שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות:

1) קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר; אם כן, מצא פונקציה ϕ, כך ש- $\nabla\phi=\mathbf{F}$:

א. $\mathbf{F}(x,y)=\left(6x+5y,5x+4y\right)$

ב. $\mathbf{F}(x,y)=xe^{y}\mathbf{i}+ye^{x}\mathbf{j}$

ג. $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x\cos y-y\cos x,-x^{2}\sin y-\sin x\right)$

ד. $\mathbf{F}(x,y,z)=z^{2}\mathbf{i}+e^{-y}\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

ה. $\mathbf{F}(x,y,z)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+(xy+3z^{2})\mathbf{k}$

ו. $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(z,2yz,y^{2}\right)$

2) נתון האינטגרל $\int\limits_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^{2}-y^{3})dx+(6x^{2}y-3xy^{2})dy$.

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1,2)$ ו- $(3,4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

3) חשב את האינטגרל $\int\limits_{(1,4)}^{(3,1)}2xy^{3}dx+(1+3x^{2}y^{2})dy$.

4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^{4}+3\right)dx+(x^{2}-4xy^{3})dy$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y)=e^{y}\mathbf{i}+xe^{y}\mathbf{j}$. מצא את ה**עבודה** שמבצע השדה על חלקיק הנע על $y=\sqrt{1-x^{2}}$ מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$.

6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\left(2xz^{3}+6y\right)dx+\left(6x-2yz\right)dy+\left(3x^{2}z^{2}-y^{2}\right)dz$.

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F}=\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$L_1:\ x^2+y^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

$L_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ בכיוון השלילי (עם כוון השעון).

$L_3:\ (x-10)^2+(y-7)^2=1$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).

חשב:

א. $\oint_{L_1}\mathbf{F}dr$ ב. $\oint_{L_2}\mathbf{F}dr$ ג. $\oint_{L_3}\mathbf{F}dr$

8) ענה על הסעיפים הבאים:

א. שרטט את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ברביע הראשון.

ב. בתחום $D=\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$. נסמן $g=\frac{x}{x^2+y^2}$, $f=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

i. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

ii. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכח שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני $D=\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0\}$,
ומצא את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D=\{(x,y)\in R^2\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$,
חשב $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0,0)$.

9) נתון השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\right\}$.

א. שרטט את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

ב. נסמן $g=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f=\frac{x}{x^2+y^2}$.

i. הוכח כי $f_y=g_x$ בתחום הנתון.

ii. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכח שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\right)$$
$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\hat{x}+g(x,y,z)\hat{y}+h(x,y,z)\hat{z}$$
$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$$

תשובות סופיות:

1)

א. $\phi(x,y)=3x^2+5xy+2y^2$ ב. השדה אינו משמר.

ג. $\phi(x,y)=x^2\cos y-y\sin x$ ד. $\phi(x,y,z)=xz^2-e^{-y}$

ה. $\phi(x,y,z)=xyz+z^3$ ו. השדה אינו משמר.

2) א. הוכחה. ב. 236

3) -58

4) 5

5) -2

6) 15 = עבודה שנעשית בהזזת גוף מ-$(1,-1,1)$ ל-$(2,1,-1)$, לאורך C.

7) א. 2π ב. -2π ג. 0

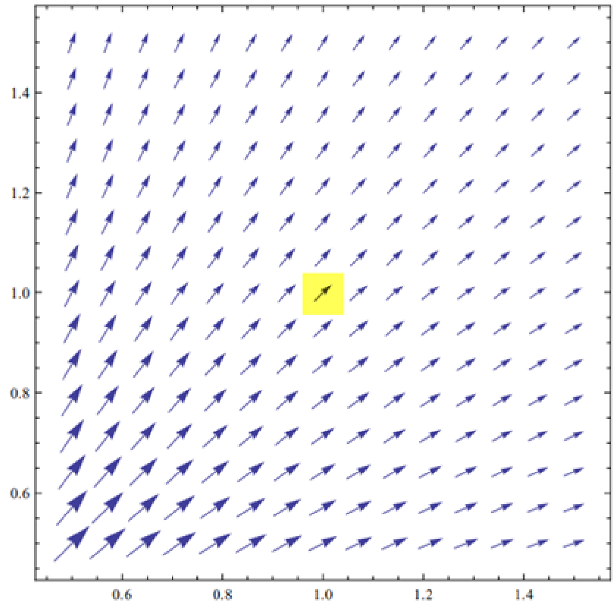
8) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. הוכחה. ד. הוכחה; $\phi=\arctan\frac{y}{x}+k$ ה. 2π

9) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. הוכחה.

שאלה 9 סעיף א:



שאלה 10 סעיף א: