

פונקציות הומוגניות – משפט אוילר

שאלות:

(1) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

(2) תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר, המקיימת $f(6, 3) = 243$ ו- $f(2, 1) = 27$.

א. מצא את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(2, 1)$ עוברת עשׂייה של f . מעבירים משיק לעשׂייה בנקודה הנ"ל.

המשיק הוא $2x + 3y = 7$.

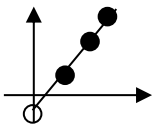
מצא את $f_x(2, 1)$, $f_y(2, 1)$, $f_x(1, 0.5)$.

(3) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה g ידוע כי $g'(8) = 2$, $g(1) = 3$, $g(4) = 5$.

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) , כך: $t = \frac{4y}{x}$.

מגדירים תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא: $u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$.



א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.

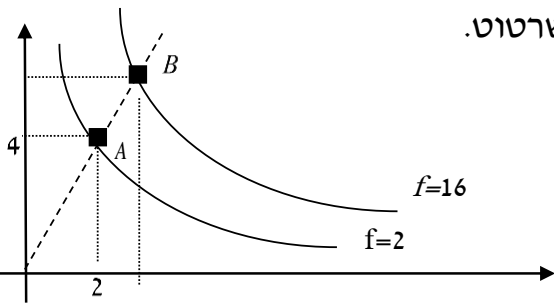
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y - x = 0$, היא עקומת אדישות של התועלת.

צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1, 2) = -16$.



4 הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$,

$$u(x, y) = (f(x, y))^2$$

i. לפי כללי הגזירה, מתקיים:

$$u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f_x(x, y)$$

הסבר זאת בקצרה.

$$ii. \text{ הוכח כי } x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$$

היעזר בסעיף הקודם ובנתונים על f .

בתרגילים הבאים בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

$$f(x, y) = x^3\sqrt{y} + y^3\sqrt{x} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (6)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (7)$$

8 ענו על הסעיפים הבאים:

א. h הומוגנית מסדר 3. בדקו מאיזה סדר פונקציית f הומוגנית:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{y^6} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{h(x, y)} - 7$$

ב. איזה חלק צריך להשמיט בפונקציה f על מנת שתהיה הומוגנית, ומה יהיה סדר ההומוגניות שלה?

9 תהא f פונקציה הומוגנית מסדר 2. נגדיר: $h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$

א. הוכח כי h הומוגנית מסדר 2.

$$b. \text{ נתון: } f(8, 1) = 16, h'_x(6, 3) = 9$$

מצא את: $h(2, 1)$ ואת $h'_y(2, 1)$.

(10) h ו- g הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x, y) = (x + y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכח כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4, 32) = 16$, $f'_y(1, 8) = 3$, $f'_x(2, 16) = 12$,

מצא את: $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$.

(11) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$.

נתון: $p(1, 2) = \frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $f'_x(2, 4) = 64$,

חשב את: $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(12) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאמה.

קבע לכל אחת מהפונקציות הבאות אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f \cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f + g$

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. 2 ב. $f_x(1,0.5) = \frac{54}{7}$ $f_y(2,1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$ $f_x(2,1) = \frac{108}{7}$

(3) א. 5 ב-ד. הוכחה.

(4) א. $B(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.

(5) הומוגנית מסדר 3.5.

(6) הומוגנית מסדר 1.

(7) הומוגנית מסדר -1.

(8) לא הומוגנית.

(9) א. הוכחה. ב. $h(2,1) = 4$ $h'_y(2,1) = 8$

(10) א. הוכחה. ב. $g(1,8) = 0$ $f(1,8) = 9$

(11) $-\frac{3}{4}$

(12) א. כן, סכום שתי הפונקציות. ב. כן, הסדר של f חלקי g .

ג. כן, מסדר $2r_1 - \frac{r_2}{a}$. ד. רק אם $r_1 = r_2$.