

## מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצא את תחום ההגדרה  $D$  של הפונקציה.

ב. שרטט סקיצה של הקבוצה  $D$ .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left( \frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$(11) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (\text{ענו על סעיף א בלבד})$$

$$(12) \quad f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (\text{רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה})$$

$$(13) \quad f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (\text{רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה})$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\}$$

$$(2) \quad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\}$$

$$(3) \quad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\}$$

$$(4) \quad D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\}$$

$$(5) \quad D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\}$$

$$(6) \quad D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\}$$

$$(7) \quad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\}$$

$$(8) \quad D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\}$$

$$(9) \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\}$$

$$(10) \quad D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x+1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x+1] \right\}$$

$$(11) \quad D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\}$$

$$(12) \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(13) \quad D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\}$$

## קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטט מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2\ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13 שרטט את קו הגובה  $k$ :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטט את קו הגובה  $f(x, y) = 0$ .
- ב. לאילו ערכי  $C$  קו הגובה  $f(x, y) = C$  הוא קו רציף?  
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

**הערות:**

- \* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- \*\* קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

### תשובות סופיות

- (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר  $y$ .
- (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה.
- (5)  $y < x^2$
- (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: [Gool.co.il](http://Gool.co.il)

## משטחים מפורסמים

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהה ושרטט את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהה כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

(6) מצא את החיתוך בין המשטח  $x^2 + y^2 + z^2 = 169$  לבין המשטח  $z = 12$ .  
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. זהה את המשטח } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$$

$$\text{ב. מצא את נקודות החיתוך של המשטח מסעיף א' עם הישר } \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$$

(8) מצא את החיתוך בין שני המשטחים הבאים :  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  ,  $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$   
הסבר את התוצאה מבחינה גרפית.

(9) ענה על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. זהה את המשטח } 36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36 \text{ ושרטט אותו.}$$

ב. רשום הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

## תשובות סופיות

- (1) אליפסואיד.
- (2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- (3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- (4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,1)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0,0,3)$  ונפתח כלפי מטה.
- (5) א. אליפסואיד.  
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(1,2,0)$  ונפתח כלפי מעלה.  
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה  $(0,0,10)$ .
- (6) החיתוך הוא מעגל  $x^2 + y^2 = 25$  שמרכזו בנקודה  $(0,0,12)$ .
- (7) א. ספירה שמרכזה  $(4,1,-10)$  ורדיוסה  $\sqrt{14}$ .  
נקודות החיתוך הן  $A(7,0,-12)$ ,  $B(\frac{59}{5}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9})$ .
- (8) החיתוך הוא המעגל  $x^2 + y^2 = 15$  שמרכזו בנקודה  $(0,0,7)$ .
- (9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- $y$ .  
ב.  $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$   $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

## משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$ . מהו משטח הרמה 2 של הפונקציה? שרטט אותו.

(2) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$ . מצא את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטט אותו.

(3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא את משטחי הרמה:

א.  $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$

ב.  $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

(4) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$ . מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$ . מצא את משטחי הרמה של הפונקציה.

### תשובות סופיות

(1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה  $(0, 0, -2)$  ורדיוסה 2.

(2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, 4)$  ונפתח כלפי מטה.

(3) א. מישורים.

ב. משטח רמה  $k$  הוא פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה  $(0, 0, k)$  ונפתח כלפי מעלה.

(4) עבור  $k < 0$  לא קיים משטח רמה  $k$ . עבור  $k = 0$  נקודה  $(0, 0, 0)$ . עבור  $k = 1$  מישורים.

עבור  $k > 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $y$ .

עבור  $0 < k < 1$  חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- $z$ .

(5) עבור  $k < 0$  היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור  $k = 0$  חרוט אליפטי.

עבור  $k < 0$  היפרבולואיד דו-יריעתי.

## גבול של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

1) חשב את הגבולות הבאים :

<p>ב. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}</math></p> <p>ד. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)</math></p> <p>ו. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}</math></p> <p>ח. <math>\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2}</math></p>	<p>א. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}</math></p> <p>ג. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}</math></p> <p>ה. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}</math></p> <p>ז. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}</math></p> <p>ט. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}</math></p>
---	--

2) חשב את הגבולות הבאים :

<p>ב. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}}  y ^x</math></p> <p>ד. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y}</math></p> <p>ו. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}</math></p> <p>ח. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}</math></p>	<p>א. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^2}</math></p> <p>ג. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}</math></p> <p>ה. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}</math></p> <p>ז. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}</math></p>
--	---



3) חשב את הגבולות הבאים :

<p>ב. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4}</math></p> <p>ד. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}</math></p> <p>ו. <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}</math></p> <p>ח. <math>\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}</math></p>	<p>א. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}</math></p> <p>ג. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}</math></p> <p>ה. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}</math></p> <p>ז. <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2+y^2)</math></p>
---	--

\* בסעיפים א,ג,ה,ו,ח מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

4) ענה על הסעיפים הבאים :

א. חשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y}{x^3+y^2}$ .

ב. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3y)}{x^3+y^2}$ .

ג. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3y}}{x^3+y^2}$ .

ד. העזר בגבול הידוע  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$ , וחשב את הגבול  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3y+1)}{x^3+y^2}$ .

\* קחו בחשבון שייתכן שכותב השאלה לא ייתן את הגבול הידוע בגוף השאלה.

### תשובות סופיות

- (1) א. 1    ב.  $\frac{1}{12}$     ג. 1    ד. 0    ה. אינסוף    ו.  $\frac{1}{2}$     ז. 2    ח. 5    ט. 0
- (2) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול.
- (3) א. 0    ב. 0    ג. 0    ד. 0    ה. 3    ו. 0    ז. 0    ח. 0
- (4) א-ד. 0

## רציפות של פונקציה של שני משתנים

### שאלות

בשאלות 1-3 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה  $(0,0)$ .  
 במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?  
 בשאלות 4-5 בדוק את רציפות הפונקציות בנקודה  $(1,4)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \text{ נתון: } m \text{ קבוע.}$$

עבור אילו ערכים של  $m$  הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה  $f = f(x)$ , שאינה פונקציה קבועה.

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה  $g$  רציפה בנקודה  $(0, 0)$ ?

8 הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

אם  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y)$  לכל  $y$ ,

וגם  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0)$  לכל  $x$ ,

אז  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ .

9 פונקציה  $f(x, y)$  מקיימת  $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$  לכל  $(x, y)$ .

הוכח שהפונקציה רציפה בנקודה  $(0, 0)$ .

### תשובות סופיות:

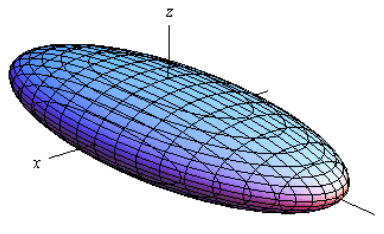
- 1 הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0, 0) = 1$  הפונקציה תהיה רציפה.
- 2 הפונקציה רציפה.
- 3 הפונקציה אינה רציפה. אין לה אפילו גבול.
- 4 הפונקציה רציפה.
- 5 הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- 6 עבור  $m > 1$  הפונקציה רציפה, ועבור  $m \leq 1$  הפונקציה לא רציפה.
- 7 הפונקציה לא רציפה.
- 8 ראו בווידאו.
- 9 ראו בווידאו.

**נספח – משטחים ממעלה שנייה**

**אליפסואיד**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

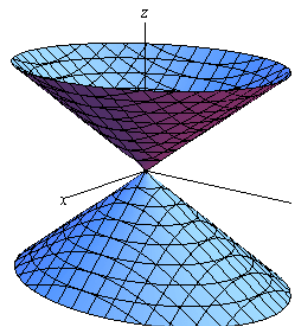
**תיאור:** החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם  $a=b=c$  נקבל **כדור** עם רדיוס  $a$  והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



**חרוט אליפטי**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

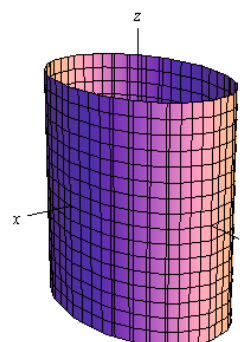
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. \* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



**גליל אליפטי**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

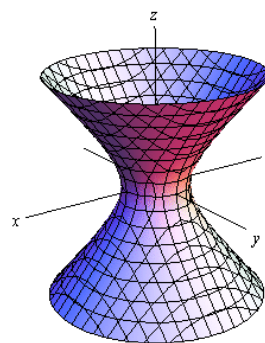
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו-  $yz$  הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא  $x^2 + y^2 = r^2$ , החתכים הנ"ל הם מעגלים. \* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.



### היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

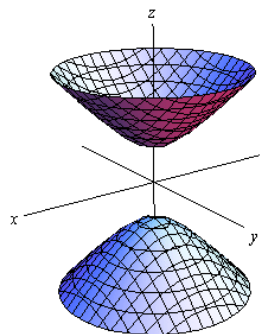
**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.  
\* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.



### היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 : \text{משוואה}$$

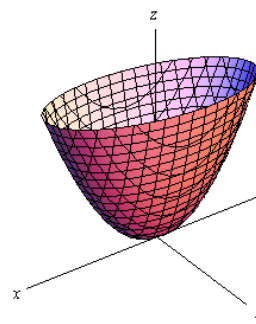
**תיאור:** למשטח זה אין חתך במישור  $xy$ ; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$ , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.  
\* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.



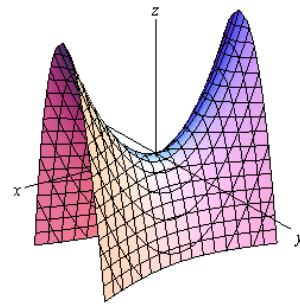
### פרבולואיד אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.  
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.  
\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



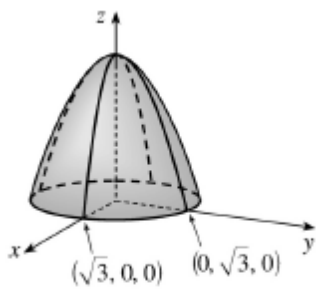
**פרבולואיד היפרבולי**



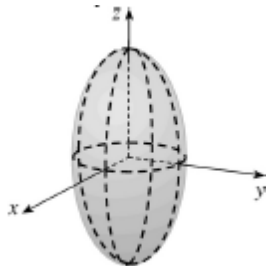
**משוואה:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

**תיאור:** החתך במישור  $xy$  הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור  $xy$  הם היפרבולות; אלו שמעל למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $x$  ואלו שמתחת למישור  $xy$  נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ . החתכים במישור  $xz$  ו- $yz$  הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.  
\* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.  
\* אם  $c > 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם  $c < 0$  הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

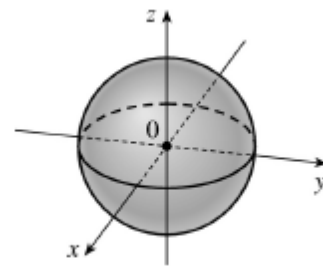
**דוגמאות שונות**



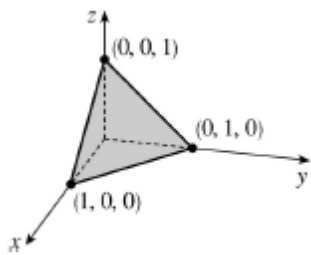
$z = 3 - x^2 - y^2$



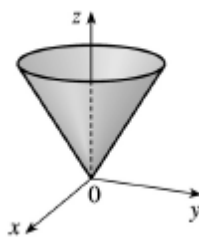
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$



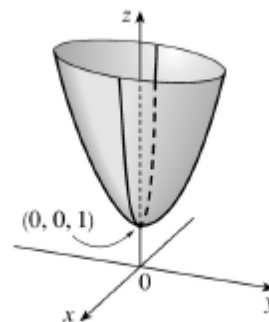
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$



$x + y + z = 1$



$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



$z = 4x^2 + y^2 + 1$

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$e$	(from right) 1	$e$
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	$e$	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

**Defined Limits:**

$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$

**Undefined Limits :**

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$