

פתרון משוואות משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון רפסון

שאלות:

(1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד:

א. $x^3 + 4x - 1 = 0$ ב. $x^2 = -\ln x$
 ג. $x - 0.25 \sin x = 7$ ד. $-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0$

(2) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

(3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות, מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.

א. $e^{x-1} = x$ ב. $\arctan x - x = 0$
 ג. $\ln(x+5) - 4 = x$ ד. $x^2 + x \sin x = 1 - \cos x$

(4) תהי f פונקציה גזירה לכל x , המקיימת: $f'(x) \leq 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

(5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות.

א. $e^x - 5x = 0$ ב. $4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$ ג. $1 + 4x^4 = 8x^3$

(6) בכל אחת מהמשוואות הבאות, מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).

א. $ax^2 + bx + c = 0$ ב. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
 ג. $x + a \cos(bx) = 1$ ד. $(n > 4, \text{ odd}) ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0$

(7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים ב' ו-ג' בשיטת ניוטון-רפסון):

א. $7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0$ ב. $1 + 4x^4 = 8x^3$
 ג. $-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0$

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
(2) פתרון יחיד.
(3) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=-4$ ד. $x=0$
(4) שאלת הוכחה.
(5) שאלת הוכחה.
(6) א. $b^2 - 4ac = 0$ ב. $4b^2 - 12ac < 0$ ג. $\frac{1}{ab} < -1, \frac{1}{ab} > 1$ ד. $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$
(7) א. פתרון מדויק: $x = -1$ ב. פתרונות מקורבים: $x = 1.9672, x = 0.5576$ ג. פתרון מקורב: $x = 0.8459$

משפט רול

- (1) בדקו האם הפונקציה הנתונה $f(x)$ בקטע הנתון מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:
- א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$
- ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$
- (2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$. הראו ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$. האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.
- (3) הוכיחו שלמשוואה $x^2 + x^3 + 5x = 1$ יש לפחות פתרון אחד, ולכל היותר פתרון אחד.
- (4) נתון כי f גזירה פעמיים. נתון כי f פונקציה זוגית שיש לה מינימום מקומי בנקודה $x_0 = 2$. הוכח כי יש שתי נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

תשובות סופיות:

- (1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2 - \sqrt{3}$.
- (2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.
- (3) שאלת הוכחה. (4) שאלת הוכחה.