נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות:

1) תהי $f(x,y)=x^2+y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3,4)$. מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f, העובר דרך $(3,4)$.

2) תהי $f(x,y)=3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

3) תהי $f(x,y)=x-\sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,\pi/2)$ בכיוון הווקטור $\vec{u}=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

4) תהי $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היחידה,

היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x.

5) תהי $f(x,y)=xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,3)$ בכיוון לנקודה $(4,5)$.

6) תהי $f(x,y)=x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2,1,4)$ בכיוון הווקטור $\vec{u}=1\cdot\mathbf{i}+2\cdot\mathbf{j}+2\cdot\mathbf{k}$.

7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x,y) נתון על ידי $V=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,

מצא את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3,4)$ בכיוון לנקודה $(2,6)$.

8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$

בנקודה $(0,0)$, היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)=2x^3y-3y^2z$, בנקודה $(1,2,-1)$ היא מקסימלית, וחשב את ערכה.

10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x,y,z)=3x^2-5y^2+2z^2$, ואתה נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך ללכת?

11) נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^2y$.

א. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$ בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

12) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2yz^4$.
מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1,2,-1)$ בכיוון וקטור היוצר זווית של 60 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו-60 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הנח שהזווית עם ציר ה- y חדה.

13) נתונה הפונקציה $f(x,y)=xy^2-x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1,1)$.

א. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית 60 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q)=6$.

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+4y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכח כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ג. חשב את $\nabla f(0,0)$.

ד. בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0,0)$.

ה. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0,0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u}=(1,-1)$.

ו. הסבר מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

15) הפונקציה $f(x,y,z)=2x^2+4y^2+z^2$, מתארת טמפרטורה בנקודה (x,y,z).

א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2,4,1)$.

ב. אוסף הנקודות (x,y,z), בהן הטמפרטורה שווה 20 מעלות, מהווה משטח מפורסם. מהו?

ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2,4,1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?

ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2,4,1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן.
באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

16) גֻּלָּה מוחזקת בנקודה $(2,1,14)$, שעל המשטח $z=20-x^2-2y^2$.
משחררים את הגֻּלָּה והיא מתחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.

א. מהו המשטח הנתון?

ב. מצא את הווקטור $\vec{u}=(a,b,c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֻּלָּה.

17) נתונה $f=f(x,y,z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת: $f\left(x,y,x^2+y^2\right)=2x+y$.
נתון כי $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,2,4)=-\dfrac{5}{3}$, כאשר $\vec{u}=(-2,1,2)$.
חשב את $\nabla f(0,2,4)$.

18) נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשב את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8,1)$ בכיוון הוקטור $\vec{u}=(3,4)$.

ב. בדוק האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (0,0).

ג. חשב $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

ד. באיזה כיוון α, הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

19) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}+20x+21y & x\neq 0 \\ 21y & x=0 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)<m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצא וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=0$.

הערות סימון:

1) במישור R^2 : $\mathbf{j}=(0,1)$, $\mathbf{i}=(1,0)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:
$\vec{u}=(x,y)$ **או** $\vec{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
למשל: $\vec{u}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4)$.
במרחב R^3 : $\mathbf{k}=(0,0,1)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{i}=(1,0,0)$,
ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v}=(x,y,z)$, **או** $\vec{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.
למשל: $\vec{u}=3\cdot\mathbf{i}+4\cdot\mathbf{j}+5\cdot\mathbf{k} \Leftrightarrow \vec{u}=(3,4,5)$.

2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם כך $\underline{u}$ או כך $\mathbf{u}$.

3) וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

תשובות סופיות:

1) א. הגרדיאנט $(6,8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.

2) $\frac{48}{5}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $7.5\sqrt{2}$

5) $3\sqrt{13}$ 6) $\frac{88}{3}$ 7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(1,1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.

9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

10) בכיוון הוקטור $(-2,2,-2)$.

11) א. $8\sqrt{3}+8$ ב. $8+8\sqrt{3}$ ג. $\ell:\ (1,2,4)+t\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},8+8\sqrt{3}\right)$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}-2$

13) א. $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ב. $\vec{u}=(5,1)$ (יש עוד). ג. לא.

14) א. הוכחה. ב. $f_x=1,\ f_y=0$ ג. $\nabla f(0,0)=(1,0)$
ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0

15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הוקטור $(8,32,2)$.
ד. בכיוון הוקטור $(8,32)$.

16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u}=(4,4,-32)$

17) $\nabla f(0,2,4)=(2,-3,1)$

18) א. $\frac{67}{5}$ ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12\left(\cos\alpha-\cos^3\alpha\right)^{\frac{1}{3}}$
ד. $\alpha=54.73^\circ$, $Max\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=12\left(2/\sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

19) א. $m>29$ ב. $\hat{u}=\left(21/29,-20,29\right)$ (יש אחרים).