

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$(5) \quad \max\{xy\} \quad s.t. \quad x + 3y = 12$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \max\{2x + y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$$

א. פתור את הבעיה.

ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצא את הנקודות}$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0,$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$, הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

10 מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
 מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
 נסח ופתור את בעיית מוישליה.

11 דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסח ופתור את בעיית דני.

12 עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסח ופתור את הבעיה.

13 ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \mathbf{(1)}$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad \mathbf{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \mathbf{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \mathbf{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \mathbf{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \mathbf{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \mathbf{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \mathbf{(8)}$$

$$7/\sqrt{45} \quad \mathbf{(9)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \mathbf{(10)}$$

$$\max(6, 2) \quad \mathbf{(11)}$$

$$\max(2, 3) \quad \mathbf{(12)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \mathbf{(13)}$$