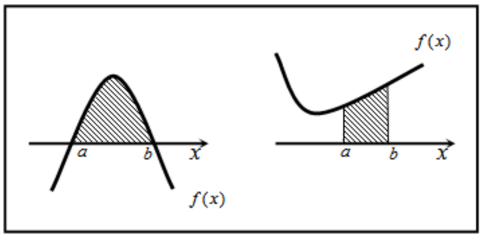
חישוב שטחים ואורך קשת

חישוב שטחים

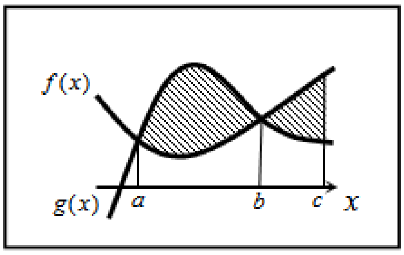
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים):

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים כך שגרף אחד כולו מעל השני :

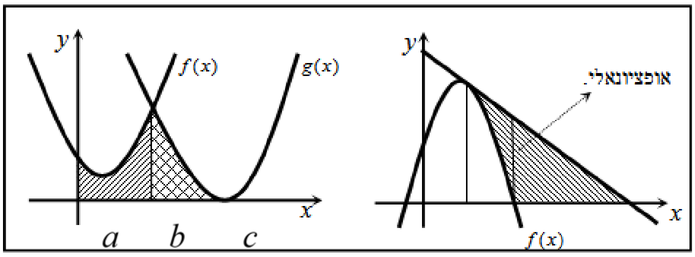


$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

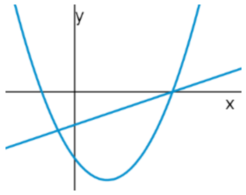
$$S=S_1+S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

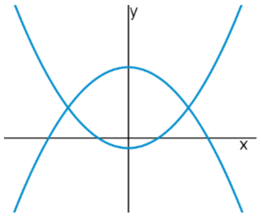


$$S=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c g(x)dx$$

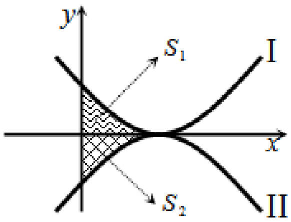
שאלות:



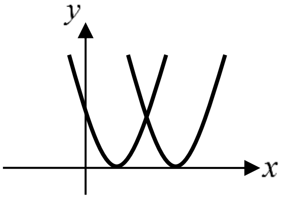
1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



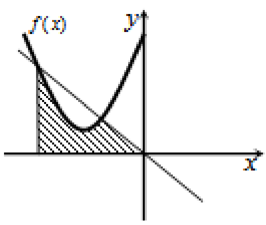
2) נתונות הפונקציות: $g(x)=7-x^2$, $f(x)=x^2-1$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



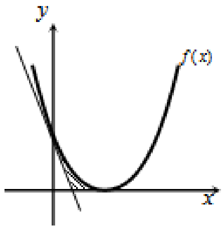
3) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$
כמתואר באיור.
א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



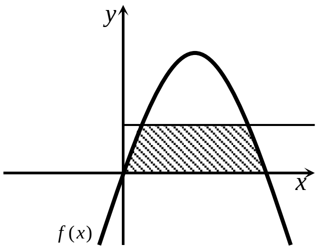
4) נתונות הפונקציות: $g(x)=x^2-6x+9$, $f(x)=x^2-2x+1$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x.



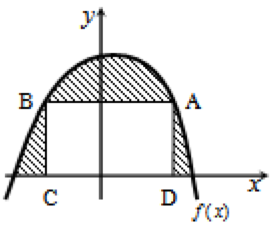
5) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.
א. מצא את משוואת הישר.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=-4$.



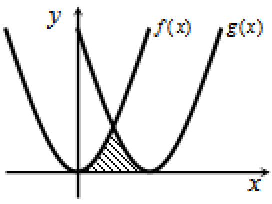
6) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x.
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



7) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצא את ערך הפרמטר k.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

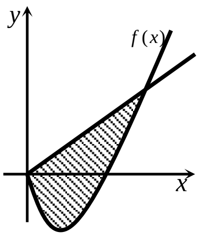


8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך
היא: $f'(x)=3-2x$. ישר AB שמשוואתו: $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x.



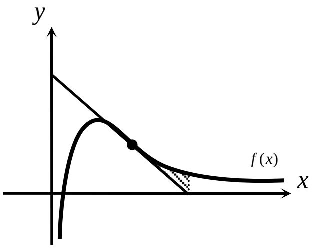
9) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$,
את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$.
א. מצא את הפונקציה $g(x)$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).

10) באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.



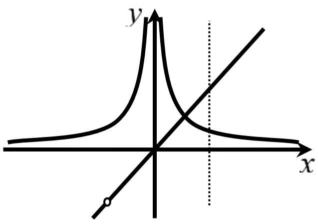
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11) ענה על הסעיפים הבאים:

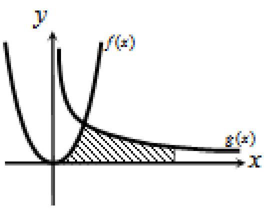


א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.
ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x.

12) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x.

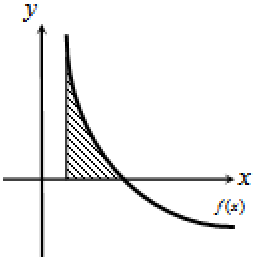


13) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום: $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר: $y=4x$.

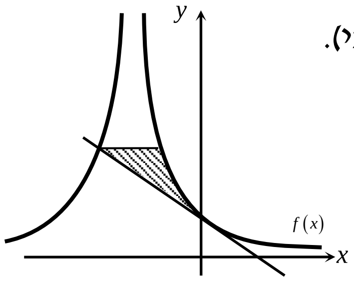


א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a.
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x=4$.

14) גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)
חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.

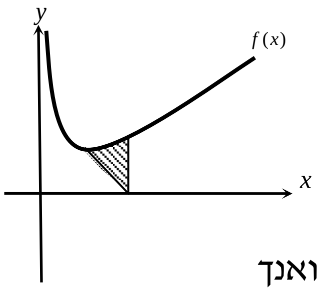


א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והישר: $x=2$.



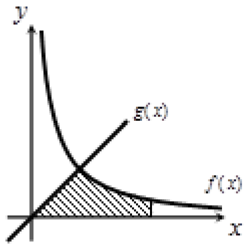
15) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{A}{(2x+A)^2}$ ‏(A פרמטר חיובי).
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y, הוא $-\dfrac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.
ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y.
ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.
ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם.
מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).



16) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

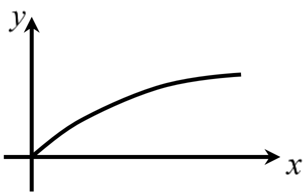
א. מצא את נקודת המינימום שלה.
ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה: $(2,0)$ שעל ציר ה- x.
מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- x היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.



17) באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\dfrac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.

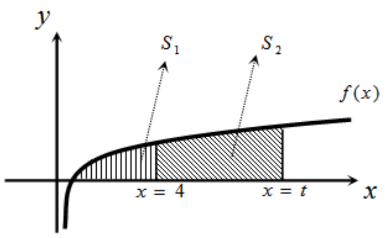
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x=9$.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y.



19) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.
לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

20) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.



מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=4$ ו- $x=t$ $(t>4)$.

נסמן: S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .

S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים.

ידוע כי: $8S_1=S_2$.

מצא את t .

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

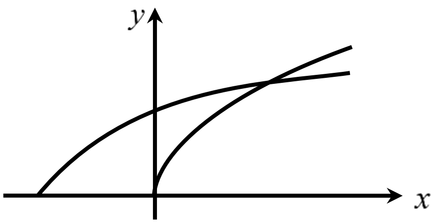
ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$.

מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות:

$g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$ $(b>0)$.



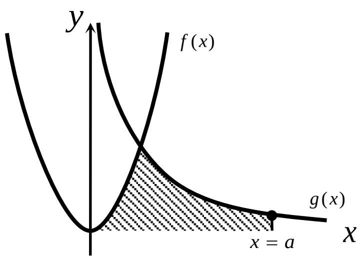
גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצא את ערכו של הפרמטר b .

23) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.



מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

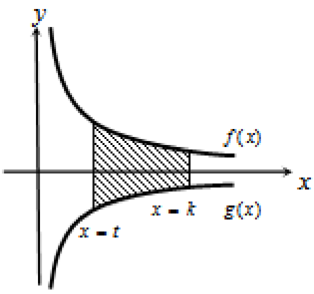
ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

מצא את a .

24) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.



מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי: $AB=2CD$.

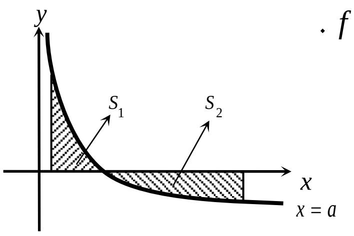
א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצא את t.

25) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של a, $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.



מעבירים שני אנכים לציר ה- x: $x=1$ ו- $x=13$,
כך שנוצרים השטחים: S_1 ו- S_2.
מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

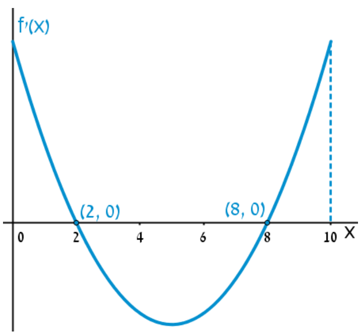
ג. ענה על תתי-הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1).

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח: S_2.
נמק את טענתך.

26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

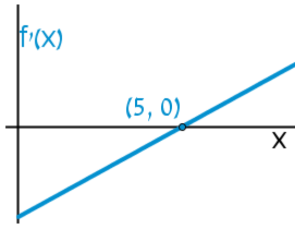
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.



א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם: $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$
וכן: $f(10)>0$.

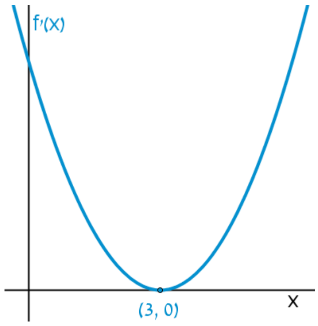
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת והצירים**
ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

27) לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה
אחת בלבד והיא $(5,0)$.



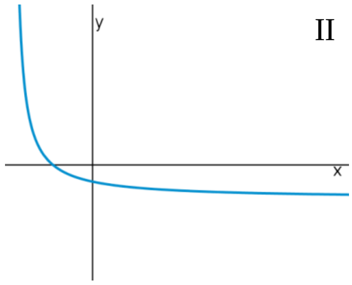
א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית
ואת התחומים שבהם היא שלילית.
ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא 2-.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y=8$.
ה. חשב את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

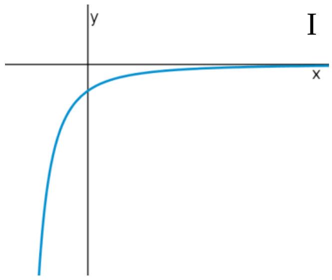
28) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.



א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את
ציר ה- y בנקודה שבה $y=-5$.
ג. חשב את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$
והצירים ברביע הראשון.

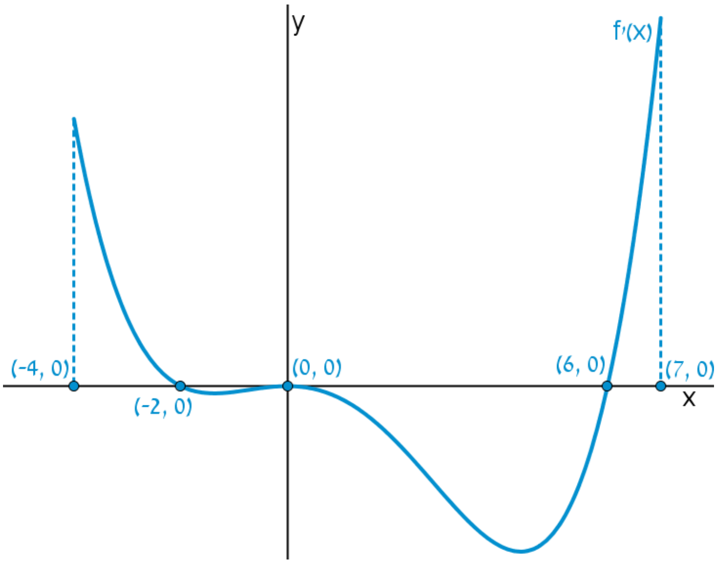
29) באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:





א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4 \le x \le 7$,
לפי הנתונים : $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע הרביעי.

31) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

32) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

33) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$

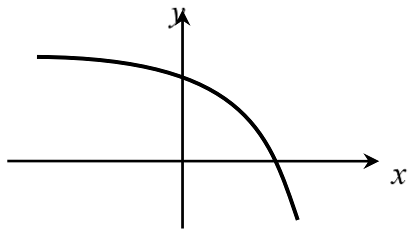
ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2}dy$

פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים של פונקציות מורכבות	אינטגרלים יסודיים
$\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$	$\int e^x dx=e^x+c$

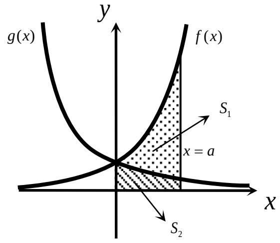
34) נתונה הפונקציה: $f(x)=5-e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
ניתן להשאיר e ו-ln בתשובה.



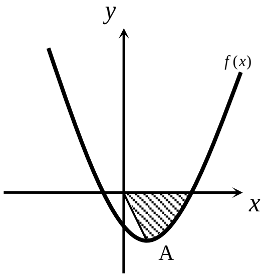
35) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{bx}$, $(0<b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצא את ערכו של הפרמטר b .

36) נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$, $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

37) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=e^{-2x}$.
מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x=a$, $a>0$
כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 .
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 .
מצא את a .



38) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.



הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

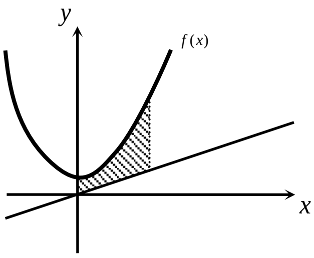
א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.

39) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{e^x+e^{ax}}{4}$.



ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\dfrac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

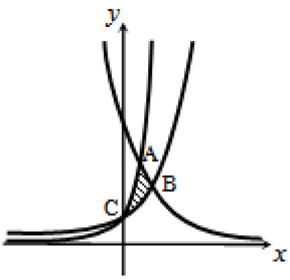
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.

40) באיור שלפניך מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

I. $f(x)=2^x$ II. $g(x)=4^x$ II. $h(x)=2^{4-2x}$



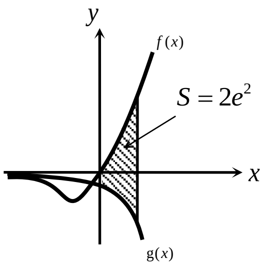
א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.

41) ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=e^x(x-1)$.



ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=-e^x$, $f(x)=xe^x$.

מעבירים ישר $x=a$, $(a>0)$ החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

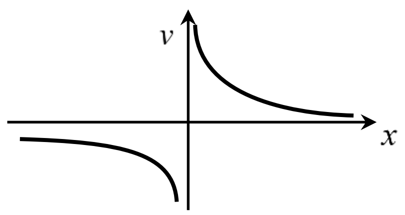
מצא את a .

פונקציות לוגריתמיות:

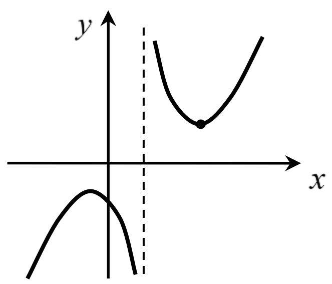
אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\|+c$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\|+c$

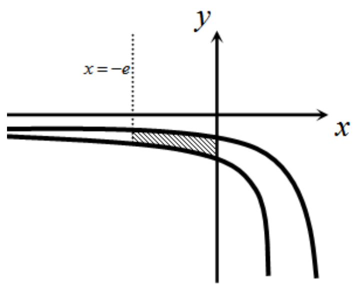
42) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו- $x=-4$ וציר ה- x .
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

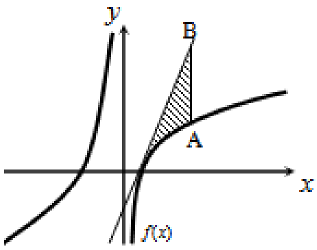


43) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.



44) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a}{x-1}$
ו- $g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום: $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.
א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x=-e$.





45) נתונה הפונקציה: $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.

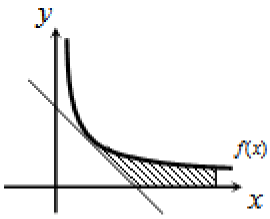
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y=18x-9$.

א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- y, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ״ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

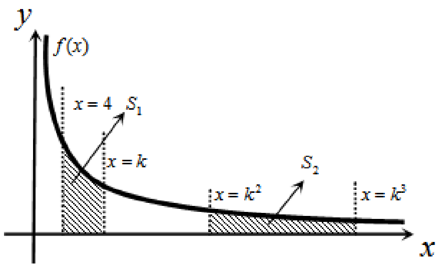


46) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק, בתחום: $x>0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x=e^2$.



47) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:

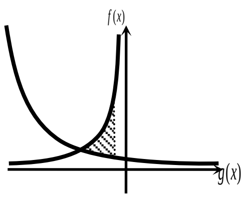
$f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום: $x>0$.

מעבירים את הישרים: $x=k^3$, $x=k^2$, $x=k$, $x=4$, (כמתואר $(x>4)$.

א. הבע באמצעות k את השטחים: S_1 ו- S_2.

ב. הראה כי ההפרש: S_2-S_1 אינו תלוי ב- k, וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1.
מצא את k.



48) נתונות הפונקציות: $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.

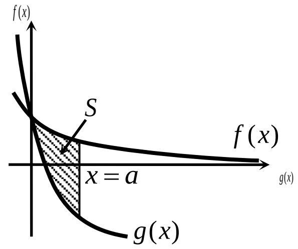
גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

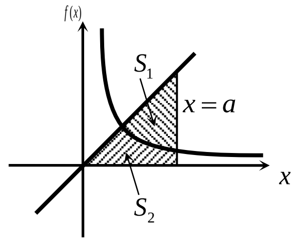
ג. חשב את השטח המוגבל ע״י שני הגרפים והישר $x=-1$.

49) באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$
בתחום: $(x\ge 0)$.



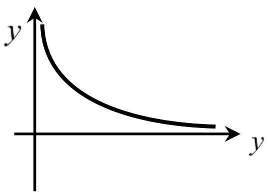
א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y.
ב. מעבירים ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).
מצא את ערכו של a, עבורו מתקיים: $S=4$.

50) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר: $y=x$.
א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- x - $x=a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.
ב. מצא את הערך של a, עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.
ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם, חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

51) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו- $x=3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר $\ln$ בתשובה.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי:

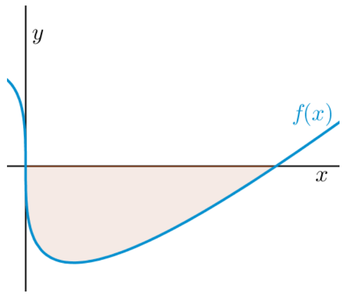
אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$	$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

52) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה:
$f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

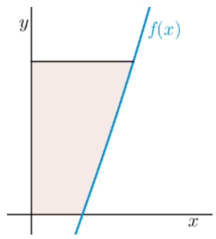


53) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

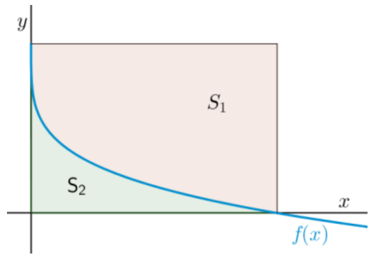
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

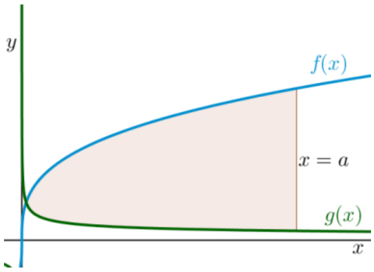
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. מעבירים אנך לציר ה- y מהנקודה $(4,6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.



54) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:
$f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$. מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן. מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:
ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2. מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

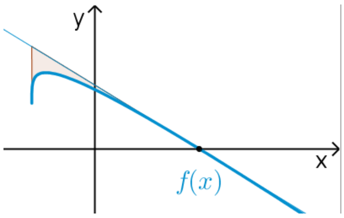




55) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות: $f(x)=4\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x>0$.

ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x=a$, (a פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר. מצא את a.



56) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, (a פרמטר). ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.

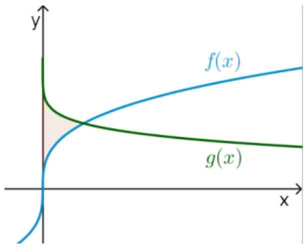
א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

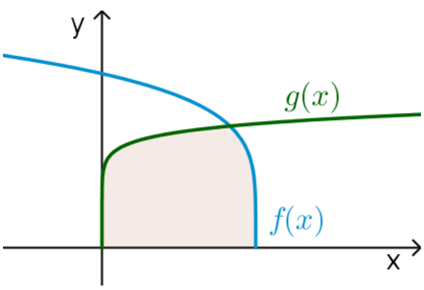


57) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

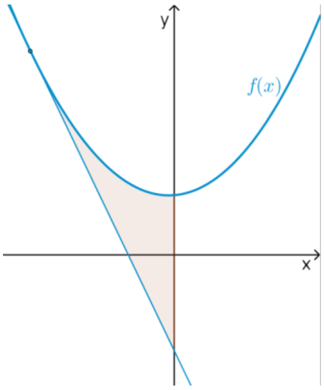
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y.

58) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=1.2$.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

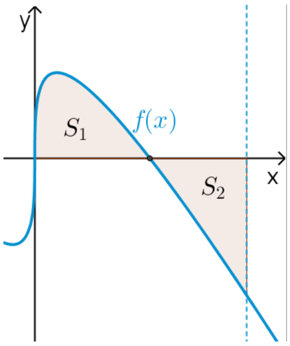
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה: $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- x.



59) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



60) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1

מעבירים ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר.

מצא את k , אם ידוע כי: $S_1=S_2$.

תשובות סופיות:

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$.

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$

24) א. הוכחה ב. $t=1$

25) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

26) ב. 10 יח"ש.

27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$
ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.

28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.

29) א. $f'(x)$: I , $f(x)$: II ב. 1 יח"ש.

30) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

31) $20\frac{5}{6}$

32) $20\frac{5}{6}$

33) א. $\frac{\pi a^2}{4}$ ב. $\frac{\pi a^2}{2}$

34) $S=0.192$ יח"ש.

35) $b=2$

36) הוכחה.

37) $a=\ln 2$

38) א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

39) א. $a=-2$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

40) ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

41) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

42) $S=\ln 4$ יח"ש.

43) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

44) א. $a=2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

45) א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$ ג. 11.54 יח"ש.
$S=6+\ln 256\approx$

46) א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

47) א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

48) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

49) ב. $a=2$

50) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

51) $V=\pi\ln 3$ יח"נ

52) א. $(0,0),\ (8,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

53) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.

54) $\frac{S_1}{S_2}=4$

55) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

56) א. $a=1$, $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

57) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

58) א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

59) א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

60) א. כל x ב. $(0,0)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

אורך קשת

שאלות:

בשאלות הבאות חשב את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

תשובות סופיות:

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\frac{1}{4}$