

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג)

### שאלות:

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$(5) \quad \max \{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \max \{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x + 3y = 12$ , מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ , מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר  $3x - 6y + 4 = 0$ ,

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

רמו: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0)$  מהישר  $ax + by + c = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

(10) מוישליה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות.

$$\text{התועלת מצריכת הסל, } (x, y), \text{ נתונה על ידי } u(x, y) = \ln x + \ln y.$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסח ופתור את בעיית מוישליה.

- 11** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ . מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ . לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ . דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2, P_L = 1$ . היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ , המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

### תשובות סופיות:

- 1**  $\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$
- 2**  $\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0)$
- 3**  $\max(2, 3) \quad \min(-2, -3)$
- 4**  $\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, 1)$
- 5**  $\max(6, 2)$
- 6**  $\max(9, 36)$
- 7**  $(6, 2)$
- 8**  $\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7})$
- 9**  $7/\sqrt{45}$
- 10**  $\min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$
- 11**  $\max(6, 2)$
- 12**  $\max(2, 3)$
- 13**  $\min\{2K + L\}; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$