

סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות:

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11:

א. בדוק התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצא את הפונקציה הגבולית.

ב. בדוק התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} R \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} R$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} R \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

(12) נתונה סדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{הרת} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

(13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1, \infty)$?

(14) נתונה

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

(15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x) = [1 - \chi_n(x)] \left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$,

כאשר

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

תשובות סופיות:

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורי פונקציות

שאלות:

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4)$$

בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידן:

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12) \quad (-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

תשובות סופיות:

$$x < 3\frac{9}{10} \text{ or } x \geq 4\frac{1}{10} \quad (3) \quad x \neq 5 \quad (2) \quad x > 0 \quad (1)$$

$$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (6) \quad x > 0 \quad (5) \quad 0 < x \neq \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\text{מתכנס במידה שווה.} \quad (9) \quad \text{מתכנס במידה שווה.} \quad (8) \quad \text{מתכנס במידה שווה.} \quad (7)$$

$$\text{מתכנס במידה שווה.} \quad (12) \quad \text{מתכנס במידה שווה.} \quad (11) \quad \text{מתכנס במידה שווה.} \quad (10)$$

טורי חזקות

שאלות:

מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12)$$

מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבע את תחום ההתכנסות :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13) \qquad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \qquad f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16) \qquad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \qquad f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19) \qquad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \qquad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (22) \qquad f(x) = \ln(1-x) \quad (23) \qquad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (24)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (25) \qquad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (26) \qquad f(x) = \arctan(x/3) \quad (27)$$

הערות חשובות:

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים יט ו-כ, עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים כא, כב, כו ו-כז, עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

(28) חשב את סכום הטור: $\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$.

(29) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)x^{n-1}$.

(30) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$?

(31) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשב את סכום הטור $\sum_1^{\infty} \frac{1}{4^{2n} (4n-3)}$.

(32) חשב את סכום הטור $\sum_1^{\infty} \frac{1}{10^{4n} (4n-1)}$.

(33) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות:

- | | | |
|---|--|---|
| $-0.2 \leq x \leq 0.2, R=0.2$ (3) | $-\infty < x < \infty, R=\infty$ (2) | $-1 \leq x < 1, R=1$ (1) |
| $-1 < x < 1, R=1$ (6) | $-3 < x \leq -1, R=1$ (5) | $-1 \leq x \leq 1, R=1$ (4) |
| $-5 < x \leq 3, R=4$ (9) | $-\infty < x < \infty, R=\infty$ (8) | $x=1, R=0$ (7) |
| $-7 < x < -3, R=2$ (12) | $-9 \leq x \leq 11, R=10$ (11) | $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R=4/3$ (10) |
| $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (15) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (14) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (13) |
| $(x < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (18) | $(x < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (17) | $(x < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (16) |
| $(x < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (20) | $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (19) | |
| $(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ (22) | $(x < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$ (21) | |
| $(x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ (24) | $(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (23) | |
| $(x < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2}$ (26) | $(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ (25) | |
| $\frac{20}{27}$ (28) | $(x \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ (27) | |
| | $\frac{2}{(1-x)^3} x < 1$ (29) | |
| $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right)$.ב | $\frac{1}{4} \ln 3$.ב $\frac{1}{2} \ln \left \frac{x+1}{x-1} \right x < 1$.א (30) | |
| | $\frac{1}{4} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + \frac{1}{2} \arctan x x < 1$.א (31) | |
| | $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right)$ (32) | |
| | $\arctan x x \leq 1$ (33) | |