

אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

שאלות:

אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים 1-5 חשב את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \iint_S x^2 yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y, \text{ מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \text{ } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$$

$$(5) \iint_S xyz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k} \text{ המקיים } 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi/2$$

$$(6) \text{ חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R$$

$$(7) \text{ היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1, \text{ וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0 \text{ קבועה.} \\ \text{חשב את מסת היריעה.}$$

אינטגרל משטחי מסוג II

בכל אחד מהתרגילים 8-12 חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$.

ובניסוח אחר :

בכל אחד מהתרגילים 8-12 חשב את השטף של שדה הזרימה \mathbf{F} דרך S .
(\mathbf{n} הוא נורמל חיצוני של S)

(8) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י המישורים :
 $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(9) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(10) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י המישורים : $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(11) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$.

(12) $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$; S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

תשובות סופיות:

(1) $171\sqrt{14}$ (2) $\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6}$ (3) $\pi\sqrt{2}/4$

(4) 16π (5) $93/\sqrt{10}$ (6) $4\pi R^2$

(7) $\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5} - 1)$ (8) $\frac{11}{6}$ (9) $\frac{8\pi}{3}$

(10) 27 (11) 12π (12) -16π