ \mathrm{C}(3,-1),\ \mathrm{D}(1,5)$.

(5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2}\,dA$ כאשר $R$ הוא

התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

(6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$ כאשר $R$ הוא

התחום המוגבל על ידי העקומות $xy^2=2,\ xy^2=1,\ y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x}$.

(7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y}dA$ כאשר $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|\le 1\right\}$.

**פתרונות**

(1) $\frac{1}{4}\ln 3$ (2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$ (3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$ (4) $192$

(5) $96\pi$ (6) $\frac{3}{4}$ (7) $e-\frac{1}{e}$

# פרק 19 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xzdydxdz$

2) $\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$

3) $\iiint_B xyz^2 dV$ , $B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1, -1\le y\le 2, 0\le z\le 3\}$

4) $\iiint_B 6xydV$ , $B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1\,,\,0\le y\le \sqrt{x}\,,0\le z\le 1+x+y\}$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

1) $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}dxdydz$

2) $\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}dydxdz$

3) $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}dxdydz$

4) $\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}dydzdx$

(3) חשב את **נפחי הגופים** החסומים ע"י המשטחים הבאים:

1) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

2) $z=0\,,\,z=x^2+y^2\,,\,y=1,\ y=x^2$

3) $y=\frac{2}{x}$, $y=2x$, $y=0.5x$, $z=x^2+y$, $z=0$ $(x\ge 0)$

4) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

5) $x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$ $(z\ge 0)$

6) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

(4) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו $h$ ורדיוס הבסיס שלו $r$.
הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz$ $(k>0)$.

(5) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b\ ,\ 0\le z\le c\}$ סביב ציר $z$.
בטא את תשובתך באמצעות המסה $M$ של התיבה.

**<u>פתרונות</u>**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 (1 | $\frac{1}{3}(e^3-1)$ (2 | $\frac{27}{4}$ (3 | $\frac{65}{28}$ (4 | | |
| (2) | $2\sin 4$ (1 | $3e-6$ (2 | 4 (3 | $\frac{\sin^2 4}{2}$ (4 | | |
| (3) | $\frac{5}{6}$ (1 | $\frac{88}{100}$ (2 | $\frac{17}{6}$ (3 | $16\frac{1}{5}$ (4 | $\frac{8}{3}$ (5 | 36 (6 |
| (4) | $M=\frac{1}{2}\pi k h^2 r^2$ | $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2h}{3})$ | | | | |
| (5) | $\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$ | | | | | |

# פרק 20 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

(1) חשב $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2dzdydx$ .

(2) חשב $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$ .

(3) א) חשב $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$ .

ב) חשב $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$ .

(4) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$ בין מישור $xy$ מלמטה לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה. חשב את הנפח של הגוף ואת המרכז שלו.

(5) חשב את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

(6) מצא את הנפח של התחום מעל מישור $xy$ החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$ .

## פתרונות

(1) 4 (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) א) $\frac{24\pi-32}{9}$ ב) $\frac{32\pi}{5}$

(4) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)\ ,\ V=\frac{122}{3}\pi$

(5) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))\ ,\ V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$

(6) $\frac{\pi}{2}a^4$

## פרק 21 - החלפת משתנים באינטגרל משולש (יקוביאן)

(1) חשב את $\iiint\limits_G (z-y)^2 xydV$ כאשר $G$ הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$xy=4,\ xy=2,\ z=y+1,\ z=y,\ x=3,\ x=1$ .

(2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ .

(3) חשב את $\iiint\limits_G x^2 dV$ כאשר $G$ הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ .

(4) חשב את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים

$y=4z^2,\ y=z^2,\ y=4x-12,\ y=4x,\ y=2z,\ y=z$ .

(5) חשב את $\iiint\limits_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$ כאשר $G$ הוא הכדור שמרכזו

בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1 .

### פתרונות

(1) $2\ln 3$

(2) $\frac{4}{3}\pi abc$

(3) $\frac{4}{15}\pi a^3bc$

(4) $\frac{105}{32}$

(5) $\pi$

# פרק 22 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.

## אינטגרל קוי מסוג I

(1) חשב $\int_C f(x,y)ds$

א. $f(x,y)=1-x^2$ ; $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$.

ב. $f(x,y)=x$ ; $C: x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\le t\le \pi$.

ג. $f(x,y)=x+y$ ; $C$ קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$.

ד. $f(x,y)=x+y^2$ ; $C$ היקפו של $\Delta OAB$ : $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$.

(2) חשב $\int_C f(x,y,z)ds$

א. $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\ \ 0\le t\le \pi$ ; $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

ב. $C: x=t,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}t^2,\ z=\frac{1}{3}t^3\ \ 0\le t\le 3$ ; $f(x,y,z)=x^3+3z$

(3) חשב את **אורך העקום** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t\ \ (0\le t\le \pi)$.
חשב את **מסת** הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x,y,z)=kz\ \ (k>0)$.

# אינטגרל קווי מסוג II

(5) חשב:

א. $C:\ x=\cos t,\ y=\sin t\ \ 0\le t\le \pi/2\ ;\ \int_C 2xydx+(x^2+y^2)dy$

ב. $C:\ x=t,\ y=t^2\ \ 0\le t\le 1\ ;\ \int_C (2x+y)dx+(x^2-y)dy$

(6) חשב $\int_C ydx+x^2dy$ כאשר $C$ המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$

ו-$C$ נתון ע"י המשוואה: א. $y=2x$ ב. $y=x^2$

(7) $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$ אם העקום נתון על ידי:

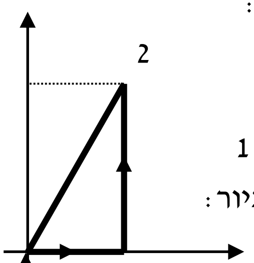
א. הפרבולה $y^2=x$.

ב. קו ישר.

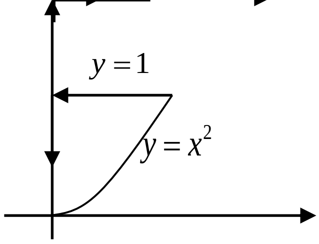
ג. הקוים הישרים מ- (1,1) ל- (1,2) ומשם ל- (4,2).

ד. העקום: $x=2t^2+t+1,\quad y=t^2+1$.

(8) חשב $\int_C x^2ydx+xdy$ כאשר המסלול $C$ מתואר בציור:




(9) חשב $\int_C (x-y^2)dx+dy$ כאשר המסלול $C$ מתואר בציור:




(10) אם $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$ מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ לאורך המסלולים:

א. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$.

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F\cdot dr$ , כאשר :

א. $F(x,y)=\left(x^2y^3,-y\sqrt{x}\right),\quad r(t)=\left(t^2,-t^3\right),\quad 0\le t\le 1$

ב. $F(x,y,z)=\left(\sin x,\cos y,xz\right),\quad r(t)=\left(t^3,-t^2,t\right),\quad 0\le t\le 1$

(12) א. חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y)=x^3y\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$
על חלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ- $(-2,4)$ עד $(1,1)$ .
ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1,1)$ עד $(-2,4)$ .

(13) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$
על חלקיק הנע לאורך העיקול $(0\le t\le 1)$ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ .

<u>**הערת סימון**</u>
אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot dr=\int_C\left(f,g,h\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C fdx+gdy+hdz$$

$$\int_C \mathbf{A}\cdot dr=\int_C\left(A_1,A_2,A_3\right)\cdot\left(dx,dy,dz\right)=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz$$

## פתרונות

(1) א. $\pi$ ב. $\frac{16}{3}$ ג. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ד. $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(2) א. $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$ ב. $\frac{567}{2}$

(3) 6

(4) $\sqrt{5}k\pi^2$

(5) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{4}{3}$

(6) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

(7) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

(8) $\frac{1}{2}$

(9) $\frac{4}{5}$

(10) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

(11) א. $-\frac{59}{105}$ ב. $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

(12) א. 3 ב. -3

(13) 1

# פרק 23 - אי תלות במסלול, שדות משמרים

(1) קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה $\phi$ כך ש- $\mathbf{F}=\nabla\phi$.

א. $\mathbf{F}(x,y)=(6x+5y,5x+4y)$

ב. $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

ג. $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^2\sin y-\sin x\right)$

ד. $\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

ה. $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(xy+3z^2)\mathbf{k}$

ו. $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^2\right)$

(2) נתון האינטגרל $\int\limits_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int\limits_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^3dx+(1+3x^2y^2)dy$.

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+(x^2-4xy^3)dy$.

(5) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^2}$ מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^3+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^2z^2-y^2\right)dz$.

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב : א. $\int_{L_1}\mathbf{F}d\mathbf{r}$ ב. $\int_{L_2}\mathbf{F}d\mathbf{r}$ ג. $\int_{L_3}\mathbf{F}d\mathbf{r}$.

(8) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$.

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2,0)$ ל- $(-2,0)$ :

$L_2:\ x^2+y^2=4\ ,\ y\le 0$ $\qquad$ $L_1: x^2+y^2=4\ ,\ y\ge 0$

א. חשב: $\int_{L_1}\mathbf{F}d\mathbf{r}$ , $\int_{L_2}\mathbf{F}d\mathbf{r}$.

ב. הוכח כי $\mathbf{F}$ משמר בחצי הטבעת $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge 0\right\}$.

**הערת סימון**

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\right)$

$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\hat{x} + g(x,y,z)\hat{y} + h(x,y,z)\hat{z}$

$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

## פתרונות

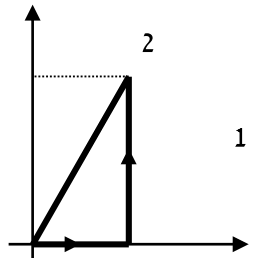
(1) א. $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$. ב. השדה אינו משמר.
ג. $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$. ד. $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$.
ה. $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$. ו. השדה אינו משמר.
(2) ב. 236
(3) -58
(4) 5
(5) -2
(6) 15 = עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1,-1,1) ל- (2,1,-1) לאורך $C$.
(7) א. $2\pi$ ב. $-2\pi$ ג. $0$.
(8) א. $L_1:\pi$ , $L_2:-\pi$

# פרק 24 - משפט גרין

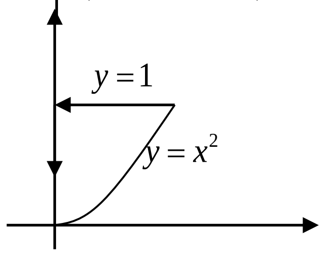
בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט גרין, כלומר חשב

את האינטגרל $\int_C fdx + gdy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y)dA$ והראה שהם שווים זה לזה.

(1) $\int_C x^2 ydx + xdy$ ; המסלול $C$ מתואר בציור:




(2) $\int_C (x - y^2)dx + dy$ ; המסלול $C$ מתואר בציור:




(3) $\int_C (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$ ;

$C$ הוא ריבוע שקודקודיו: $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי.ריקי

(4) חשב את ה**עבודה** שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y) = \left(e^x - y^3\right)\mathbf{i} + \left(\cos y + x^3\right)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$ , בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan\frac{x}{2}\right)dx + \left(xe^y + y\cos y^2\right)dy$ כאשר $C$ הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2,\ y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y}\cos ydx + \left(e^{2x-y}\left(\sin y + \cos y\right) + 2xy\right)dy$

כאשר $C$ הוא חצי האליפסה $\left\{x^2 + 4y^2 = 4,\ y \ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$ לנקודה

$(-2,0)$.

(7) א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט $C$ נתון ע"י: $\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

## **פתרונות**

(1) הערך המשותף הוא 0.5
(2) הערך המשותף הוא 0.8
(3) הערך המשותף הוא 8
(4) $1.5\pi$
(5) $0.5\sin 64$
(6) $\frac{8}{3}+e^{4}-\frac{1}{e^{4}}$
(7) ב. $\pi ab$

# פרק 25 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

## אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי:

(1) $\iint_S x^2yzdS$ כאשר $S$ הוא המישור $z=1+2x+3y$ מעל המלבן $R=[0,3]\times[0,2]$.

(2) $\iint_S xdS$ כאשר $S$ הוא המשטח $y=x^2+4z$ , $0\le z\le 2$ , $0\le x\le 2$ .

(3) $\iint_S yzdS$ כאשר $S$ הוא המישור $z=y+3$ שכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$ .

(4) $\iint_S \left(x^2z+y^2z\right)dS$ כאשר $S$ הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ , $z\ge 0$ .

(5) $\iint_S xyzdS$ כאשר $S$ הוא חלק החרוט $\mathbf{r}(u,v)=u\cos v\mathbf{i}+u\sin v\mathbf{j}+3u\mathbf{k}$

המקיים $0\le v\le \pi/2$ , $1\le u\le 2$.

(6) חשב את **שטח הפנים** של כדור בעל רדיוס $R$ .

(7) היריעה הדקה $S$ היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ שמתחת למישור $z=1$

וצפיפותה $\delta(x,y,z)=\delta_0$ קבועה. חשב את **מסת** היריעה.

## אינטגרל משטחי מסוג II

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$

ובניסוח אחר:

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך $S$.
( $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$ ).

(8) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

(9) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הכדור $x^2+y^2+z^2=1$.

(10) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(11) $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ; $S$ חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\geq 0$.

(12) $\mathbf{F}=0\mathbf{i}-2z\mathbf{j}+(-3y-1)\mathbf{k}$
$S$ הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוס 4 והוא נמצא מעל המישור $xy$.

## פתרונות

(1) $171\sqrt{14}$    (2) $\frac{33\sqrt{33}-17\sqrt{17}}{6}$    (3) $\pi\sqrt{2}/4$

(4) $16\pi$    (5) $93/\sqrt{10}$    (6) $4\pi R^2$

(7) $\frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$    (8) $\frac{11}{6}$    (9) $\frac{8\pi}{3}$

(10) $27$    (11) $12\pi$    (12) $-16\pi$

# פרק 26 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב
את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G div\mathbf{F}dV$ והראה שהם שווים זה לזה. ( $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$ ). (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F}=(2x-z)\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}-xz^2\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הקובייה $G$ הנקבעת ע"י המישורים: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$.

(2) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הכדור $G$ , $x^2+y^2+z^2=1$.

(3) $\mathbf{F}=(2xy+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}-(x+3y)\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הפירמידה $G$ הנקבעת ע"י המישורים: $2x+2y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

(4) יהי $S$ פני הגוף הכלוא בגליל $x^2+y^2=9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשב את **השטף** של השדה הוקטורי $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ דרך $S$.
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.
$\mathbf{F}=\left(z^2-x\right)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ ; $S$ הוא פני הגוף החסום על ידי:
$x=0,\ x=3,\ z=4-y^2,\ z=0$.

(6) חשב את
$$\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)xydzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$
כאשר $S$ הוא פני הגוף החסום על ידי: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z=0$.

(7) יהי $S$ משטח פתוח $x^2+z^2=16$ , $0\le y\le 4$ (גליל ללא הבסיסים) .

חשב את **השטף** דרך $S$ של השדה הוקטורי $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+5y\mathbf{j}+x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$.

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של $S$ .

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2\right)\mathbf{i}+2x\arctan y\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$
;

$S$ הוא חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\ge 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

מתקיים $\iiint_G div\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ :

$$\iiint_G \nabla\cdot\mathbf{F}dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\iiint_G \left(f_x+g_y+h_z\right)dV=\iint_S fdydz+gdzdx+hdxdy$$

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$

(3) הערך המשותף הוא 27

(4) $279\pi$

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) $-4\pi$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

# פרק 27 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}ds$ ואת האינטגרל $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$ ; $S$ חלק הפרבולואיד $z=4-x^2-y^2$ שבו $z\geq 0$ .

(2) $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+\left(-3xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$

$S$ הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור $xy$ .

(3) $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ ; $S$ הוא משטח התחום בשמינית הראשונה החסום על ידי המישורים $2x+z=6,\ y=2$ , ושאינו כלול

א. במישור $xy$ .

ב. במישור $y=2$ .

ג. במישור $2x+z=6$ .

(4) חשב את האינטגרל $\int_C x^2dx+4xy^3dy+y^2xdz$ כאשר $C$ העקומה בצורת מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$ , משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$ .

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F}=\left(x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(y+z^2\right)\mathbf{j}+\left(z+x^2\right)\mathbf{k}$

ו- $C$ היא שפת המשולש שקודקודיו הם $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה מהכיוון החיובי של ציר ה- $z$ ).

(6) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$ כאשר $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

ו- S הוא החלק של הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=1$ ומעל למישור- $xy$ .

(7) חשב את $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$ כאשר $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+(x^3+yz)\mathbf{j}-3xy^2\mathbf{k}$

ו- S הוא משטח החרוט $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ מעל למישור- $xy$ .

**<u>הערת סימון</u>**

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$

מתקיים $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{Rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\int_C fdx+gdy+hdz=\iint_S \left((h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

## **<u>פתרונות</u>**

(1) הערך המשותף הוא $12\pi$

(2) הערך המשותף הוא $-16\pi$

(3) הערך המשותף הוא א) -6 ב) -9 ג) -18

(4) -90

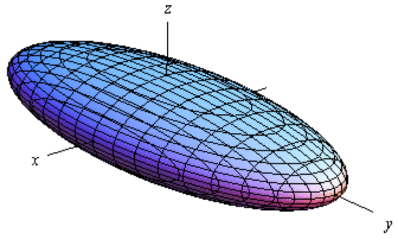
(5) -1

(6) 0

(7) $12\pi$

# נספח - משטחים ממעלה שנייה

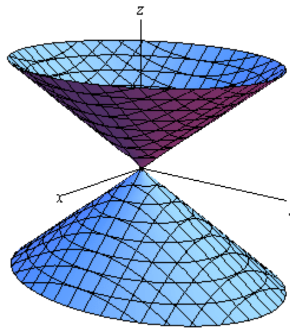
אליפסואיד




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$ נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

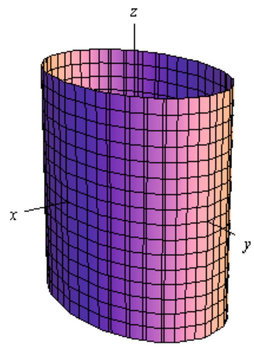



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

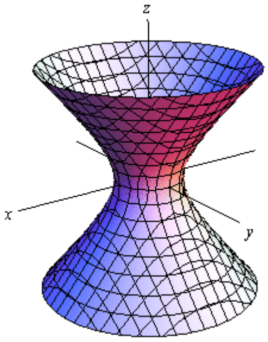



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

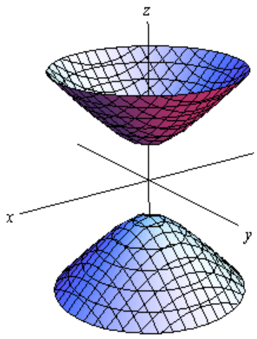



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
משוואה :

תיאור : החתך במישור $xy$ הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ . החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

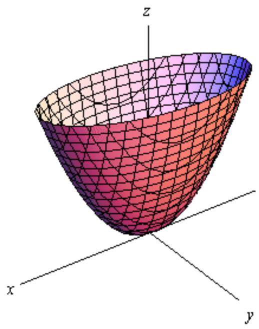



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
משוואה :

תיאור : למשטח זה אין חתך במישור $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



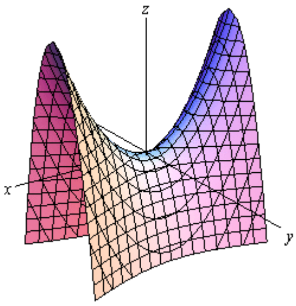

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$
משוואה :

תיאור : החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

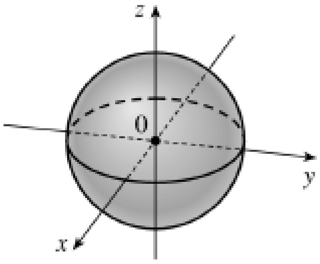
פרבולואיד היפרבולי



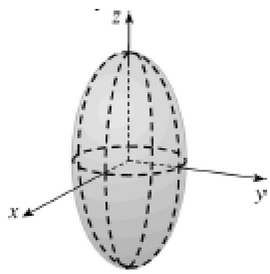

<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה-$y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה-$x$.
החתכים במישור $xz$ ו-$yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.
* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

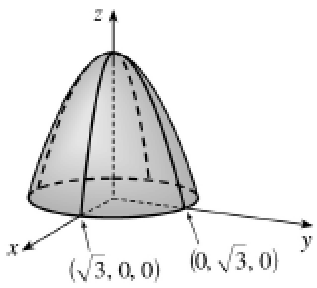
דוגמאות שונות



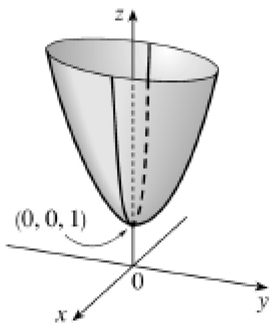

$z=3-x^2-y^2$
$x^2+y^2+z^2=1$



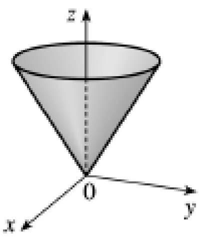

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



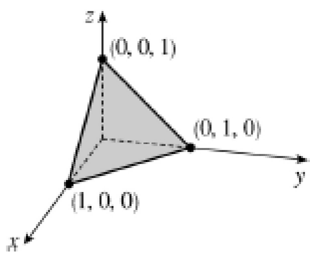

$x^2+y^2+z^2=1$




$x+y+z=1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$z=4x^2+y^2+1$

# הצגות פרמטריות של עקומים חשובים

| עקום | הצגה פרמטרית | דוגמה |
|---|---|---|
| $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ | $x=t,\ y=f(t)\ (a\le t\le b)$ | $y=x^2\,(1\le x\le 2)$<br>$\Downarrow$<br>$x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$ |
| $x=f(y)\ (a\le y\le b)$ | $y=t,\ x=f(t)\ (a\le t\le b)$ | $x=y^2\,(1\le y\le 2)$<br>$\Downarrow$<br>$y=t,\ x=t^2\ (1\le t\le 2)$ |
| $x^2+y^2=r^2$<br>מעגל | $x=r\cos t, y=r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$<br>נגד כיוון השעון | $x^2+y^2=4$<br>$\Downarrow$<br>$x=2\cos t, y=2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| $x^2+y^2=r^2$<br>מעגל | $x=r\cos t, y=-r\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$<br>עם כיוון השעון | $x^2+y^2=4$<br>$\Downarrow$<br>$x=2\cos t, y=-2\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$<br>אליפסה | $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$<br>נגד כיוון השעון | $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$<br>$\Downarrow$<br>$x=3\cos t, y=5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$<br>אליפסה | $x=a\cos t,\ y=-b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$<br>עם כיוון השעון | $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$<br>$\Downarrow$<br>$x=3\cos t, y=-5\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ |
| ישר פרמטרי במישור<br>מהנקי' $(x_0,y_0)$<br>לנקי' $(x_1,y_1)$ | $x=x_0+t(x_1-x_0)$<br>$y=y_0+t(y_1-y_0)$<br>$(0\le t\le 1)$ | ישר פרמטרי מהנקי' $(1,2)$ לנקי' $(3,4)$<br>$x=1+2t$<br>$y=2+2t$<br>$(0\le t\le 1)$ |
| ישר פרמטרי במרחב<br>מהנקי' $(x_0,y_0,z_0)$<br>לנקי' $(x_1,y_1,z_1)$ | $x=x_0+t(x_1-x_0)$<br>$y=y_0+t(y_1-y_0)$<br>$z=z_0+t(z_1-z_0)$<br>$(0\le t\le 1)$ | ישר פרמטרי מ- $(1,2,3)$ ל- $(4,7,9)$<br>$x=1+3t$<br>$y=2+5t$<br>$z=3+6t$<br>$(0\le t\le 1)$ |

## נוסחאות - גיאומטריה אנליטית במישור ובמרחב (וקטורים)

### במישור

**מרחק בין 2 נקודות** במישור $(x_1,y_1)$ ו- $(x_2,y_2)$ : $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

**שיפוע ישר** העובר דרך 2 נקודות $(x_1,y_1)$ ו- $(x_2,y_2)$ : $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

**ישר דרך** $(x_1,y_1)$ **ששיפועו** $m$ : $y-y_1=m(x-x_1)$

**ישר דרך** $(x_1,y_1)$ **ו-** $(x_2,y_2)$ : $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

תנאי ש**הישר** $y=m_1x+n_1$ יהיה **מאונך** לישר $y=m_2x+n_2$ : $m_1\cdot m_2=-1$

תנאי ש**הישר** $y=m_1x+n_1$ יהיה **מקביל** לישר $y=m_2x+n_2$ : $m_1=m_2$

**מרחק הנקודה** $(x_0,y_0)$ **מהישר** $ax+by+c=0$ : $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**הזוית החדה** $\alpha$ בין הישר $y=m_1x+n_1$ לישר $y=m_2x+n_2$ : $\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

**מעגל שמרכזו בנקודה** $(a,b)$ ורדיוסו $R$ : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

**משוואת אליפסה** קנונית : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר $a$ ו- $b$ חוצי הצירים של האליפסה.

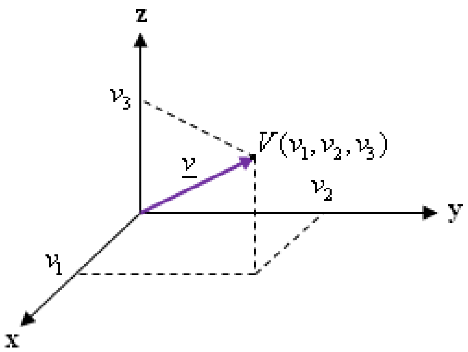
**משוואת היפרבולה** קנונית : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר $a$ הוא חצי הציר הממשי.

**משוואת פרבולה** קנונית : $y^2=2px$

# במרחב (וקטורים)

**מרחק בין 2 נקודות** $(x_1,y_1,z_1)$ ו- $(x_2,y_2,z_2)$ : $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ההצגה האלגברית של וקטור




על כל נקודה $V(v_1,v_2,v_3)$ במרחב התלת-ממדי ניתן להסתכל כעל חץ שמוצאו בראשית הצירים $O(0,0,0)$ וסופו בנקודה $V$. חץ זה נקרא וקטור ומסומן $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$.

* מקובל לרשום $\vec{v}$ או $\mathbf{v}$ במקום $\underline{v}$.

ההצגה האלגברית של וקטור בעזרת וקטורי הצירים

וקטורי הצירים הם הוקטורים: $),1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$

המסומנים גם כך $,0,1,0),\hat{k}=(0,0,1)$

או כך $\hat{x}=(1,0,0),\ \hat{y}=(0,1,0),\hat{z}=(0,0,1)$

או כך $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$

ההצגה של וקטור $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ בעזרת וקטורי הצירים היא $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$

פעולות בין וקטורים:

**נתונים שני וקטורים:** $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ , $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

כפל וקטור בסקלר: $k\cdot\vec{a}=k(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)$

**חיבור וקטורים**: $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\right)$

**מכפלה סקלרית** של וקטורים: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\right)$.

**מכפלה וקטורית** של וקטורים: $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\left(a_2b_3-a_3b_2\right),-\left(a_1b_3-a_3b_1\right),\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\right)$

**גודל וקטור** $\vec{a}$ (אורך הוקטור): $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

**הנירמול** של וקטור $\vec{a}$: $\hat{a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{(a_1,a_2,a_3)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

כיוון וקטור במרחב

יהיו $\alpha,\beta,\gamma$ שלוש הזוויות שיוצר הוקטור $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ עם הצירים $x,y,z$ בהתאמה.

1. $a_1=|\vec{a}|\cos\alpha, a_2=|\vec{a}|\cos\beta, a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$
2. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
3. הוקטור $\hat{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ הוא וקטור יחידה בכיוון $\vec{a}$.

**משוואת ישר פרמטרי במישור** דרך $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$:

$$\underline{x}=\underline{a}+t\cdot\underline{u}\quad\left(\underline{a}=A,\ \underline{u}=B-A\right)$$

*or*

$$(x,y)=(x_1,y_1)+t\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$$

*or*

$$x=x_1+t(x_2-x_1)\ ,\ y=y_1+t(y_2-y_1)$$

**משוואת ישר פרמטרי במרחב** דרך $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ :

$$\underline{x}=\underline{a}+t\cdot\underline{u}\quad(\underline{a}=A,\ \underline{u}=B-A)$$
$$or$$
$$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$$
$$or$$
$$x=x_1+t(x_2-x_1)\ ,\ y=y_1+t(y_2-y_1)\ ,\ z=z_1+t(z_2-z_1)$$

זווית בין שני ישרים

נתונים שני ישרים : $L_1:\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ ו- $L_2:\ \underline{x}=\underline{b}+s\underline{v}$

הזווית $\alpha$ בין הישרים מקיימת: $\cos\alpha=\dfrac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}||\underline{v}|}$

**משוואת מישור** : $ax+by+cz+d=0$ כאשר $\vec{v}=(a,b,c)$ וקטור נורמל (מאונך) למישור.

משוואת מישור דרך 3 נקודות: $(x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2),\ (x_3,y_3,z_3)$ :

$$\det\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{pmatrix}=0$$

מרחק נקודה ממישור

מרחק הנקודה $(x_0,y_0,z_0)$ מהמישור $ax+by+cz+d=0$ : $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

זווית בין ישר ומישור

נתונים: ישר $L:\ \underline{x}=\underline{r}+t\underline{u}$ ומישור $ax+by+cz+d=0$.

הזווית $\alpha$ בין הישר למישור מקיימת: $\sin\alpha=\dfrac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}||\underline{v}|}$ באשר $\underline{v}=(a,b,c)$.

הערה:

הישר $\underline{x}=t(a,b,c)$ מאונך למישור $ax+by+cz+d=0$.

לפיכך, אם הישר $L:\ \underline{x}=\underline{r}+t\cdot\underline{u}$ מקביל למישור אז $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$.

זווית בין שני מישורים

נתונים שני מישורים: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

הזווית $\alpha$ שבין המישורים מקיימת : $\cos\alpha=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

# פרק 28 - פונקציות הומוגניות, משפט אוילר

שאלה 1

א. הוכח כי פונקצית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית. הנח כי $m$ קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$ .

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$ .

שאלה 2

תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר $m$ המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=\sqrt{27}$ .

א. מצא את סדר ההומוגניות, $m$ .

ב. בנקודה $(6,3)$ עוברת עש"ע של $f$ . מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל. המשיק הוא $2x+3y=21$ . מצא את $f_x(1,0.5)$ , $f_y(2,1)$ , $f_x(2,1)$ .

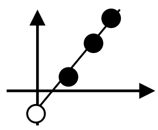
שאלה 3

תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה $g$ ידוע כי $g(4)=5$ , $g(1)=3$ , $g'(8)=2$ .

המשתנה $t$ תלוי במשתנים החיוביים $(x,y)$ כך: $t=\frac{4y}{x}$ .

מגדירים תועלת $u$ כפונקציה של המשתנים $(x,y)$ באופן הבא: $u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right)$ .

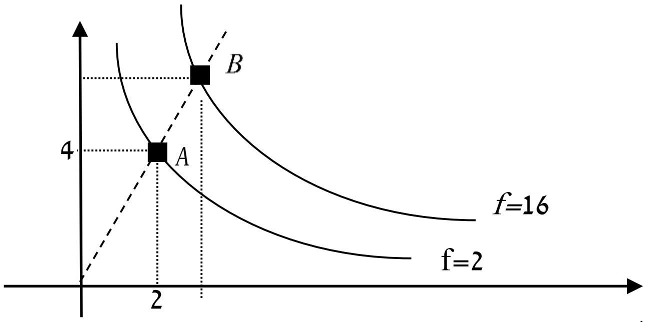


א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1,2)=-16$ .




שאלה 4

הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר **3** .
הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה $B$ .
ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$ .
ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$ על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$
ג.1. לפי כללי הגזירה מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$ . הסבר זאת בקצרה.
ג.2. הוכח כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$ . היעזר ב- 1 ובנתונים על $f$ .

# פרק 29 - וקטורים

**הערה:** אנו נסמן את הוקטור $u$ כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\mathbf{u}, \vec{u}$.
את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את $x$, $y$ ו- $z$ אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$ ז. $\underline{u}/|\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u},\underline{v})$ ט. $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$ י. $proj(\underline{u},\underline{v})$

* בסעיפים ז,ח,י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות $x$, $y$ ו- $z$.
ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.
א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:
1. $A$ ו- $B$ 2. $B$ ו- $C$ 3. $A$ ו- $C$
ב. מי מבין הנקודות $D=(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר $AB$ שמצאת בסעיף הקודם.
ג. חשב את הזווית שבין הישר $AB$ והישר $BC$.

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- $x$, ציר ה- $y$ וציר ה- $z$.
ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4,5,6)$ ומקביל לציר $z$.

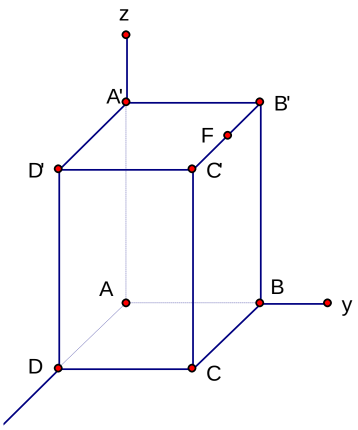
(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר <u>העובר דרך הנקודה</u> $(1,2,3)$ <u>והמאונך</u> לישר $\underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר $l_2$ <u>העובר דרך הנקודה</u> $P(-4,1,1)$, <u>מאונך</u> לישר $l_1:\ (2,-3,1)+t(1,4,-3)$ <u>וחותך</u> אותו.

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,0,1)+s(-4,1,5)$ .
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות $x$ , $y$ ו- $z$ .
ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x=1+2t-s,\ y=10+t,\ z=4-t+s$ .
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.
ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

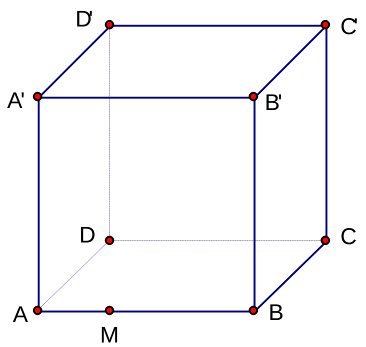
(11) נתונות הנקודות: $A(1,1,3)$ , $B(1,2,0)$ , $C(1,1,1)$ .
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר, המחבר את $B$ עם $C$ הראה כי הנקודה $A$ לא נמצאת על הישר הזה.
ב. חשב את המרחק בין הנקודה $A$ לבין הישר המחבר את $B$ עם $C$ .
ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $A$ והמאונך לישר המחבר את $B$ עם $C$.

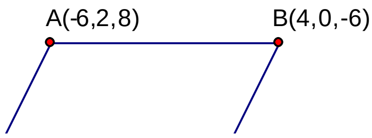



(12) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ כמתואר בציור.
נתון:
$|\vec{AA'}|=6$ , $|\vec{AD}|=2$ , $|\vec{AB}|=4$ , $C'F=FB'$.
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה $F$ ומאונך למישור העובר העובר דרך $A'DB$ .
ב. מצא את מרחק הנקודה $F$ מהמישור העובר העובר דרך $A'DB$ .

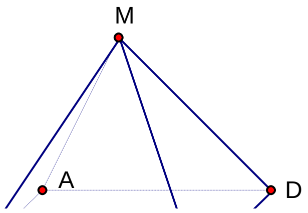
(13) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתונים הקודקודים:

$A(7,-9,5),\ B(1,-3,-7),\ C(-5,-1,-3),\ C'(-1,7,-1)$ .
הנקודה $M$ מחלקת את המקצוע $AB$ כך ש- $\vec{BM}=2\vec{MA}$ .
א. חשב: $|\vec{MA'}|, |\vec{MC}|$.
ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A'MC$ .

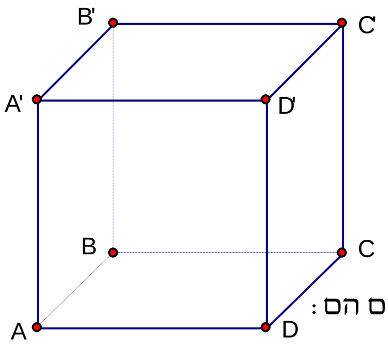





(14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).
א. מצא את קודקוד $D$.
ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.




(15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$
וקודקודה $M$ (ראה ציור). נתון:
$A(3,6,-1),\ B(-1,2,-3),\ C(7,6,-3),\ M(4,-3,-4.5)$.
א. מצא את גודל זווית $S\,ABC$.
ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.
ג. מצא את נפח הפירמידה.




(16) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.
נתון: $A(1,2,0),\ C(4,0,1),\ D(2,2,-1),\ B'(9,12,8)$
חשב את נפח התיבה.

(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם: נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
א. $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0),\ \underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$.
ב. $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1),\ \underline{x}=(1,-1,0)+t(12,-3,1)$.
ג. $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1),\ \underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$.
ד. $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4),\ \underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$.
במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את <u>נקודות החיתוך</u> ואת <u>הזווית</u> בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את <u>המרחק</u> ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים :

$$l_1 : (x,y,z) = (4,3,1) + t(1,-3,2)$$
$$l_2 : (x,y,z) = (5,-1,4) + m(-1,3,5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.
ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את $l_2$ ומקביל ל- $l_1$.
ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים :

$$l_1 : (x,y,z) = (3,1,1) + u(2,-1,-2)$$
$$l_2 : (x,y,z) = (3,9,-6) + m(6,2,-1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?
ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.
אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות : $P(k,0,0)$, $Q(0,4,0)$, $R(0,k,3)$, $S(1,1,-1)$.
א. הראה שלא קיים ערך של $k$ עבורו הישרים $PQ$ ו- $SR$ מקבילים.
ב. מצא עבור איזה ערך של $k$ הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,
ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר $l_1$ עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$ .
הצגה פרמטרית של הישר $l_2$ היא : $l_2 :\ (2,k+1,3) + t(k^2-9,-7,0)$ .
א. 1. עבור איזה ערך של $k$ הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?
2. עבור איזה ערך של $k$ הישרים מתלכדים?
ב. מצא משוואה של מישור $\pi$ , המכיל את הישר $l_1$ ומקביל לציר ה- $z$ .
ג. עבור $k$ שמצאת בתת סעיף א.1 , מצא את המרחק של $l_2$ מהמישור $\pi$.

(22) נתונות ארבע נקודות : $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$
הישר $l_1$ מחבר את הנקודה $A$ עם הנקודה $B$.
הישר $l_2$ מחבר את הנקודה $C$ עם הנקודה $D$.
א. מצא עבור איזה ערך של $k$ הישרים מאונכים זה לזה.
ב. עבור הערך של $k$ שמצאת בסעיף א. , מצא את משוואת המישור המכיל את הישר $l_1$
ומקביל לישר $l_2$ .

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר:
חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $2x-3y+4z-5=0$ , $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$.

ב. $2x-5y+3z-6=0$ , $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$.

ג. $2x-14y+10z=-6$ , $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר $l$ עובר דרך הנקודות $A(4,-6,5)$ ו- $B(4+k,3,2)$
ונתון מישור $\pi: x-4y-kz-5=0$ .

א. עבור איזה ערך של $k$ הישר מקביל למישור?

ב. המישור $\pi$ חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $C$ .
עבור $k$ שמצאת בסעיף א, חשב את הזווית בין המישור $\pi$ לבין $\overrightarrow{BC}$ .

(25) נתונים ישר: $l:(2,1,-1)+t(0,a,-1)$ ומישור: $\pi: x-2y-4z=4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע $a$ יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר $l$ ומאונך למישור $\pi$ .

(26) נתונים שני ישרים ומישור:

$$l_1:(x,y,z)=(2,1,1)+t(1,-1,-1)$$
$$l_2:(x,y,z)=(3,-1,2)+s(-2,1,1)$$
$$\pi:\ x-y+2z=3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

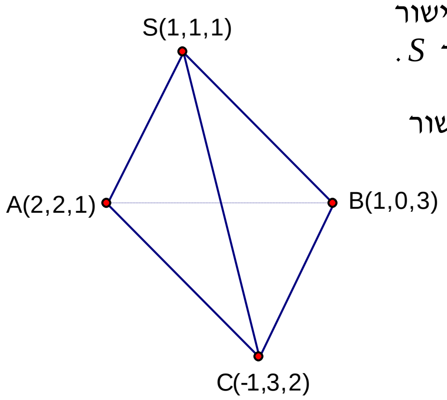
ב. מצא את הנקודות על הישר $l_2$ שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$ .

(27) בציור משמאל נתון טטראדר $SABC$.

א. הוכח כי אחד המקצועות דרך $S$ , ניצב למישור
הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך $S$.

ב. מצא את משוואות המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזווית שבין המקצוע $AC$ לבין מישור
המשולש $\Delta SAB$.



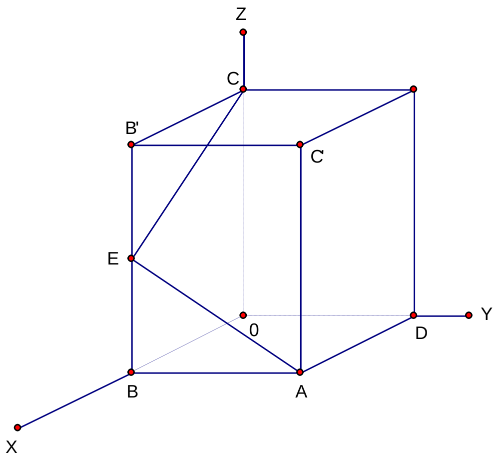
(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם:
מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
א. $x-2y+2z-10=0$ , $2x+y+2z-4=0$ .
ב. $2x-5y+3z-6=0$ , $4x-10y+6z-8=0$ .
ג. $2x-14y+10z=-6$ , $x-7y+5z=-3$ .
במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים: $x+2y-z=7,\ 2x+3y-4z=10$ .
מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך $l_1$ של שני המישורים.
ב. נתון: $l_2:(6,2,-2)+s(2,-1,1)$ . מהו המצב ההדדי בין $l_1$ ו- $l_2$ .

(30) נתונים שני מישורים: $x-y+2z-7=0,\ 2x+y-3z+1=0$ .
א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך $l$ של שני המישורים.
ב. עבור איזה ערך של הפרמטר $C$ , יקביל הישר $l$ למישור $\pi:4x-y+Cz-1=0$ ?
ג. עבור $C$ שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר $l$ מהמישור $\pi$ .

(31) נתונים שני מישורים: $x+y+2z=6,\ x-3y+4z=-10$ ונקודה $M(1,8,-3)$ .
הישר $l$ הוא ישר החיתוך של המישורים הנ"ל.
א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $M$ וניצב לישר $l$.
ב. מצא את מרחק הנקודה $M$ מהישר $l$.

(32) הישר $l:(0,-2,1)+t(-3,4,m)$ מקביל למישור $\pi_1:x-2y-4z=4$ .
א. מצא את הקבוע $m$ .
ב. הנקודה $N(2,-1,4)$ נמצאת על המישור $\pi_1$ ויוצרת עם הישר $l$ מישור $\pi_2$ .
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים $\pi_1$ ו- $\pi_2$ .




(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא בראשית הצירים.

$E$ אמצע $BB'$ , $|AB|=1$ .

א. חשב את זווית $\measuredangle CEA$ .

ב. חשב את הזווית בין שני המישורים $AEC$ ו- $BODA$ .

(34) נתונים שני ישרים :

$$l_1 : (1,2,3)+t(3,-12,18)$$
$$l_2 : (2,5,-1)+u(-4,16,-24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב- א., ועובר דרך הנקודה $(0,-1,0)$ .

## פתרונות

**לתשומת לבכם!**
הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

(1) $x=5, y=-2, z=6$

(2) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$ ד. $(2.5,-1,-3.5)$
ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$ ז. $\frac{1}{\sqrt{26}}(-3,1,4)$ ח. 12.5698
ט. 14 י. $(\frac{-19}{7},\frac{19}{14},\frac{57}{14})$

(3) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

(4) א. $x=1+4t, y=2+5t, z=3+6t$ ב. $\underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

(5) א.1) $(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א.2) $(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$
א.3) $(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה $D$
ג. $35.477^\circ$

(6) א. $t(1,0,0)$ , $t(0,1,0)$ , $t(0,0,1)$ ב. $(4,5,6)+t(0,0,1)$

(7) $(1,2,3)+t(2,1,0)$

(8) $(-4,1,1)+t(83,-32,-15)$

(9) א. $x=1+2t-4s, y=-2+s, z=3+t+5s$ ב. $(1,10,4)+t(2,1,-1)+s(-1,0,1)$

(10) א.1. $(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ א.2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$ , $(-0.5,0,0)$ ג. לא

(11) א. $(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. 1.4142 ג. $y-z+2=0$

(12) א. $(1,4,6)+t(6,3,2)$ ב. $\frac{18}{7}$

(13) א. $|\overrightarrow{MA'}|=\sqrt{108}$, $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{152}$ ב. 59.396

(14) א. $D(-20,8,12)$ ב. $81.62^\circ$

(15) א. $26.565^\circ$ ב. $S=24$ ג. $V=32$

(16) $V=72$

(17) א. מקבילים, 1.095   ב. מצטלבים, 4.07   ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. זווית בין הישרים $47.6^\circ$.

(18) ב. $3x+y=14$   ג. 0.31622

(19) א. מצטלבים   ב. 10

(20) ב. $d=\frac{2}{15}, k=0.8$

(21) א.1. $k=-4$   א.2. $k=4$   ב. $x+y=7$   ג. 5.65685

(22) א. $k=2$   ב. $8x-4y+5z+1=0$

(23) א. מקביל, 0.9284   ב. מוכל
ג. חותך בנק' (3.5,-0.5,-2), זוית בין הישר למישור $40.78^\circ$

(24) א. $k=9$   ב. $14.67^\circ$

(25) א. $a=2$   ב. $10x+y+2z-19=0$

(26) א. $l_1$ מוכל, $l_2$ חותך.   ב. $(-1,1,4),(\frac{11}{3},\frac{-4}{3},\frac{5}{3})$

(27) א. $SC\perp SAB$   ב. $2x-2y-z+1=0$   ג. $64.76^\circ$

(28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך: $(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$. זווית $63.612^\circ$.
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם: 0.324   ג. המישורים מתלכדים.

(29) א. $(9,0,2)+t(-5,2,-1)$   ב. מצטלבים

(30) א. $(2,-5,0)+t(1,7,3)$   ב. $C=1$   ג. $2.8284$

(31) א. $5x-y-2z=3$   ב. 5.07

(32) א. $m=-8$   ב. $(2,-1,4)+t(-4,4,-8)$

(33) א. $78.463^\circ$   ב. $35.26^\circ$

(34) א. $2x-10y-7z+39=0$   ב. $2x-10y-7z-10=0$

# נספח נוסחאות

## גבולות

| | $x\to-\infty$ | $x\to 0$ | $x\to\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty}=0$ | $\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$ | $\frac{1}{\infty}=0$ |
| $y=e^x$ | $e^{-\infty}=0$ | $e^0=1$ | $e^{\infty}=\infty$ |
| $y=\ln x$ | $---$ | $\ln(0^+)=-\infty$ | $\ln(\infty)=\infty$ |
| $y=\arctan x$ | $\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$ | $\text{atan}(0)=0$ | $\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$ |
| $y=a^x, a>1$<br>$y=a^x, 0<a<1$ | $a^{-\infty}=0$<br>$a^{-\infty}=\infty$ | $a^0=1$<br>$a^0=1$ | $a^{\infty}=\infty$<br>$a^{\infty}=0$ |
| $y=\sin x$ | $---$ | $\sin 0=0$ | $---$ |
| $y=\cos x$ | $---$ | $\cos 0=1$ | $---$ |
| $y=\frac{\sin x}{x}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $y=\frac{\tan x}{x}$ | $---$ | $1$ | $---$ |
| $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$<br>$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $e$<br>$---$ | $\text{(from right)}\ \ 1$<br>$e$ | $e$<br>$1$ |
| $y=\sqrt{x}$<br>$y=\sqrt[3]{x}$ | $---$<br>$-\infty$ | $\sqrt{0^+}=0$<br>$\sqrt[3]{0}=0$ | $\sqrt{\infty}=\infty$<br>$\sqrt[3]{\infty}=\infty$ |

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty\ ,\quad \infty(-\infty)=-\infty\ ,\quad \infty+\infty=\infty\ ,\quad \infty\pm a=\infty\ ,\quad \infty\cdot(\pm a)=\pm\infty\ ,\quad \infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

# נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \quad \rightarrow \quad y' = 0$
2. $y = f^n \quad \rightarrow \quad y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \quad \rightarrow \quad y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \quad \rightarrow \quad y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \quad \rightarrow \quad y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \quad \rightarrow \quad y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \quad \rightarrow \quad y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \quad \rightarrow \quad y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x))'$

# נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax\_b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

## נוסחאות - טריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=(\pi-\alpha)+2\pi k\end{cases}\\ \cos x=\cos\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{cases}\\ \tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=\alpha+\pi k\\ \cot x=\cot\alpha \Rightarrow x=\alpha+\pi k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=0 \Rightarrow x=\pi k\\ \cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

## נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab) \\ a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \\ a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ (a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0, b>0 \\ \ln a+\ln b=\ln ab \\ \ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b} \\ \ln 1=0\ ,\ \ln e=1 \\ \ln e^n=n \\ \ln x^n=n\ln x\ (x>0) \\ e^{\ln x}=x \\ a^b=e^{b\ln a} \\ \ln x=k\ \Rightarrow\ x=e^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^m a^n=a^{m+n} \\ \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \\ \left(a^m\right)^n=a^{mn} \\ (ab)^n=a^nb^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n} \\ a^0=1 \\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n} \\ \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \\ a^x=b\ \Rightarrow\ x=\ln b \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & if\ \ a\ge 0 \\ -a & if\ \ a<0 \end{cases} \\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b| \\ \left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|} \\ |x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \\ |x|>a \Leftrightarrow x<-a\ or\ x>a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{cases}$$

## נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| תחום התכנסות | טור מקלורן |
| --- | --- |

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad -1<x\le 1$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad -1\le x\le 1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots \qquad -1<x<1$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n \\ &=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots\end{aligned} \qquad \begin{array}{l}-1\le x\le 1\ (m>0)\\ -1<x\le 1\ (-1<m<0)\\ -1<x<1\ (m\le -1)\\ m\ne 0,1,2,3,\ldots\end{array}$$