

טור טיילור/מקלורן

שאלות:

טור טיילור סביב $x = 0$

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin 2x$ ב. $f(x) = x^2 e^{-4x}$ ג. $f(x) = \sinh x$

ד. $f(x) = \sin^2 x$ ה. $f(x) = \cos^2 x$ ו. $f(x) = 2^x$

ז. $f(x) = x \cos(4x^2)$ ח. $f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$ ט. $f(x) = \arcsin x$

טור טיילור סביב $x = x_0$

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

א. $(x_0 = 1)f(x) = \ln x$ ב. $(x_0 = 2)f(x) = \frac{1}{x}$ ג. $(x_0 = \frac{\pi}{2})f(x) = \sin x$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

א. $f(x) = e^{-x^2} \cos x$ ב. $f(x) = \tan x$ ג. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ ג. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}$

ד. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ ה. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ו. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

ז. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ ח. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ט. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$.ב. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$.ג. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

חישובים בקירוב

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001:

א. $\frac{1}{e}$.ב. $\sin 3^\circ$.ג. $\arctan 0.25$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והערך את השגיאה בחישוב:

א. $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$.ב. $(n=1)\cos 4^\circ$.ג. $(n=4)\ln 1.5$

(8) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$?
- ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?
- ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$?

(9) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001?
- ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01?

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים, בשגיאה הקטנה מ- ε :

א. $(\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$

ב. $(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

ג. $(\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$

(1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{א.}$$

($-\infty < x < \infty$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad \text{ו.} \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{ה.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{ד.}$$

($-\infty < x < \infty$)

$$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{ז.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad \text{ט.}$$

($-1 \leq x < 1$)

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{ט.}$$

($-1 < x < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad \text{א.} \quad (2)$$

($-\infty < x < \infty$) ($0 < x < 4$) ($0 < x \leq 2$)

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad \text{ג.} \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad \text{ב.} \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\pi/4 \quad \text{ה.} \quad 2e \quad \text{ד.} \quad \sqrt{e} \quad \text{ג.} \quad e^{-2} \quad \text{ב.} \quad e \quad \text{א.} \quad (4)$$

ln $\frac{3}{2}$ ט. ln 2 ח. cos 1 ז. sin 1 ו.

$$\frac{1}{3} \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{120} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{47}{192} \quad \text{ג.} \quad \frac{\pi}{60} \quad \text{ב.} \quad \frac{53}{144} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \frac{1}{48}, \frac{5}{8} \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \quad (7)$$

$$\frac{1}{160} \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \quad \frac{77}{192} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad \text{ג.} \quad \frac{(0.01)^2}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad \text{ב.} \quad |x| < \sqrt[5]{3/25} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\frac{143}{576} \quad \text{ג.} \quad \frac{39}{400} \quad \text{ב.} \quad \frac{449}{2250} \quad \text{א.} \quad (10)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$