

## אינטגרלים קוויים ושימושיהם

\* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים".

### שאלות:

#### אינטגרל קווי מסוג I

$$(1) \quad \int_C f(x, y) ds \quad \text{חשב}$$

א.  $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  ;  $f(x, y) = 1 - x^2$

ב.  $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi$  ;  $f(x, y) = x$

ג.  $C$  קטע של ישר המחבר את  $O(0,0)$  עם  $A(1,2)$  ;  $f(x, y) = x + y$

ד.  $C$  היקפו של  $\Delta OAB$  של  $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$  ;  $f(x, y) = x + y^2$

$$(2) \quad \int_C f(x, y, z) ds \quad \text{חשב}$$

א.  $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$  ;  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ב.  $C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 3$  ;  $f(x, y, z) = x^3 + 3z$

$$(3) \quad \text{חשב את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי  $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ )

חשב את מסת הסליל אם פונקציית הצפיפות היא  $\delta(x, y, z) = kz$  ( $k > 0$ ).

**אינטגרל קווי מסוג II**

(5) חשב:

א.  $C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi/2 ; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

ב.  $C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1 ; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy$

(6) חשב  $\int_C y dx + x^2 dy$  כאשר  $C$  המסלול מנקודה  $(0,0)$  לנקודה  $(2,4)$

ו-  $C$  נתון ע"י המשוואה:

א.  $y = 2x$

ב.  $y = x^2$

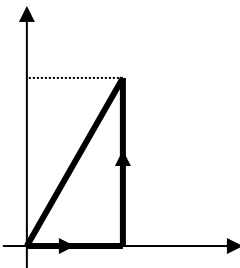
(7) חשב  $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y) dx + (y - x) dy$  אם העקום נתון על ידי:

א. הפרבולה  $y^2 = x$ .

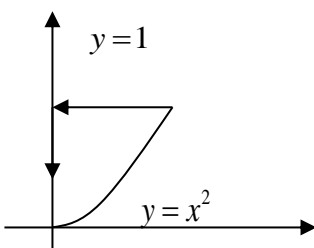
ב. קו ישר.

ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$  ל- $(1,2)$  ומשם ל- $(4,2)$ .

ד. העקום:  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ .



(8) חשב  $\int_C x^2 y dx + x dy$ , כאשר המסלול  $C$  מתואר בציור:



(9) חשב  $\int_C (x - y^2) dx + dy$  כאשר המסלול  $C$  מתואר בציור:

10) אם  $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$ ,

חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  מ- $(0,0,0)$  ל- $(1,1,1)$ , לאורך המסלולים:

א.  $x=t, y=t^2, z=t^3$

ב. הקוים הישרים מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,0,1)$ , משם ל- $(0,1,1)$  ומשם ל- $(1,1,1)$ .

ג. הישר המחבר את  $(0,0,0)$  ו- $(1,1,1)$ .

11) חשב את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר:

א.  $F(x, y) = (x^2y^3, -y\sqrt{x})$ ,  $r(t) = (t^2, -t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$

ב.  $F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz)$ ,  $r(t) = (t^3, -t^2, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$

12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח  $\mathbf{F}(x, y) = x^3y\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$

על חלקיק שנע על הפרבולה  $y = x^2$  מ- $(-2, 4)$  עד  $(1, 1)$ .

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$  עד  $(-2, 4)$ ?

13) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח  $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

על חלקיק הנע לאורך העיקול  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

### הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $\pi$     ב.  $\frac{16}{3}$     ג.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$     ד.  $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(2) א.  $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$     ב.  $\frac{567}{2}$

(3) 6

(4)  $\sqrt{5}k\pi^2$

(5) א.  $\frac{1}{3}$     ב.  $\frac{4}{3}$

(6) א.  $\frac{28}{3}$     ב.  $\frac{32}{3}$

(7) א.  $\frac{34}{3}$     ב. 11    ג. 14    ד.  $\frac{32}{3}$

(8)  $\frac{1}{2}$

(9)  $\frac{4}{5}$

(10) א. 2    ב. -3    ג.  $\frac{6}{5}$

(11) א.  $-\frac{59}{105}$     ב.  $\frac{6}{5}-\sin 1-\cos 1$

(12) א. 3    ב. -3

(13) 1

## הצגות פרמטריות של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
ישר פרמטרי מהנק' (1, 2) לנק' (3, 4) $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' $(x_0, y_0)$ לנק' $(x_1, y_1)$
ישר פרמטרי מ- (1, 2, 3) ל- (4, 7, 9) $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' $(x_0, y_0, z_0)$ לנק' $(x_1, y_1, z_1)$