קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות:

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצא על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצא נקי׳ על המישור $-2x-2y+z=0$ שהיא הקרובה ביותר לנקי׳ $(1,2,3)$.

ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד למישור $3x+4y+12z=288$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמישור $ax+by+cz+d=0$ הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות.
ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות:

1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ.
2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.
3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$
5) מרחק קצר ביותר $256/13$. מרחק ארוך ביותר $320/13$.
6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
7) מרחק מינימלי $75/17$. מרחק מקסימלי 10.