

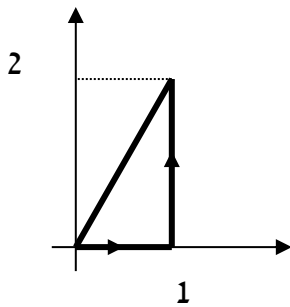
משפט גרין

שאלות:

בכל אחד מהתרגילים 1-3 אשר את משפט גרין. כלומר, חשב את האינטגרל

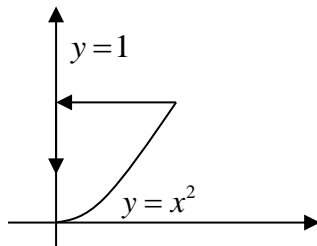
$$\oint_C f dx + g dy \quad \text{ואת האינטגרל } \iint_R (g_x - f_y) dA,$$

והראה שהם שווים זה לזה.



(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בצירור:

(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בצירור:



(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$, הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי.

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (x e^y + y \cos y^2) dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$, כאשר

C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2,0)$ לנקודה $(-2,0)$.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C נתון ע"י: $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$

כאשר C מסילה פשוטה נגד כיוון השעון.
מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?
עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

9) הוכח שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C ,

החוסמת שטח במישור, והמקיימת $\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$.

10) חשב: $\oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות:

- (1) הערך המשותף הוא 0.5
- (2) הערך המשותף הוא 0.8
- (3) הערך המשותף הוא 8
- (4) 1.5π
- (5) $0.5\sin 64$
- (6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב. πab
- (8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2 + y^2 = 1$
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$