

## גבול של סדרה, הגבול של אוילר ואי-קיום גבול לפונקציה לפי היינה

### שאלות:

(1) חשב את הגבולות הבאים:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <p>א. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n}</math></p>  | <p>ב. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}</math></p>                               | <p>ג. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n}</math></p>                        |
| <p>ד. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n}</math></p>                                 | <p>ה. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right)</math></p>  | <p>ו. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}</math></p>                                 |
| <p>ז. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}}</math></p> | <p>ח. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}}</math></p> | <p>ט. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}}</math></p>                |
| <p>י. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}}</math></p>                 | <p>יא. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}}</math></p>                       | <p>יב. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right)</math></p> |
| <p>יג. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}}</math></p>                            | <p>יד. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}</math></p>                               | <p>טו. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)</math></p>                                   |
| <p>טז. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n)</math></p>  | <p>יז. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)</math></p>                                  | <p>יח. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2)</math></p>                            |
| <p>יט. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn})</math></p>                              | <p>כ. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n</math></p>                          | <p>כא. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n</math></p>                      |
| <p>כב. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n} \right)^n</math></p>                                   | <p>כג. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1}</math></p>                  | <p>כד. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n-3} \right)^n</math></p>                      |
| <p>כה. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2}</math></p>            | <p>כו. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + n + 2} \right)^{10n}</math></p>     | <p>כז. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n</math></p>                   |
| <p>כח. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}</math></p>   | <p>כט. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n}</math></p>                                      | <p>ל. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n}</math></p>                          |
| <p>לא. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n}</math></p>                         | <p>לב. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)}</math></p>        | <p>לג. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}</math></p>                               |

### הערה חשובה מאוד!

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה  $n$  – המשתנה  $x$ . יש להתייחס אל  $x$  כאל מספר טבעי! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

**(2) חשב את הגבולות הבאים :**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$ .ג	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ .ב	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ .א
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$ .ו	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$ .ה	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$ .ד
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3+n^2+1}$ .ט	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+4n+1}$ .ח	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right)$ .ז
$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \sin \frac{1}{n}$ .יב	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n+(-1)^n}{n} \right]^n$ .יא	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2}$ .י

**(3) חשב את הגבולות הבאים :**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ .ב	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ .א
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ .ד	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}$ .ג

\* רמזים : סעיף א:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  . סעיף ב: הוכח כי  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

**(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה). הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.**

א.  $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, a_1 = \sqrt{2}$  . ב.  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n-1}, a_1 = 2$  . ג.  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2$

**(5) נתונה הסדרה  $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1$  . א. ענה על הסעיפים הבאים :**

- i. נגדיר סדרה חדשה  $b_n$  על ידי:  $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$  . הוכח שהגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  קיים וחשב אותו.
- ii. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה  $a_n$  שואפת לאינסוף.
- ב. ענה על הסעיפים הבאים :
  - i. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה  $a_n$  (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).
  - ii. ענה שוב על סעיף א.i. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.
  - iii. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכח כי :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2}$ .ג	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1$ .ב	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2}$ .א
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0$ .ו	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2$ .ה	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1$ .ד
$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty$ .ט	$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty$ .ח	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2$ .ז
$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty$ .יב	$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty$ .יא	$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty$ .י

7) הוכח או הפרך :

- א. אם  $a_n$  סדרה חסומה, אז יש לה גבול.
- ב. אם  $b_n$  סדרה לא חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .
- ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$  או  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$ .
- ד. אם  $d_n$  סדרה עולה, אז היא לא חסומה.
- ה. אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n + b_n)$  וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$  אין גבול.
- ו. אם ל- $a_n$  ו- $b_n$  אין גבול, אז גם ל- $(a_n / b_n)$  אין גבול.
- ז. אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתבדרת.
- ח. אם  $a_n$  מתכנסת ו- $b_n$  מתבדרת, אז  $(a_n \cdot b_n)$  מתכנסת.
- ט. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ .
- י. אם  $a_n < b_n$  לכל  $n$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- יא. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ואם  $b_n$  חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .
- יב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  ואם  $a_n < 1$  לכל  $n$ , אז  $k < 1$ .
- יג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$ .

8) הוכח כי הגבולות הבאים אינם קיימים לפי היינה :

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 4}{\cos x + 10}$ .ב.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{ x-4 }$ .א.
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x-[x]}$ .ד.	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ .ג.

**תשובות סופיות:**

- 1) א. 0    ב. 4    ג.  $\infty$     ד. 0    ה. -5    ו. 1    ז. 1.5
- ח.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$     ט. 0.25    י. 4    יא. 2    יב.  $\ln 3$     יג.  $e^{\frac{1}{3}}$
- יד.  $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$  ,  $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$  ,  $(\lim a_n = \sqrt[n]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$
- טו. 2.5    טז.  $\frac{k}{2}$     יז. 0.5    יח. 0.5    יט.  $\frac{a-b}{2}$     כ.  $e^{0.5}$
- כא. 1    כב.  $e^2$     כג.  $e^{-1}$     כד.  $e^3$     כה.  $e^{-12}$     כו.  $e^{30}$     כז.  $e$
- כח. 0    כט. 0    ל. 0.75    לא. 3    לב.  $\frac{3}{4}$     לג. 4
- 2) א. 0    ב. 0    ג. 4    ד.  $\frac{1}{4e}$     ה.  $\infty$     ו. 1
- ז. 4    ח. 0.5    ט.  $\frac{1}{3}$     י. אין גבול.    יא. אין גבול.    יב.  $\infty$
- 3) א. 1    ב. 0    ג. 1    ד. 1
- 4) א. הגבול 2.    ב. הגבול 1.    ג. הגבול 1.
- 5) א. i. הגבול  $\frac{1}{3}$ .    ב. ii.  $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$
- 6) הוכחה.
- 7) הוכחה.
- 8) הוכחה.

## תתי סדרות ומשפט בולצאנו-וירשטראס

### שאלות

(9) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

(10) הוכח כי לסדרה הבאה אין גבול:  $a_1 = 2$ ;  $a_{n+1} = \sqrt{11 - (a_n)^2}$ .

(11) נתונה הסדרה  $a_n$ , המוגדרת על ידי:  $a_1 = 2$ ;  $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ .

הוכח שהסדרה מתכנסת.

(12) נתונה הסדרה  $a_n$ , המוגדרת על ידי:  $a_1 = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ );  $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$ .

הוכח שהסדרה מתכנסת.

לתשובות סופיות בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## משפט שטולץ

### שאלות

(13) חשב:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

(14) חשב:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n+1)}{n^3}$

(15) חשב:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$ , כאשר  $p$  קבוע שלם וחיוני.

(16) חשב:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 + \dots + n \cdot c_n}{n^3}$ , אם ידוע כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = k$

(17) חשב:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1^2 \cdot a] + [2^2 \cdot a] + \dots + [n^2 \cdot a]}{n^3}$ , כאשר  $a$  קבוע ממשי.

### תשובות סופיות

1 (13)

$\frac{2}{3}$  (14)

$\frac{1}{p+1}$  (15)

$\frac{k}{3}$  (16)

$\frac{a}{3}$  (17)

## מבחן קושי להתכנסות

### שאלות

(18) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ , לכל  $n$ .  
הוכח שהסדרה מתכנסת.

(19) הוכח שהסדרה  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  שואפת לאינסוף.

(20) הוכח כי הסדרה  $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  מתכנסת.

(21) הסדרה  $a_n$  מקיימת  $|a_n - a_{n-1}| < a^n$ , לכל  $n$ , כאשר  $0 < a < 1$ .  
הוכח שהסדרה מתכנסת.

(22) הוכח כי הסדרה  $a_n = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos 2\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\cos(n\alpha)}{3^n}$  מתכנסת.

לתשובות סופיות בסרטוני וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)