כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות:

1) נתון: $x=2u-v,\ \ y=u^2+v^3\ ,z=\ln(x^2-y^2)$.
חשב: $z_u\ ,\ \ z_v$.

2) נתון: $v=4t+k\ ,u=t^2+4m\ ,\ z=e^{u-v}$.
חשב: $z_t,\ z_m,\ \ z_k$.

3) נתון: $z=f(x^2-y^2)$.
הוכח: $y\cdot z_x+x\cdot z_y=0$.

4) נתון: $z=f(xy)$.
הוכח: $x\cdot z_x-y\cdot z_y=0$.

5) נתון: $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$.
הוכח: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=0$.

6) נתון: $z=f(x-y,y-x)$.
הוכח: $z_x+z_y=0$.

7) נתון: $w=f(x-y,y-z,z-x)$.
הוכח: $w_x+w_y+w_z=0$.

8) נתון: $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$.
הוכח: $u_x\cos y+u_y\cos x=\cos x\cos y$.

9) נתון: $z = y\cdot f(x^2-y^2)$.
הוכח: $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=\frac{z}{y^2}$.

10) נתון: $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$.
הוכח: $x\cdot z_x+y\cdot z_y=xy+z$.

11) נתון: $u(x,y,z)=x^2\cdot f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.
הוכח: $xu_x+yu_y+zu_z=2u$.

12) נתון: $h(x,y)=f(y+ax)+g(y-ax)$.
הוכח: $h_{xx}=a^2\cdot h_{yy}$.

13) נתון: $u(x,y)=f(e^x\sin y)-g(e^x\sin y)$. הוכח:

א. $u_{xx}+u_{yy}=\frac{u_{xx}-u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy}=u_{yx}$

ג. חשב: $u_{xy}u_{yx}(1,\pi)$, אם ידוע ש- $f'(0)=2,\quad g'(0)=1$.

14) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

א. הוכח: $(u_x)^2+(u_y)^2=(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\theta)^2$.

ב. הוכח: $u_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$.

ג. הוכח: $f_{xx}+f_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r}u_r$.

15) נתון: $z=h(u,v)$, ונתון כי $v=g(x,y)$, $u=f(x,y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.
הוכח כי:
א. u,v מקיימות את משוואת לפלס. כלומר, $u_{xx}+u_{yy}=0$, $v_{xx}+v_{yy}=0$.
ב. $h_{xx}+h_{yy}=\left((u_x)^2+(v_x)^2\right)(h_{uu}+h_{vv})$

16) נתון: $u=f(x,y)$, $x=r\cosh s$, $y=r\sinh s$.
הוכח כי: $(u_x)^2-(u_y)^2=(u_r)^2-\frac{1}{r^2}(u_s)^2$.

17) פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n, אם $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$.
הוכח כי אם f הומוגנית, אז:
א. $x\cdot fx+y\cdot fy=n\cdot f(x,y)$
ב. $x^2 fxx+y^2 fyy+2xyfxy=n(n-1)\cdot f(x,y)$

18) נתונה הפונקציה $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$.
ב. נתון $x=2t, y=t$ חשב את $z'(0)$ באופן ישיר.
ג. נתון $x=2t, y=t$ חשב את $z'(0)$ עפ"י כלל השרשרת.
ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד קבע האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות:

1) $z_u = \frac{1}{x^2 - y^2}\cdot 2x\cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2}(-2y)\cdot 2u$

2) $z_t = e^{u-v}(1)\cdot 2t + e^{u-v}(-1)\cdot 4,\quad z_m = e^{u-1}(1)\cdot 4,\quad z_k = e^{u-v}(-1)\cdot 1$

13) ג. $-e$

18) א. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ב. $\frac{4}{5}$ ג. 0 ד. לא דיפרנציאבילית.

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים : GooL.co.il