

פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו, ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

(7) תהי $u(x, y) = (x+p)(y+q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקציית תועלת של פרט. הנקודות (1,6), (3,2), (0,14) מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את p ו- q .

הצב אותם בפונקציית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (8) \text{ שרטט לפונקציה}$$

את קו הגובה: $f(x, y) = 1$.

$$(9) \text{ נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$$

הנח כי $x, y \geq 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$, עבור הפונקציה הנתונה.

$$(10) \text{ שרטט את מפת העקומות שוות הערך של } f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\} \text{ , } f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$$

$$(11) \text{ שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה } f(x, y) = \min\{3x, y\}$$

$$(12) \text{ שרטט לפונקציה } f(x, y) = (x - y)^2$$

את קווי הגובה: $f(x, y) = 4$, $f(x, y) = 0$.

$$(13) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטט את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?

ציירו את קו הגובה במקרה זה.

(14) פונקציית התועלת של פרט, הצורך את המוצרים X ו- Y , היא:

$$U(x, y) = \begin{cases} y - x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x - y & 4 < x \leq 6 \\ y - \ln x & 6 < x \end{cases}$$

א. שרטט את קו הגובה $U(x, y) = 3$.

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות (4,8).

האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות (7,9)?

$$(15) \text{ שרטט את מפת העקומות שוות הערך של } f(x, y) = 100 - 5x - 2y \text{ , } f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f ?

שרטט עקומות שוות ערך לפונקציות בשאלות 16-20 :

$$f(x, y) = 3x - y + 3 \quad (16)$$

$$f(x, y) = x^3 - y \quad (17)$$

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (18)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (19)$$

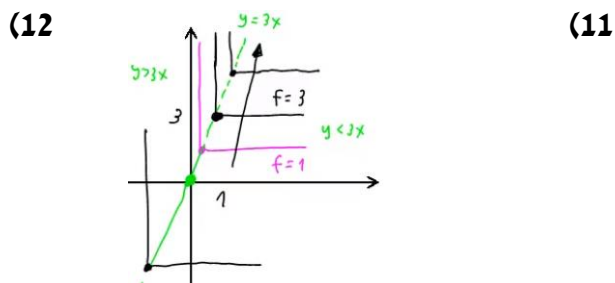
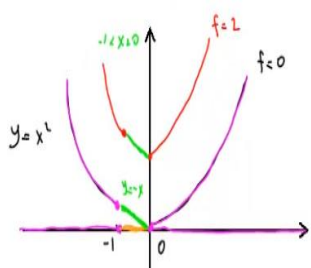
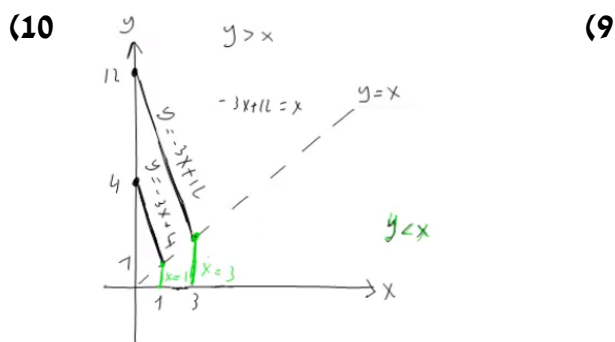
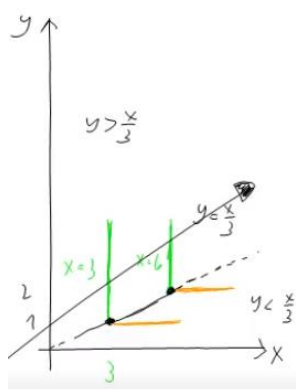
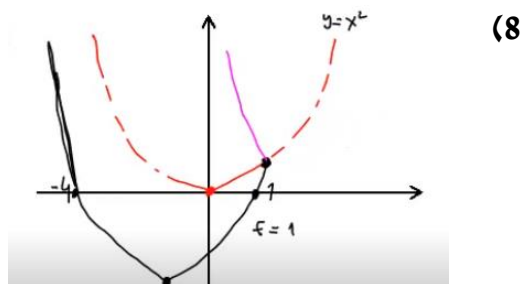
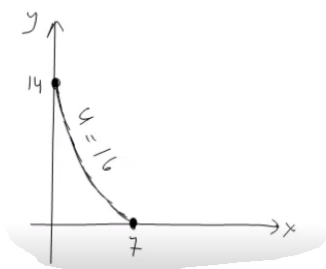
$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (20)$$

(21) שרטט לפונקציה $f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\}$

את קווי הגובה : $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 2$.

תשובות סופיות

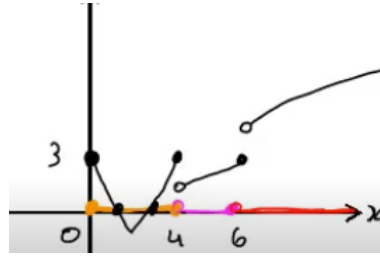
- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) עיגול היחידה, $x^2 + y^2 \leq 1$.
- (5) $y < x^2$.
- (6) חצי המישור העליון, $y \geq 0$.
- (7) א. $p=1, q=2$. ב. $y = \frac{16}{x+1} - 2$.



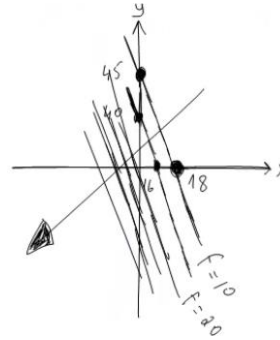
(13) ראו בווידאו.

ג. לא, כי התועלת שווה.

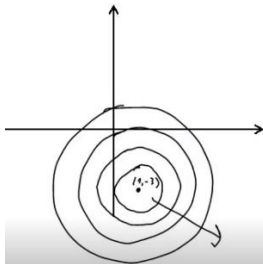
(14) א.



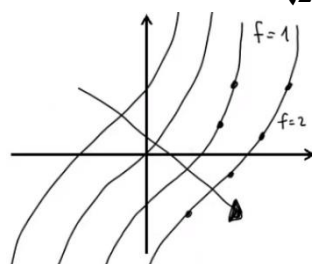
(15)



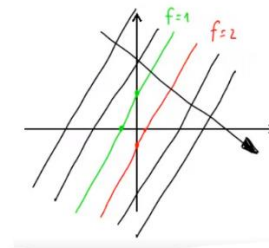
(18)



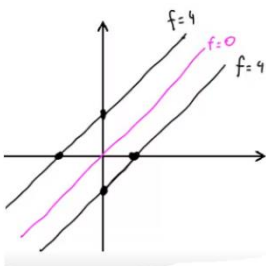
(17)



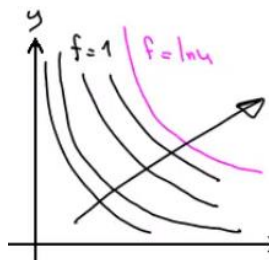
(16)



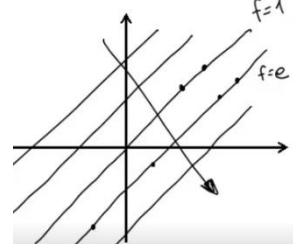
(21)



(20)



(19)



נגזרות חלקיות

שאלות

חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות בשאלות 1-5 :

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני בשאלות 6-15 :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (7) \qquad f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (6)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (9) \qquad f(x, y) = xy(x-y) \quad (8)$$

$$f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + y^2) \quad (11) \qquad f(x, y) = e^{xy} (x+y) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (13) \qquad f(x, y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \quad (12)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (15) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (14)$$

(16) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$

(17) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(18) חשב $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(19) נתון: $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

הוכח כי: $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

(20) נתון: $f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right)$

חשב: $\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$

(21) נתון: $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + X}$

חשב: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

(22) $f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y$

(23) $f(x, y) = x^4 \ln y$

(24) $f(x, y, z) = xyz$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3, f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y}, f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2, f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2}, f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_{xx} = 6x - 0 \quad f_{yy} = 6y - 0 \quad f_{xy} = 0 - 6 \quad (6)$$

$$f_x = 3x^2 + 3 - 3y, f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y, f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y - 6, f_{xy} = -3 \quad (7)$$

$$f_x = 2xy - y^2, f_y = x^2 - 2xy, f_{xx} = 2y, f_{yy} = -2x, f_{xy} = 2x - 2y \quad (8)$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 - 24x + 57y + 72] \quad f_y = 2[4x^2 - 3x \cdot 2y - 54y + 57x + 27] \quad (9)$$

$$f_{xx} = 2[8y - 24] \quad f_{yy} = 2[-6x - 54] \quad f_{xy} = 2[8x - 6y + 57]$$

(10) ראו סרטון באתר. (11) ראו סרטון באתר. (12) ראו סרטון באתר.

(13) ראו סרטון באתר. (14) ראו סרטון באתר. (15) ראו סרטון באתר.

$$\frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad (18) \qquad 1 \quad (17) \qquad -2 \quad (16)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (21) \qquad 4 \quad (20) \qquad (19) \text{ הוכחה.}$$

$$f_y = -2x^2y + 10 \qquad f_{xx} = 8 - 2y^2 \qquad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (22)$$

$$f_{yx} = -4xy \qquad f_{xy} = -4xy \qquad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \qquad f_{xx} = 12x^2 \ln y \qquad f_x = 4x^3 \ln y \quad (23)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \qquad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \qquad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_{yx} = z \qquad f_y = xz \qquad f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (24)$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x \qquad f_{zx} = y \qquad f_z = xy \qquad f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0$$