קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות:

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $(z=f(x,y))$ $z^3+z+xy-2x-y+2=0$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $(x,y,z>0)$ $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$

6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$ לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

7) נתונות n נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y=h(x)$,

כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי:

א. $h(x)=ax+b$, הדגם עבור הנק' $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

ב. $h(x)=ax^2+bx$, הדגם עבור הנק' $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

ג. $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגם עבור הנק' $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

ד. $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגם עבור הנק' $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

ה. $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגם עבור הנק' $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

8) נתונות n נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$.

מצא ישר $y=ax+b$ כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b.

הערה: בשאלות 7 ו-8 ניתן להניח ש- a ו- b, המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$,

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות:

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) א. $y=0.88x+0.3$ ב. $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$ ג. $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

ד. $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

8) $$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\quad,\quad a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$