

## נגזרות של פונקציות מיוחדות

### שאלות

(1) הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$\text{א. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ב. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{ג. } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

### נגזרות מסדרים גבוהים, נוסחת לייבניץ

(2) חשב את הנגזרת ה- $n$ ,  $f^{(n)}(x)$ , של הפונקציות הבאות:

$$\text{ב. } y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2}$$

$$\text{א. } y = \frac{1}{x+a}$$

$$\text{ד. } y = \frac{x^4}{x^2-1}$$

$$\text{ג. } y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$$

(3) חשב את הנגזרת העשירית,  $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות:

$$\text{ב. } y = x^3 \sin 5x$$

$$\text{א. } y = x^3 e^x$$

### נגזרת של פונקציה סתומה:

(4) גזור את הפונקציות הסתומות הבאות ומצא את  $y'$ :

$$\text{ב. } 4 \ln x + 10 \ln y = y^2$$

$$\text{א. } x^2 + y^5 - y = 1$$

$$\text{ד. } x^y - xy = 10$$

$$\text{ג. } xy = \sinh \frac{y}{x}$$

$$\text{ו. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

$$\text{ה. } x^y - y^x = 1$$

(5) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ .  
מצא את ערך  $y$  בנקודה  $y = 1$ .

(6) נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ ,  
מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ .  
נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת.  
הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

נגזרת של פונקציה מן הצורה  $h(x)^{g(x)}$ :

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

ג.  $f(x) = (\cos x)^{\ln x}$

ב.  $f(x) = (\sin x)^x$

א.  $f(x) = (x+1)^{\sin x}$

## תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) א.  $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (x+a)^{-n-1}$

ב.  $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left( -5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right)$

ג.  $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left( -\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right)$

ד.  $y' = 2x - \frac{1}{2} \left( (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right)$  ,  $y'' = 2 + \left( (x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right)$

$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot n! \left( (x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right)$  ,  $(n > 2)$

(3) א.  $(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6]$

ב.  $(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x$

א.  $y' = \frac{2x}{1-5y^4}$       ב.  $y' = \frac{-4y}{x(10-2y^2)}$       ג.  $y' = \frac{-y \left( x^2 + \cosh \frac{y}{x} \right)}{x \left( x^2 - \cosh \frac{y}{x} \right)}$

ד.  $y' = \frac{y(1-x^{y-1})}{x^y \ln x - x}$       ה.  $y' = \frac{y^x \ln y - x^{y-1} y}{x^y \ln x - y^{x-1} x}$       ו.  $y' = \frac{y - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - x}$

(5) -1 או  $-\frac{1}{8}$

(6) שאלת הוכחה.

(7) א.  $f'(x) = (x+1)^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right)$

ב.  $f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + x \cot x)$

ג.  $f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right)$