

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & \text{(3)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & \text{(2)} & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & \text{(1)} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & \text{(6)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & \text{(5)} & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & \text{(4)} \end{array}$$

טור טלסקופי

בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & \text{(8)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \text{(7)} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & \text{(10)} & \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & \text{(9)} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & \text{(11)} & & \end{array}$$

טור הרמוני מוכלל

(12) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$

תכונות אלגבריות של טורים

(13) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

(14) חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------------------------|------------------------------|------------------------|
| (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$ | (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$ | (3) מתבדר. |
| (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$ | (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$ | (6) מתכנס ל-8. |
| (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$ | (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$ | (9) מתבדר. |
| (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$ | (11) $\frac{1}{6}$ | |
| (12) א. מתכנס.
ד. מתבדר. | ב. מתבדר.
ה. מתכנס. | ג. מתבדר.
ו. מתכנס. |
| (13) א. מתכנס. | ב. מתבדר. | ג. מתבדר. |
| (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$ | | |

מבחני התכנסות לטורים

מבחן ההתבדרות

1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

מבחן האינטגרל

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1)$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1)$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצא את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{\sqrt{n^{10} + n + 1}}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n}$ 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$ 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1}$

מבחן המנה ומבחן השורש

בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (19) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (18) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (22) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (21) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (25) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1+n^2)}{n!} \quad (24) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (23)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------|-------------|-----------------|
| | | (1) א-ו: מתבדר. |
| | (3) מתבדר. | (2) מתבדר. |
| (4) מתכנס. | (6) מתבדר. | (5) מתכנס. |
| | ב. 0 | (7) א. מתכנס. |
| (10) מתכנס. | (9) מתבדר. | (8) מתכנס. |
| (13) מתכנס. | (12) מתכנס. | (11) מתבדר. |
| (16) מתכנס. | (15) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (19) מתכנס. | (18) מתכנס. | (17) מתבדר. |
| (22) מתכנס. | (21) מתכנס. | (20) מתכנס. |
| (25) מתכנס. | (24) מתכנס. | (23) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

מבחן לייבניץ

בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (4) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (9) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (8) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (7) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (12) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (11) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (10) \end{array}$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתבדר. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בתנאי. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בהחלט. | (9) מתכנס בהחלט. |
| (10) מתכנס בתנאי. | (11) מתכנס בתנאי. | (12) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

- (1) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.
 א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.
 ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.
- (2) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא, הבא דוגמה נגדית.
 א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
 ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.
 ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.
- (3) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.
- (4) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.
- (5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$. הוכח כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.
- (6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
 הוכח כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.
 ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
 הוכח ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.
- (7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף. הוכח כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס. הוכח כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכח או הפרך:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכח כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי או $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכח או הפרך:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכח או הפרך:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$. הוכח כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

(16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.
א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

הוכח כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכח כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$. הוכח כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

(17) הוכח:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$ אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

(18) הוכח: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$ אז הטור מתכנס.

(19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$. הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס ($k > 0$). הוכח כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

(20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי: $a_1 = \frac{21}{20}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} (n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

(21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$

הוכח כי הטור מתכנס.

(22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
נתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \leq a_n$.
הוכח כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

(23) נתון: $\forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1)$ מתכנס?

(24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n > 0, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל n טבעי.
הוכח כי $\sum a_n$ מתבדר.

(25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

(26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכח או הפרך:

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

(27) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדוק האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמד את הנושא "טורי מקלורן עם שארית לגרנג'".

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר: Gool.co.il