

פונקציות בשני משתנים לכלכלנים – עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

שאלות:

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה:

א. $f(x, y) = \frac{y}{x}$

ב. $f(x, y) = \ln x + \ln y$

ג. $f(x, y) = x^2 + y^2$

ד. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

ה. $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$

ו. $f(x, y) = x\sqrt{y}$

(2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$ באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f ?

ב. נגדיר $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$. הנח כי $x, y \geq 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

ג. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$.

(3) תהי $y \geq 0, x \geq 0, u(x, y) = (x + p)(y + q)$ פונקציית תועלת של פרט. הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקציית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

4) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציות הבאות:

א. $f(x, y) = 3x - y + 3$ ב. $f(x, y) = x^3 - y$

ג. $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2$ ד. $f(x, y) = e^{x-y}$

ה. $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y$ ו. $f(x, y) = \min\{3x, y\}$

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט לפונקציה $f(x, y) = (x-y)^2$

את קווי הגובה: $f(x, y) = 4$, $f(x, y) = 0$.

ב. שרטט לפונקציה $f(x, y) = \min\{y-x^2, x+y\}$

את קווי הגובה: $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 2$.

ג. שרטט לפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases}$

את קו הגובה: $f(x, y) = 1$.

6) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$

א. שרטט את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?

ציירו את קו הגובה במקרה זה.

7) פונקציית התועלת של פרט, הצורך את המוצרים X ו-Y, היא:

$$U(x, y) = \begin{cases} y - x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x - y & 4 < x \leq 6 \\ y - \ln x & 6 < x \end{cases}$$

א. שרטט את קו הגובה $U(x, y) = 3$.

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות (4,8).

האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות (7,9)?

נגזרות חלקיות

(8) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

א. $f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y$

ב. $f(x, y) = x^5 \ln y$

ג. $f(x, y) = \frac{x^2y^4(\sqrt{y} + 5\ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$ (only f_x)

ד. $f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y)$

ה. $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2}$

(9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני, עבור:

א. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ ב. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y)$

ג. $f(x, y) = xy(x-y)$ ד. $f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

ה. $f(x, y) = e^{xy}(x+y)$ ו. $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2)$

ז. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ח. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

ט. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ י. $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$

(10) חשב $f'_{xy}(1,1)$ עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

(11) חשב $f'_{xy}(1,1)$ עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(12) חשב $f'_{xy}(1,1)$ עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(13) נתון: $z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

הוכח כי: $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

14 נתון: $f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right)$

חשב: $\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$

15 נתון: $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + X}$

חשב: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (1, e), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (1, e)$

16 חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

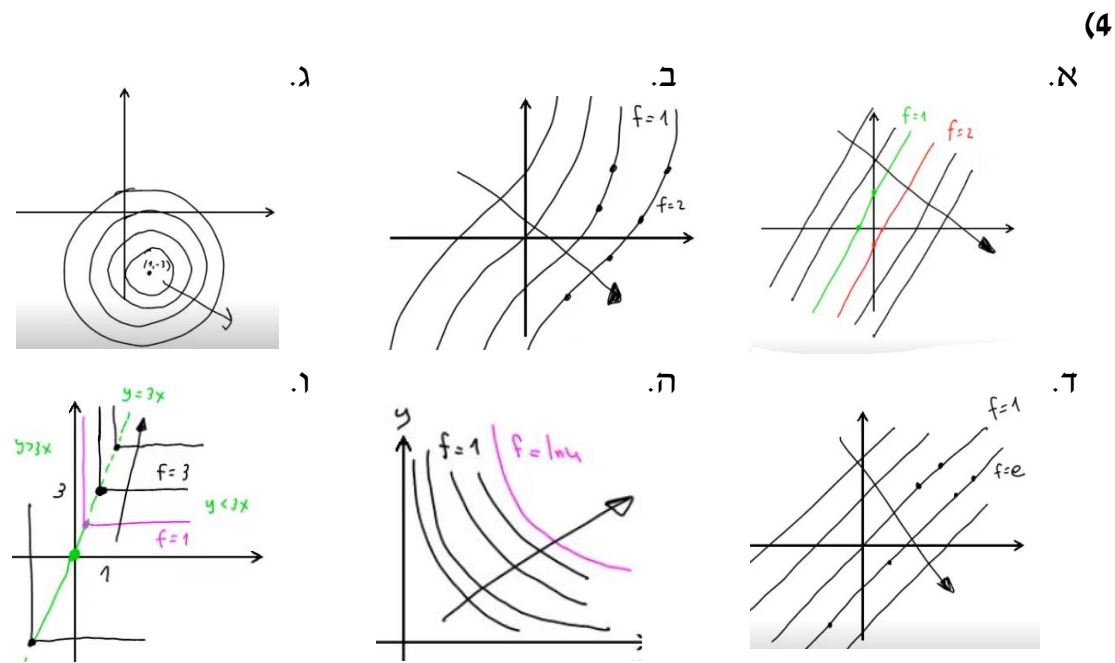
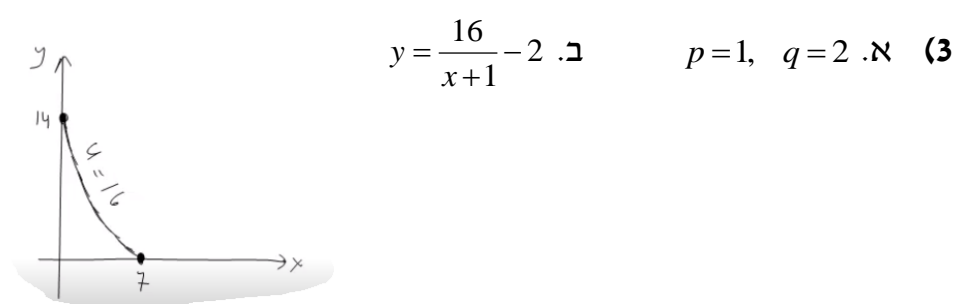
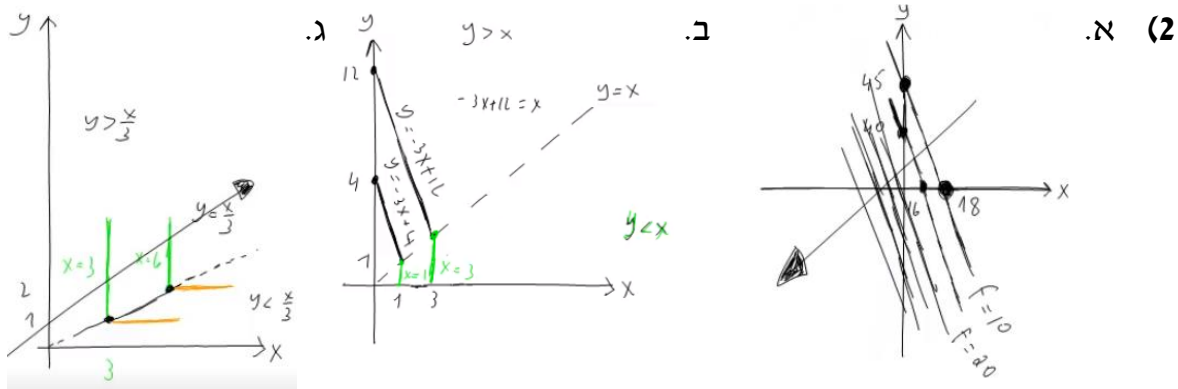
א. $f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y$

ב. $f(x, y) = x^4 \ln y$

ג. $f(x, y, z) = xyz$

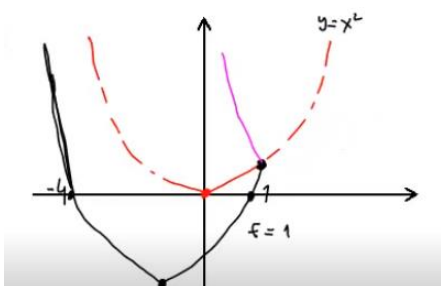
תשובות סופיות:

- 1) א. $x \neq 0$, המישור ללא ציר y . ב. $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
 ג. כל המישור. ד. $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. ה. $y < x^2$.
 ו. $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

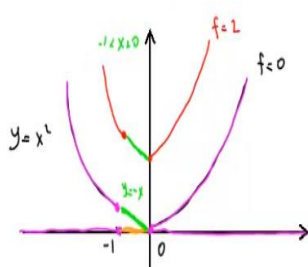


(5

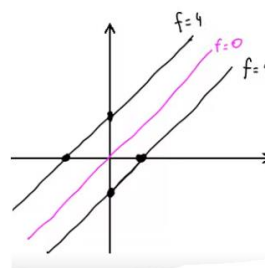
.א



.ג



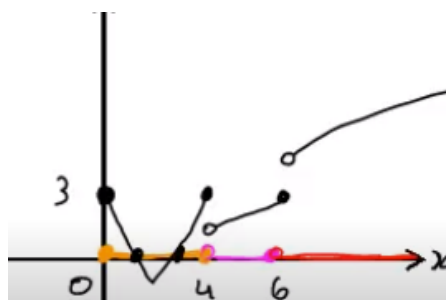
.ב



(6 ראו בווידאו.

.א (7

.ג. לא, כי התועלת שווה.



$$f_y = -6x^2y + 3$$

.א (8 $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$

.ג $f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y}$ $f_y = \frac{x^5}{y}$

.ב $f_x = 5x^4 \ln y$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$$

.ד $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2}$$

.ה $f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2}$

(9 .א $f_{xx} = 6x - 0$ $f_{yy} = 6y - 0$ $f_{xy} = 0 - 6$

.ב $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$ $f_{xx} = 6x$ $f_{yy} = 6y - 6$ $f_{xy} = -3$

.ג $f_x = 2xy - y^2$ $f_y = x^2 - 2xy$ $f_{xx} = 2y$ $f_{yy} = -2x$ $f_{xy} = 2x - 2y$

.ד $f_x = 2[8xy - 3y^2 - 24x + 57y + 72]$ $f_y = 2[4x^2 - 3x \cdot 2y - 54y + 57x + 27]$

$f_{xx} = 2[8y - 24]$ $f_{yy} = 2[-6x - 54]$ $f_{xy} = 2[8x - 6y + 57]$

.ה-י. ראו בווידאו.

(10 -2

(11 1

(12 $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

(13) הוכחה.

4 (14)

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (15)$$

16

(16) א. $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$

$$f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2$$

$$f_{yy} = -2x^2$$

$$f_{yx} = -4xy$$

$$f_{xy} = -4xy$$

$$f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y$$

$$f_x = 4x^3 \ln y \quad \text{ב.}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_{yx} = z$$

$$f_y = xz$$

$$f_{xz} = y$$

$$f_{xy} = z$$

$$f_{xx} = 0$$

$$f_x = yz \quad \text{ג.}$$

$$f_{zz} = 0$$

$$f_{zy} = x$$

$$f_{zx} = y$$

$$f_z = xy$$

$$f_{yz} = x$$

$$f_{yy} = 0$$