

אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

שאלות:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx \quad \text{ג.} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{ב.} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad \text{ו.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2} dx \quad \text{ה.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad \text{ט.} \quad \int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad \text{ח.} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad \text{ז.}$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad \text{י.}$$

אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ג.} \quad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad \text{ה.} \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad \text{ד.}$$

אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

(3) חשב את האינטגרל הבא: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x = 1$ וציר ה- x עבור $x \leq 1$.

(5) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x = 5$.

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$. ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר x בתחום $0 \leq x \leq k$ שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר x בתחום $x \geq k$. מצא את הקבוע k .

מבחני השוואה

(7) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad \text{ג.} \quad \int_1^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad \text{ב.} \quad \int_1^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad \text{ו.} \quad \int_1^{\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) dx \quad \text{ה.} \quad \int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2-4}} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad \text{ט.} \quad \int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad \text{ח.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad \text{ז.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad \text{יב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{יא.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad \text{י.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad \text{טו.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad \text{יד.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad \text{יג.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad \text{טז.}$$

התכנסות בהחלט

8) בדוק אם האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad \text{ג.} \quad \int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad \text{ב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx \quad \text{א.}$$

9) הוכח: אם $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ מתכנס, אז $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס.

מבחן דיריכלה

10) הוכח כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{ב.} \quad \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{ג.}$$

התכנסות בתנאי

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) \quad \text{ג.} \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) \quad \text{ג.} \quad \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx \quad \text{ב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad \text{א.} \quad (13)$$

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx \quad (15) \quad \int_2^{\infty} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x-1}} dx \quad (14)$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 1 ב. מתבדר: ∞ ג. 1 ד. π ה. 0
- ו. $\frac{1}{4}$ ז. $\frac{\pi}{2}$ ח. $\frac{1}{2e}$ ט. מתבדר: ∞ י. $\frac{5}{4e^2}$
- (2) א. מתבדר: ∞ ב. $2\sqrt{3}$ ג. מתבדר: ∞ ד. מתבדר: ∞ ה. מתבדר: ∞
- (3) מתבדר: ∞
- (4) $\frac{1}{2}e^2$
- (5) $2\sqrt{5}$
- (6) $k = \sqrt[3]{\ln 2}$
- (7) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתכנס. ד. מתכנס. ה. מתבדר.
- ו. מתבדר. ז. מתכנס. ח. מתכנס. ט. מתבדר. י. מתכנס.
- יא. מתכנס. יב. מתבדר. יג. מתכנס. יד. מתבדר. טו. מתכנס.
- טז. מתכנס.
- (8) א. מתכנס. ב. מתכנס. ג. מתכנס.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) א. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$ ב. מתכנס בהחלט.
- ג. מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$ ומתבדר עבור $p \geq 2$.
- (12) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (13) א. מתכנס בתנאי עבור $0 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 2$, מתבדר עבור $p \geq 2$.
- ב. מתכנס בתנאי עבור $-3 < p \leq 1$, מתכנס בהחלט עבור $1 < p < 5$, מתבדר עבור $p \geq 5$.
- (14) מתכנס בתנאי.
- (15) מתכנס בתנאי.