נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות:

בשאלות 1-10 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin\left(xy\right)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$. הוכח כי: $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון: $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשב: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון:

$$\boxed{f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\quad;\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

תשובות סופיות:

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\quad$ $f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $\quad$ $f_y = \dfrac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\quad$ $f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\quad$ $f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy) \cdot y$ $\quad$ $f_y = \cos(xy) \cdot x$

7) $f_x = \dfrac{2}{1 + (2x + 3y)^2}$ $\quad$ $f_y = \dfrac{3}{1 + (2x + 3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $\quad$ $f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $\quad$ $f_y = 2xyz^3$ $\quad$ $f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $\quad$ $f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut$ $\quad$ $f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut$

11) הוכחה.

12) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0, -1, \dfrac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון:

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות:

בשאלות 1-14 חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{xy}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

15) חשב $f'_{xy}(1,1)$ עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשב $f'_{xy}(1,1)$ עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשב $f'_{xy}(1,1)$ עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשב: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

הערת סימון:

$$f = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

תשובות סופיות:

1)
$$f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \qquad f_{xx} = 8 - 2y^2 \qquad f_y = -2x^2y + 10$$
$$f_{yy} = -2x^2 \qquad f_{xy} = -4xy \qquad f_{yx} = -4xy$$

2)
$$f_x = 4x^3 \ln y \qquad f_{xx} = 12x^2 \ln y \qquad f_y = \frac{x^4}{y}$$
$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \qquad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \qquad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$$

3)
$$f_x = 3x^2 - 6y \qquad f_{xx} = 6x - 0 \qquad f_y = 3y^2 - 6x$$
$$f_{yy} = 6y - 0 \qquad f_{xy} = 0 - 6 \qquad f_{yx} = -6$$

4)
$$f_x = 3x^2 + 3 - 3y \qquad f_{xx} = 6x \qquad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$$
$$f_{yy} = 6y - 6 \qquad f_{xy} = -3$$

5)
$$f_x = 2xy - y^2 \qquad f_{xx} = 2y \qquad f_y = x^2 - 2xy$$
$$f_{yy} = -2x \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$$

6)
$$f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$$
$$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$$
$$f_{xx} = 2[8y - 0 - 24] \qquad f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \qquad f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

7)
$$f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right) \qquad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$$
$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy} \qquad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$$
$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$$

8)
$$f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) \qquad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$$
$$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y} \qquad f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$$
$$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$$

9) $f_x=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$ $\qquad f_y=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)$

$$f_{xx}=e^{-x^2-y^2}(-2x)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy}=e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}=e^{-x^2-y^2}(-2y)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(-4x\cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$$

10) $f_x=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$ $\qquad f_y=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

11) $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ $\qquad f_{xx}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

12) $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\qquad f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\qquad f_{xx}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

13) $f_x=10\cos(10x+4y)$ $\qquad f_{xx}=-100\sin(10x+4y)$ $\qquad f_y=4\cos(10x+4y)$

$f_{yy}=-16\sin(10x+4y)$ $\qquad f_{xy}=-40\sin(10x+4y)$ $\qquad f_{yx}=-40\sin(10x+4y)$

14) $f_x=yz$ $\qquad f_{xx}=0$ $\qquad f_{xy}=z$ $\qquad f_{xz}=y$ $\qquad f_y=xz$ $\qquad f_{yx}=z$

$f_{yy}=0$ $\qquad f_{yz}=x$ $\qquad f_z=xy$ $\qquad f_{zx}=y$ $\qquad f_{zy}=x$ $\qquad f_{zz}=0$

15) -2

16) 1

17) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

18) $\dfrac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

2) מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

3) מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(y+x^2\right)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

בנקודה $(0,0)$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכח שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכח שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשב אותן.

5) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

6) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. בדוק האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

הערה:
תרגילים נוספים בהמשך הפרק תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות:

1) א. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.
ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

4) ב. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

5) א.

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ב. לא רציפות.

6) א. $f_{yx}(0,0)=1 \quad \neq \quad f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות:

בשאלות 1-4 בדוק האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

1) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) $$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x+y}{y+4x} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5) בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

6) נתון: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

7) נתון: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^m} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, m קבוע.

א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?

ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נגדיר פונקציה חדשה $\phi(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy\geq 0\\ 0 & xy<0\end{cases}$.

נתון $f_x(0,0)=f_y(0,0)=f(0,0)=0$.

הוכח ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

9) בדוק דיפרנציאביליות הפונקציה $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

בנקודה $(0,0,0)$.

10) נתונה $f:R^n\to R$ המוגדרת על ידי: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq 0\\ 0.5 & x=0\end{cases}$.

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x=0$?

תשובות סופיות:

1) לא דיפרנציאבילית.
2) דיפרנציאבילית.
3) לא דיפרנציאבילית.
4) לא דיפרנציאבילית.
5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
6) א. $m>1$ ב. $m>0$ ג. $m>2$
7) א. $m<1$ ב. לכל m ג. $m<0.5$
8) הוכחה.
9) דיפרנציאבילית.
10) כן.