

## פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

שאלות:

(1) מצא את  $y'$  כאשר  $x^2 + y^5 = xy + 1$ .  
חשב את  $y'(0)$ .

(2) מצא את  $y'(1)$  כאשר  $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$ .

(3) מצא את  $y'(e)$ ,  $y''(e)$  כאשר  $2\ln x + \ln y = 1$ .

(4) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$   
חשב את:  $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ .

(5) נתון  $(y = y(x, z) \geq 0)$   $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$   
חשב את  $y_x(0,0)$ ,  $y_z(0,0)$ .

(6) נתון  $(z = z(x, y) \geq 0)$   $z^3 - 2xz + y = 0$   
מצא  $z_{xx}(1,1)$ .

(7) נתונה משוואה  $z^3 - 3xyz = 4$  ונקודה  $(2,1,-2)$ . מצא:

א.  $z_{xx}(2,1)$

ב.  $z_{xy}(2,1)$

ג.  $z_{yy}(2,1)$

(8) אם  $u^2 - v = 3x + y$  ו-  $u - 2v^2 = x - 2y$ , מצא את  $u_x, v_x, u_y, v_y$ .

(9) אם  $w = u^3 + v^3$ ,  $y = u^2 + v^2$ ,  $x = u + v$ , מצא את  $w_x, w_y$ .

**10** נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$  ( $z < 0$ ).  
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה  $P$  בה  $x = -2, y = 1$ .

**11** מצא משוואה של מישור משיק למשטח  $xyz = 8$  בנקודה  $(-2, 2, -2)$ ,  
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

**12** מצא מישור המשיק למשטח  $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$ ,  
המקביל למישור  $x + 8y + 18z = 0$ .

**13** למשטח  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.  
מישור זה חותך את הצירים  $x, y, z$  בנקודות  $A, B, C$  בהתאמה.  
נסמן:  $O = (0, 0, 0)$ .  
הוכח:  $OA + OB + OC = a$ .  
(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

**14** נתונה הפונקציה  $r: R^2 \rightarrow R^3$ , על ידי  $z = u^2 + v^2$ ,  $y = u \sin v$ ,  $x = u \cos v$ .  
מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?  
מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה  $(u, v) = (1, 0)$ .

**15** מצא ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח  $z = \cos u$ ,  $y = \sin u \sin v$ ,  $x = \sin u \cos v$ ,  
עבור  $u \in [0, \pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ .  
באיזה משטח מדובר?

**תשובות סופיות:**

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, \quad u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, \quad v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, \quad v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, \quad w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, \quad (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, \quad x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

הוכחה. (13)

$$-2x + z = -1 \quad \text{כל נקודה, למעט } (0,0,0). \quad (14)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (15)$$

$$\text{שנוסחתו: } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$