

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0$, $x = t^2 + 1$, $y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi$, $x = \sin t$, $y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi$, $x = \cos t$, $y = 4 \sin t$

(2) עבור מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4$, $y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2$, $y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2$, $y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) לפינך תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוף של הפרמטר t , מצא משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4$, $y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t$, $y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1$, $y = t(0.5t+1) + 1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}$, $y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}$, $y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות:

(1) א. $y = x - 1, x \geq 1$. ב. $y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$. ג. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$

(2) א. $x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4$. ב. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$. ג. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

(3) א. $y = (x+4)^2$. ב. $(x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$. ג. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1$. ה. $x^2 + y^2 = 25$. ו. $x^2 - y^2 = 4k^2$

הנגזרת ושימושיה

1) חשב את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית:}$$

$$2) \quad \begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. חשב את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצא את משוואת המשיק לעקום בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצא את משוואת הנורמל לעקום בנקודה בה $t = -1$.

$$3) \quad \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases} \quad \text{נתון העקום}$$

א. שרטט את העקום.

ב. מצא את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0,0)$.

ג. מצא את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$1) \quad y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$2) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y' = \frac{-2}{2t+1} \quad \text{ג. } y = 2x+3 \quad \text{ד. } y = -0.5x+3$$

$$3) \quad \text{א. ראו בסרטון. ב. } y = \pm\sqrt{3}x \quad \text{ג. אופקי- } (0, -9) \quad \text{אנכי } (2, -6), (-2, -6) \\ \text{ד. } -1 < t < 1 \quad \text{קמור. } t > 1 \quad \text{או } t < -1 \quad \text{קעור.}$$

שימושי האינטגרל המסוים

$$(1) \quad C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases} \quad \text{חשב את השטח הכלוא בעקום}$$

$$(2) \quad \text{חשב את השטח הכלוא בתוך האליפסה } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

* שים לב שאם $a = b = r$ נקבל שטח הכלוא בתוך מעגל עם רדיוס r .

$$(3) \quad \text{חשב את השטח הכלוא בין העקום } x = \cos t, \quad y = t + \sin t \quad \text{לבין ציר ה-} x, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$(4) \quad \text{חשב את השטח הכלוא בין העקום } x = 4 \cos t, \quad y = \sin^2 t \quad \text{לבין ציר ה-} x, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(5) \quad \text{חשב את אורך העקום } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(6) \quad \text{חשב את אורך העקום } \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases} \quad \text{מהנקודה } (1, 0) \quad \text{לנקודה } (-1, \pi)$$

$$(7) \quad \text{חלקיק נע לאורך מסלול המוגדר על ידי ההצגה הפרמטרית } \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מצא את המרחק שהחלקיק עבר והשווה אותו לאורך העקום עצמו.

$$(8) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad \text{שבין } t = 0 \quad \text{לבין } t = \pi, \quad \text{מסתובב סביב ציר ה-} x$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(9) \quad \text{חלק העקום } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \text{שבין } t = 0 \quad \text{לבין } t = \frac{\pi}{2}, \quad \text{מסתובב סביב ציר ה-} y$$

מהו שטח המעטפת הנוצרת?

$$(10) \quad \text{חשב את אורך העקום } \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq 2\pi$$

$$(11) \quad \text{חשב את אורך העקום } \mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} \quad 1 \leq t \leq 3$$

תשובות סופיות

(1) $8/3$

(2) πab

(3) 1.5π

(4) $16/3$

(5) 8

(6) 4

(7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

(8) $4\pi r^2$

(9) $6\pi/5$

(10) $6\pi\sqrt{29}$

(11) $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$