# אינטגרלים כפולים

## שאלות:

חשב את האינטגרלים:

**1)** $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

**2)** $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

**3)** $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2\varphi\, dr$

**4)** באינטגרל $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

א. $D$ – משולש בעל הקודקודים: $B(1,1), A(1,0), O(0,0)$.

ב. $D$ – משולש בעל הקודקודים: $B(-2,1), A(2,1), O(0,0)$.

ג. $D$ – טרפז בעל הקודקודים: $C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0)$.

ד. $D$ – עיגול $x^2+y^2 \le 1$.

ה. $D$ – עיגול $x^2+y^2 \le y$.

ו. $D=\{(x,y) \mid y\le 1, y\ge x^2\}$

ז. $D=\{(x,y) \mid 1\le x^2+y^2 \le 4\}$

5) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\iint_D xy^2 dxdy$ כאשר $D$ חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

ב. $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$ כאשר $D$ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של המעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

ג. $\iint_D |x\,y|dxdy$ כאשר $D$ עיגול בעל הרדיוס $a$ שמרכזו בראשית.

ד. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ כאשר $D$ מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a, y=3a$ $(a>0)$.

ה. $\iint_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$ כאשר $D$ התחום הכלוא בין $y=\pi\sqrt{x}, y=\pi, y=0, x=-1$.

# החלפת סדר אינטגרציה

החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים:

6) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

7) $\int_{-6}^{2} \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

8) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

9) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

10) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

11) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשב את האינטגרלים הבאים (רמז: שנה את סדר האינטגרציה):

12) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

13) $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

14) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$ $(x,y\ge 0)$

15) $\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2)dydx$

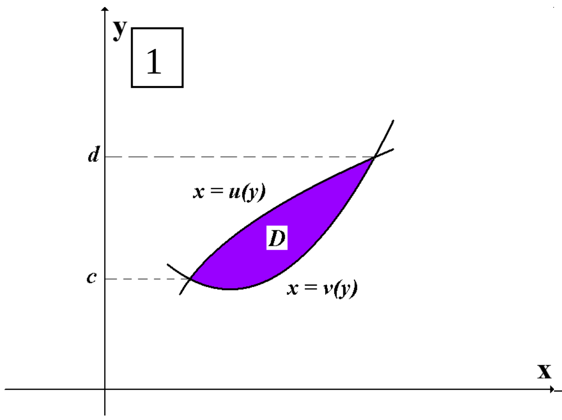
**הערות סימון:**

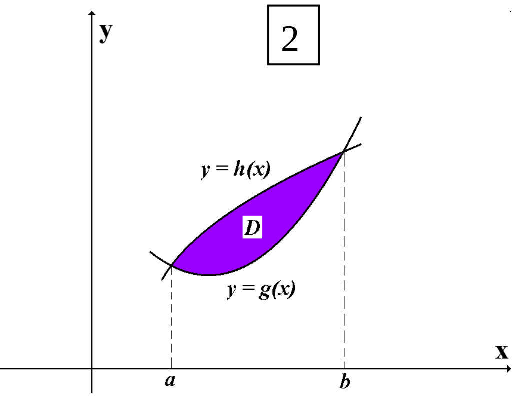
$\boxed{1}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA=\iint\limits_D f(x,y)\,dydx=\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d\int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$




לתשומת לבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך $\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישום $dxdy$ והרישום $dydx$ הוא זהה.

## תשובות סופיות:

1) $1$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) א. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

ב. $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

ג. $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

ד. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

ה. $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

ו. $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

ז. $\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

5) א. $\frac{32}{21}$ ב. $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ג. $\frac{a^4}{2}$ ד. $14a^4$ ה. $0$

6) $\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^0 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

8) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

10) $\int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

11) $\int_{0}^{1} dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

12) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

13) $\frac{241}{60}$

14) $\frac{1}{4}(e-2)$

15) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$