משפט לגרנז'

שאלות:

1) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

א. $\frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}}$ $\quad (0<a<b)$

ב. $\frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}$ $\quad (0<a<b)$

ג. $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$ $\quad \left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)$

ד. $(a-b)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<(a-b)e^{-b}$ $\quad (a<b)$

ה. $\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$ $\quad (0<a<b)$

ו. $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$ $\quad (0<a<b<1)$

ז. $\frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}(b)-\operatorname{arcsinh}(a)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}$ $\quad (0<a<b)$

ח. $\frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}(b)-\operatorname{arctanh}(a)<\frac{b-a}{1-b^2}$ $\quad (0<a<b<1)$

ט. $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $\quad (0<a<b)$

י. $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $\quad (1<a<b)$

יא. $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $\quad (1<a<b<3)$

2) הוכח את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

א. $x<\tan x<\frac{x}{\cos^2 x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

ב. $\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$ $(x>0)$

ג. $x<\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$

ד. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\operatorname{arcsinh}(x)<x$ $(x>0)$

ה. $x<\operatorname{arctanh}(x)<\frac{x}{1-x^2}$ $(0<x<1)$

ו. $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>0)$

ז. $1+x<e^x<1+xe^x$ $(x>0)$

ח. $\sin x\le x$ $(x>0)$

ט. $\tan x<4x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$

שאלה זו עוסקת במשפט קושי (הכללה של משפט לגרנז') ולפיכך רלוונטית רק אם למדת משפט זה.

י. $\arctan x>\ln(1+x)$ $(0<x<1)$

שאלה זו עוסקת במשפט קושי (הכללה של משפט לגרנז') ולפיכך רלוונטית רק אם למדת משפט זה.

3) הוכח את אי השוויונים הבאים:

א. $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$

ב. $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$

ג. $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$

ד. $|\tan y-\tan x|\le 8|\sin x-\sin y|$ $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

4) הוכח את אי השוויונים הבאים:

א. $\frac{1}{3}<\ln\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{1}{2}$

ב. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+1<\sqrt{2}<1.5$

ג. $\frac{3}{25}+\frac{\pi}{4}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}$

ד. $\frac{\sqrt{3}}{15}+\frac{\pi}{6}<\arcsin(0.6)<\frac{1}{8}+\frac{\pi}{6}$

5) ענה על השאלות הבאות:

א. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 5$.
ידוע כי $f(1)=3$, $f(4)=18$. הוכח כי $f(2)=8$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל x, המקיימת $|f'(x)|\le 7$.
ידוע כי $f(1)=3$, $f(4)=18$. הוכח כי $4\le f(2)\le 10$.