

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס ביוסטטיסטיקה א'. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

תוכן

- פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - סיווג משתנים וסולמות מדידה 3
- פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים 6
- פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים 14
- פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה 16
- פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי 19
- פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן 29
- פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור- טווח בין- רבעוני 34
- פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן 37
- פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים במחלקות 40
- פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים בטבלת שכיהויות בדידה 45
- פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - מקדם ההשתנות 48
- פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - תרשים קופסא - *BOXPLOT* 51
- פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות 54
- פרק 14 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות אמריקאיות 63
- פרק 15 - בעיות בסיסיות בהסתברות 73
- פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים 78
- פרק 17 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד 88
- פרק 18 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה 91
- פרק 19 - תלות ואי תלות בין מאורעות 97
- פרק 20 - שאלות מסכמות בהסתברות 100
- פרק 21 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות 103
- פרק 22 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן 106
- פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית 110
- פרק 24 - ההתפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית 114
- פרק 25 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית 117
- פרק 26 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית 120
- פרק 27 - קרוב הנורמלי להתפלגות הבינומית 129

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - סיווג משתנים וסולמות מדידה

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת. באותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה. משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים : דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. **סולם שמי** (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות לדוגמה: מצב משפחתי רווק/נשוי/אלמן/גרש; אזור מגורים. משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשך/לא מעשך.
2. **סולם סדר** (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. **סולם רווחים** (אינטרוואלי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.
4. **סולם מנה/יחס** – משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים :

משתנה איכותי הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות , אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.

כמו : מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..).

מין האדם (זכר, נקבה)

מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

משתנה כמותי הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו : גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים :

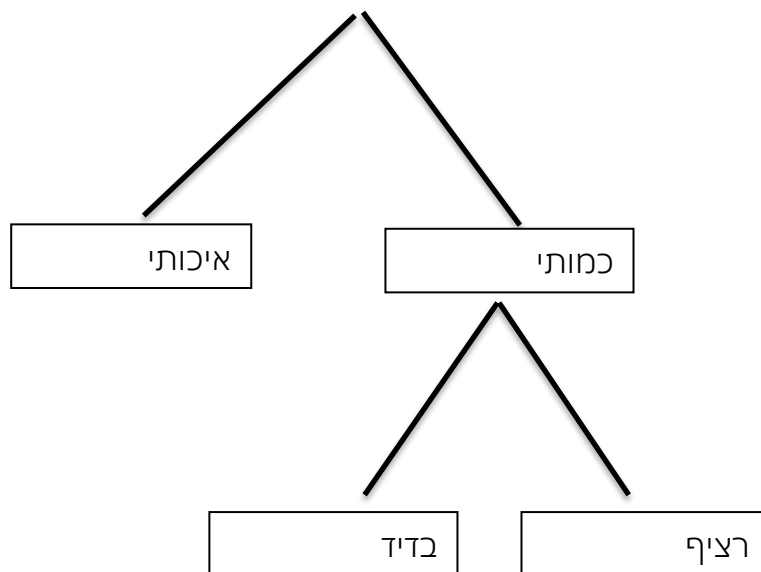
משתנה בדיד : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו : מספר ילדים למשפחה (1,2,3..)

ציון בבחינה (מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1)

משתנה רציף : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים , הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים .

כמו : גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (16.233 ס"מ הוא גם גובה אפשרי)

משקל בק"ג , מהירות בקמ"ש וכולי.



תרגילים:

1. לפניכם רשימה של משתנים:
 - א. גובה אדם בס"מ.
 - ב. מספר ילדים למשפחה.
 - ג. מידת חרדה לפני מבחן.
 - ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ 1 עד 7 (1 כלל לא מרוצה עד 7 מרוצה מאד)
 - ה. השכלה.
 - ו. מספר אוטובוס.
 - ז. מקום מגורים.
 - ח. מין (1=גבר ו-2=אישה).
 - ט. מידת נעליים.

ציינו באיזה סולם מדידה המשתנה הנחקר (שמי, סדר, רווחים או מנה)

2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".
בחברה 200 עובדים.

מספר העובדים	מספר האיחורים
17	0
23	1
85	2
50	3
25	4

- א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
 - ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
באיזה סולם מדידה המשתנה?
3. לפניכם רשימה של משתנים כמותיים. ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.
 - א. שכר עובד בש"ח.
 - ב. ציון בחינת בגרות.
 - ג. תוצאה בהטלת קובייה.
 - ד. מהירות ריצה בתחרות.
 - ה. שיעור התמיכה בממשלה.

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו :

א. רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות :
3 4 3 5 4

ב. טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה - X	שכיחות - $f(X)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N} \times 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N} \times 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N} \times 100$
\vdots	\vdots	\vdots
X_k	f_k	$\frac{f_k}{N} \times 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

למשל, להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

$\frac{f_i}{n}$	F_i	מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
0.08=2/25	2	2	5
0.16=4/25	6	4	6
0.32=8/25	14	8	7
0.2=5/25	19	5	8
0.16=4/25	23	4	9
0.08=2/25	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחותות : F_i - השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך .

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי : $\frac{f_i}{n}$ - איזה חלק

מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

ג. **טבלת שכיחותות במחלקות:**

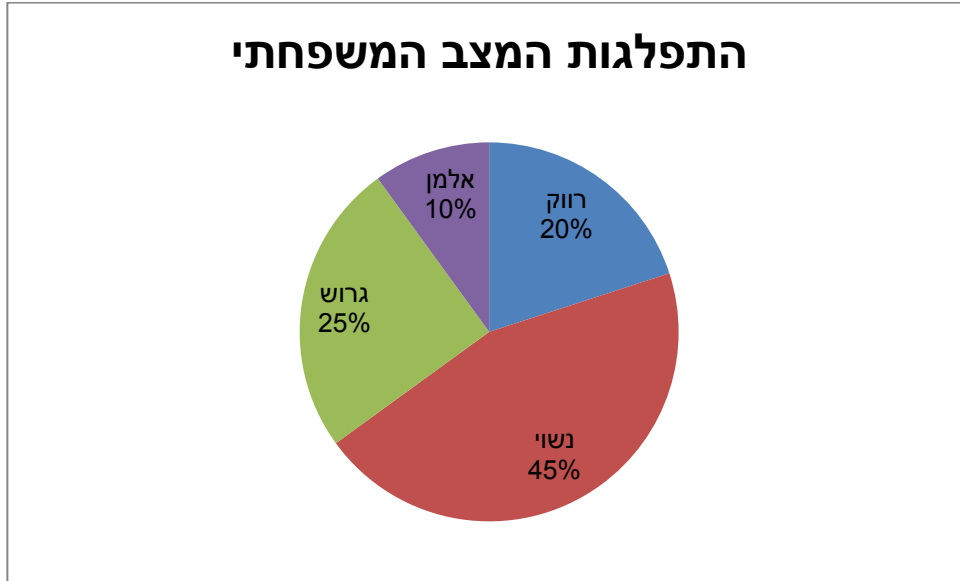
משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחותות תהיה ארוכה מידי.

למשל, נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן התפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

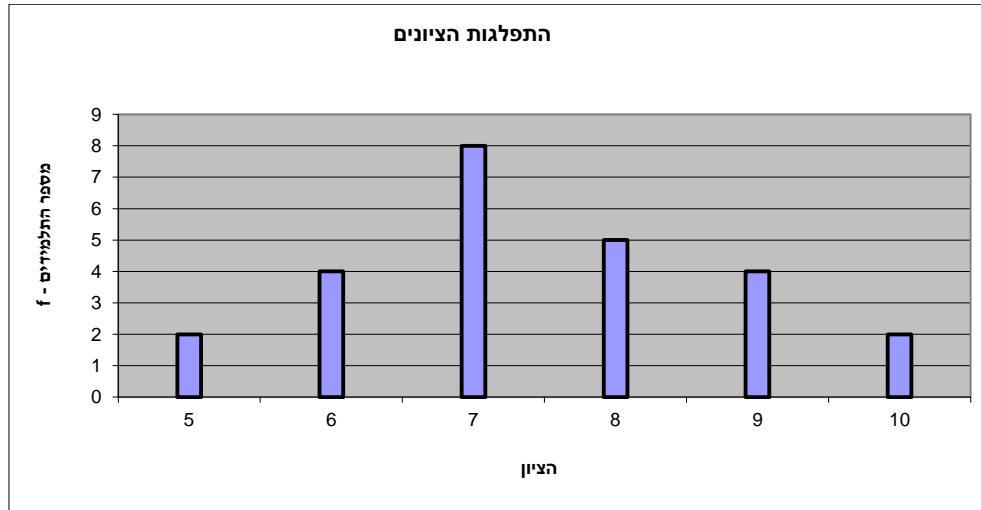
ד. דיאגרמת עוגה :

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח" יחסי מהעוגה. הנתח בעוגה פרופורציוני לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



ה. דיאגרמת מקלות :

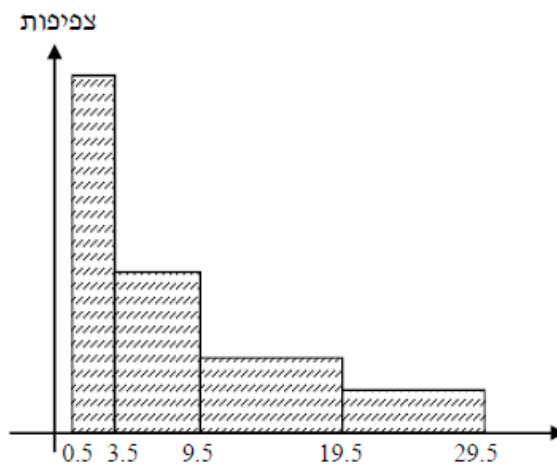
הציר האופקי הוא הציר של המשתנה הציר האנכי של השכיחות – הגובה של המקל מעיד על השכיחות .
 רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף .
 כמו כן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.



1. **היסטוגרמה:**

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות. רלבנטית למשתנה כמותי רציף. בהיסטוגרמה ציר האופקי הוא הציר של המשתנה וציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

			אמצע	רוחב	X
צפיפות	מצטברת	שכיחות			
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



פוליגון- מצולעון: אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות

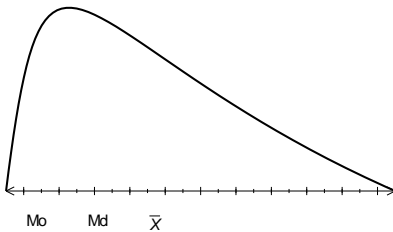
התפלגות סימטרית פעמונית- רוב התצפיות במרכז וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. למשל, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) – רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. למשל, שכר במשק.

התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית) רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. למשל, אורך חיים.

התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



תרגילים:

1. בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו- 25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2. להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

- א. מהו המשתנה הנחקר?
ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3. להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

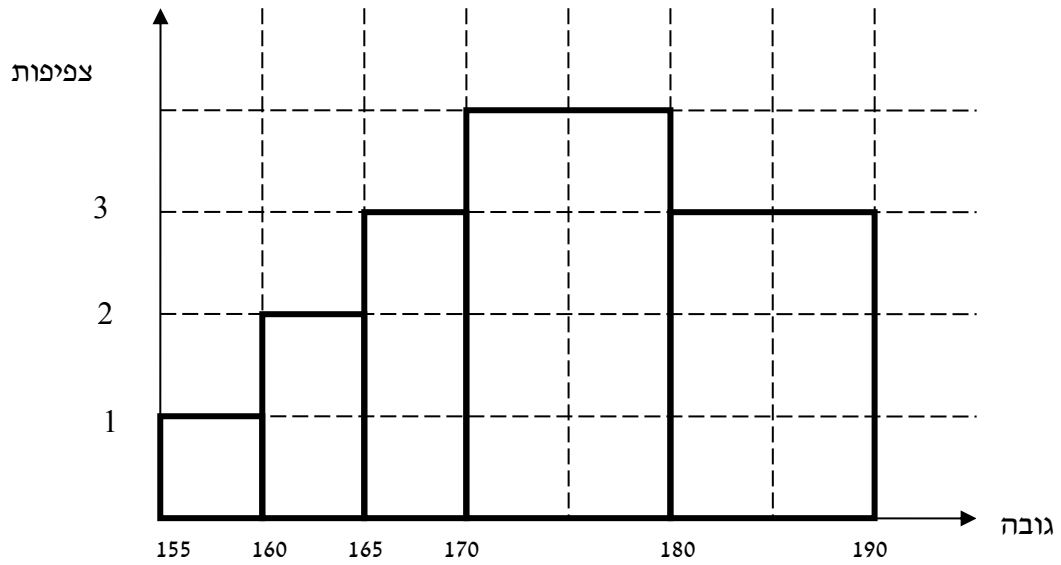
מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?
ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6

- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תאר את הרשימה בטבלת שכיחויות.
ג. הוסף שכיחויות יחסיות לטבלה.
ד. תאר את הנתונים באופן גרפי.

5. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסף שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסף את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

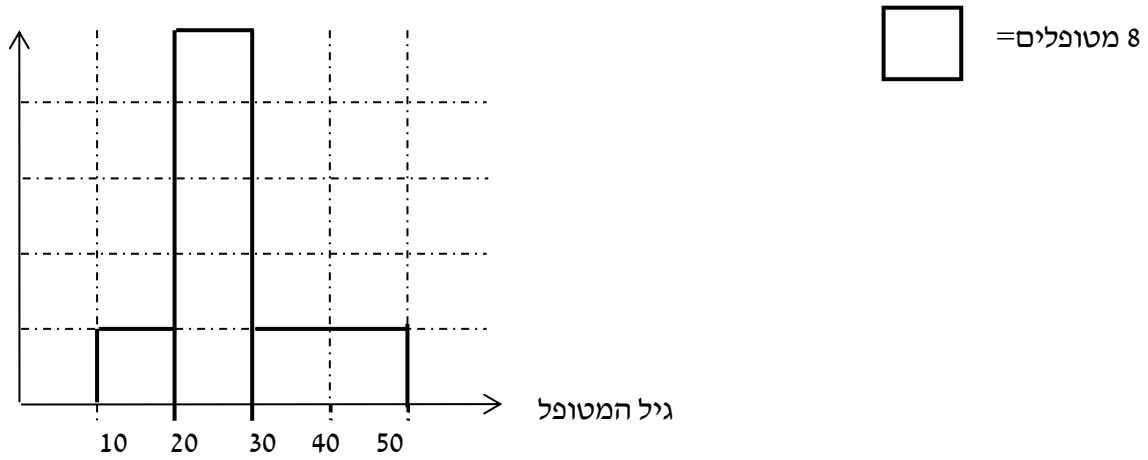
6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

- תאר את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7. להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :

קנה מידה :



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?

ב. מהי הקבוצה הנחקרת?

ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.

ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות. הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת. לדוגמא משקל של בני אדם או משקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה. **גבולות מדומים:** כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק. **רמת הדיוק חייבת להיות קבועה** אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמתיים. כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמתיים? לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2 את התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח'. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

$f(x)$	X
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

תרגילים:

1. להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

$f(x)$	X
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

2. להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת. יש לרשום את הנתונים בגבולות אמתיים.

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת כדי לרשום סכום של תצפיות:

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

תרגילים:

1. בבניין 5 דירות, לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X) ומספר הנפשות החיות בדירה (Y).

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

חשבו:

$$\sum_{i=1}^3 X_i$$

$$\sum_{i=1}^5 Y_i$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$$

$$\sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i$$

$$\sum (X_i) \sum (Y_i)$$

2. נתון לוח ערכי המשתנים x_i ו- y_i כאשר: $i=1,2,\dots,6$

i	1	2	3	4	5	6
x_i	3	2	4	-2	1	4
y_i	2	0	0	1	-5	2

ונתונים הקבועים: $a=2$ $b=5$ חשבו את הנוסחאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^4 y_i \quad \text{א.}$$

$$\sum_{i=1}^6 a \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i y_i \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i) \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i + a \quad \text{ה.}$$

3. קבע לכל זהות אם היא נכונה:

$$\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{א.}$$

$$\sum_{i=1}^n a = a \cdot n \quad \text{ב.}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad \text{ג.}$$

4. נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$ $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$

חשב: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$ (פתרון: 1160)

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – MODE

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

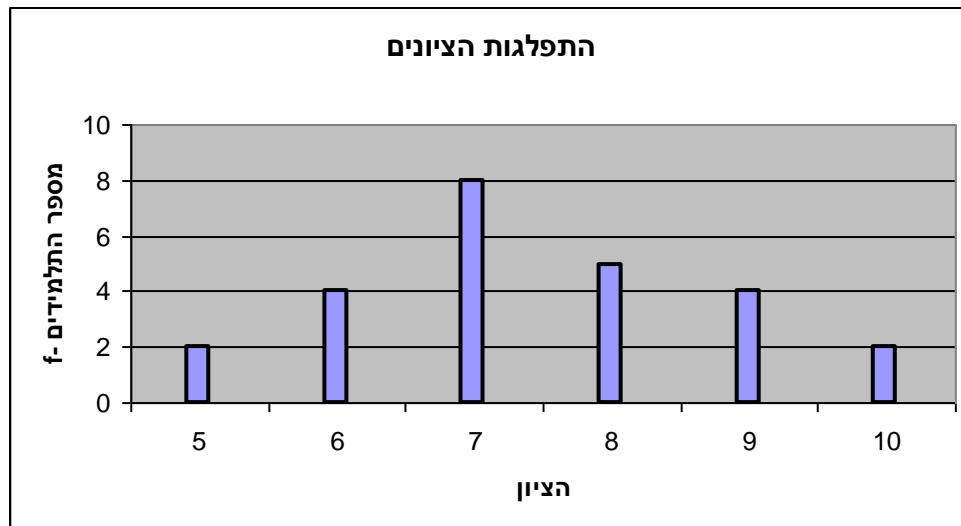
ברשימה : הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים .

7 9 4 8 4 10 6

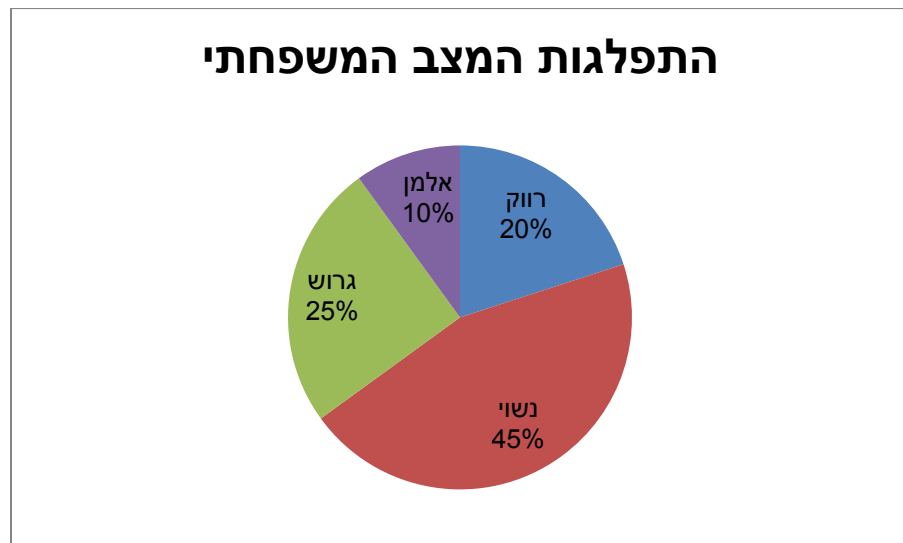
בטבלת שכיחויות בדידה : הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות : שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה: הערך של הפלח הגדול ביותר.

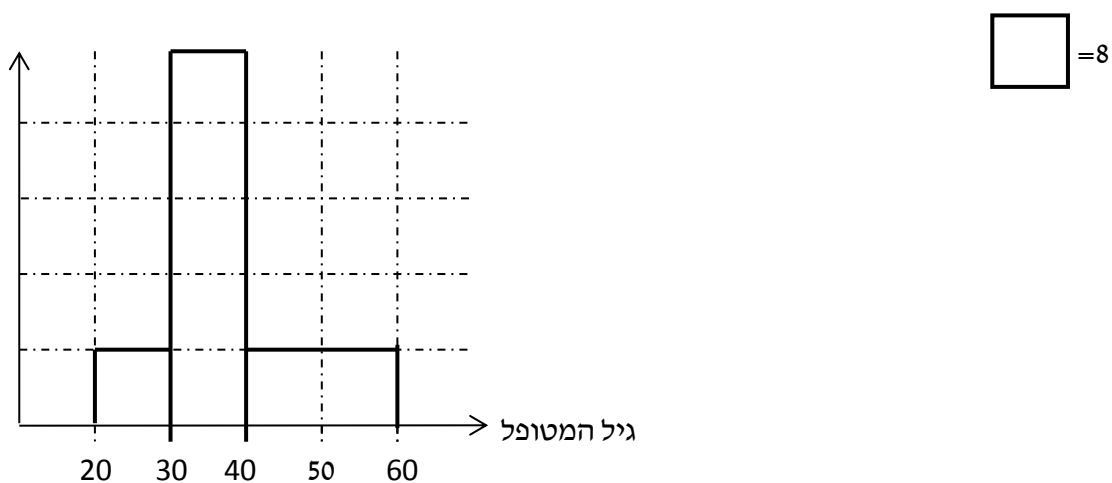


בטבלת שכיחויות במחלקות: אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר. התפלגות הציונים בכיתה.

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה: שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:



כללי: יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד. השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

MIDRANGE – (טווח)

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר.

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

MEDIAN - החציון

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו. ברשימה: נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$

אם יש מספר זוגי של איברים החציון יהיה הממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$ והאיבר ה- $\frac{n}{2} + 1$

כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$

ושיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

בטבלת שכיחויות בדידה: נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות: נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

בטבלת שכיחויות במחלקות:

שלב א: נימצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה: החציון הוא הערך על ציר ה-X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי: החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע

הנו מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

בטבלת שכיחויות: $\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$

במחלקות: נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה X. הממוצע הזה יהיה

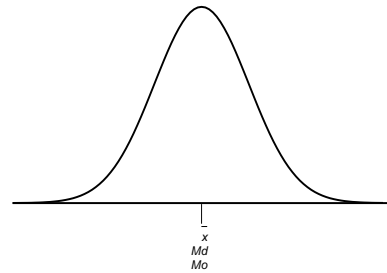
ממוצע מקורב.

כללי: הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

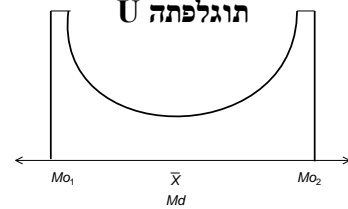
בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

התפלגות סימטרית



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

תוגלפתה U

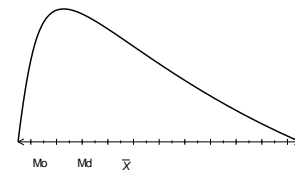


בהתפלגות אסימטרית

התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא :
- 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6
- חשב את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.
2. בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8 לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים : 5, 4, 3, 4 .
- א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
- ב. מהו השכיח ומהו החציון?
3. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים :

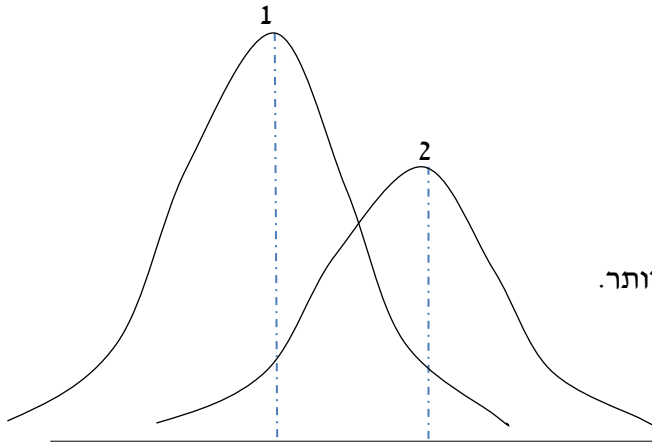
מספר מקלטים	מספר משפחות
0	22
1	28
2	18
3	22
4	10

- א. חשב את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
- ב. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.
4. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. כמה משפחות יש בישוב?
- ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
- ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.
- הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

5. מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחר בתשובה הנכונה:



א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6. ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם, כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה) הסבירו ללא חישוב.

7. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג :

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

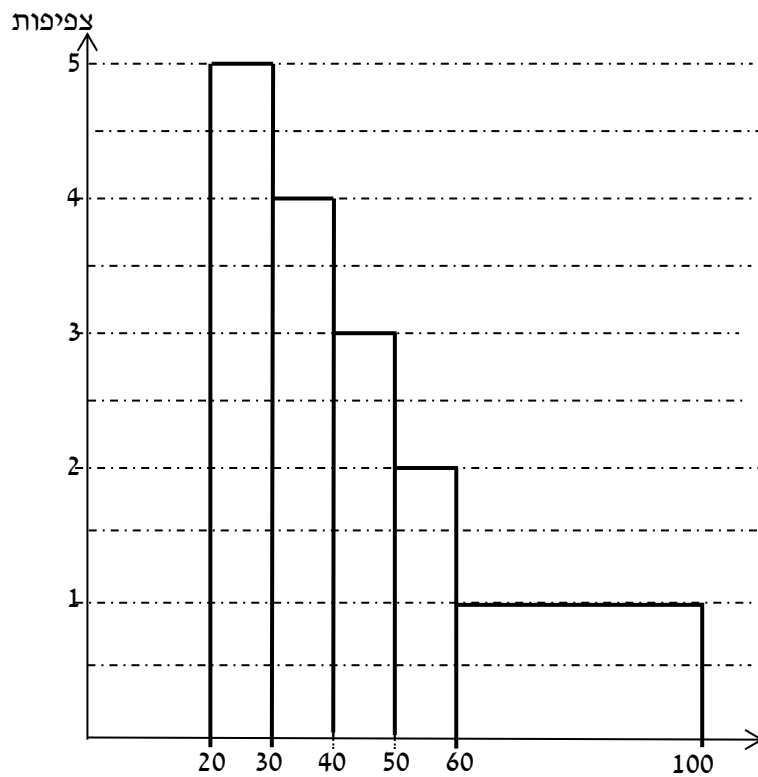
מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

8. להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.

שכיחות	גובה בס"מ
30	150-160
40	160-170
60	170-175
70	175-180
40	180-190

חשב את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

9. בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



- א. מצא את השכיח בהתפלגות.
 ב. מצא את החציון בהתפלגות.
 ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.
 ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החציון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

פתרונות:**שאלה 1:**

החציון : 7

השכיח : 6

הממוצע : 6.9

שאלה 2:

א. 3

ב. שכיח : 3,4 חציון : 4

שאלה 3:

א. הממוצע : 1.7

החציון : 1.5

השכיח : 1

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

שאלה 4:

א. 630

ב. 34.13%

ג. שכיח וחציון : 3

ממוצע : 2.952

שאלה 5:

תשובה : ב

שאלה 6:

ב חציון : 2 שכיח : 2 אמצע טווח : 1.5

שאלה 7:

חציון וממוצע : 55

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן

רקע:

המטרה : למדוד את הפיזור של הנתונים כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווחותחום RANGE:

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר : $R = X_{\max} - X_{\min}$

שונות וסטיית תקן:

השונות היא ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים :}$$

דוגמה : נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה : 5,4,9

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות :}$$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44

הציון X-	השכיחות-f	x ² · f	
5	2	50	
6	4	144	
7	8	392	
8	5	320	
9	4	324	
10	2	200	
		סה"כ	1430

$$s_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$s = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6
 חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

3. בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני

עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4. נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע:

2, 3, 2, 1. - חשב את השונות של חמש התצפיות.

5. בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

פרופורציה	מספר חדרים
0.1	1
0.2	2
0.4	3
0.15	4
	5

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

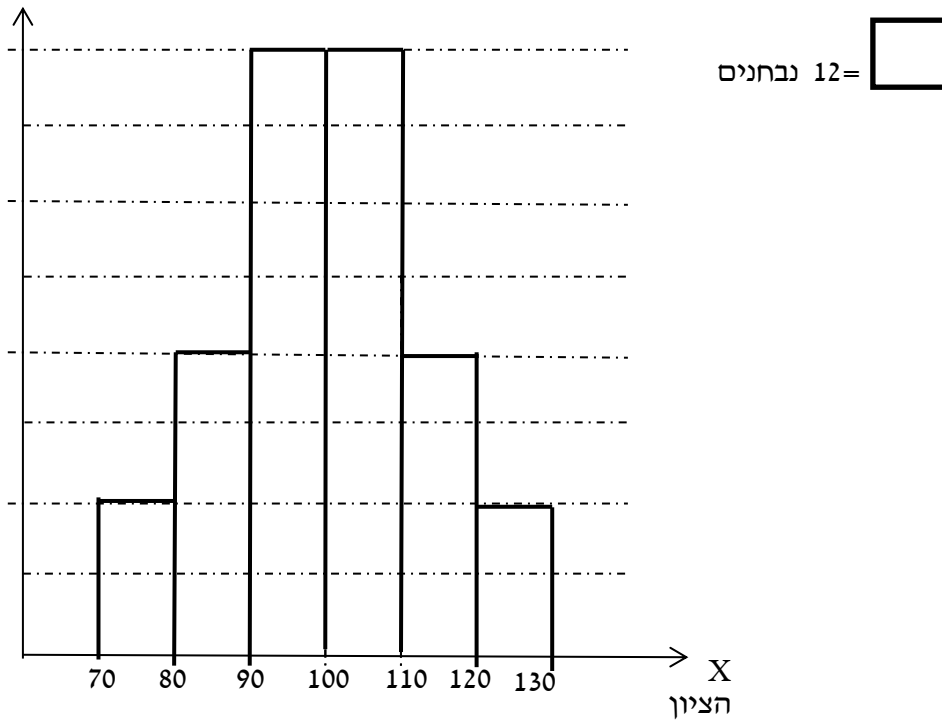
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

7. להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



- א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?
- ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.
- ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו-100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

פתרונות :**שאלה 1:**

השונות : 2.19

סטיית תקן : 1.48

טווח : 6

שאלה 2:

א. סטיית תקן: 1.106

ב. טווח 4

שאלה 3:

א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

שאלה 4:

10.8

שאלה 5:

א. 3.05

ב. 1.16

שאלה 6:

7.73

שאלה 7 :

א. 100

ב. 12.96

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין-רבעוני

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלב ב: במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

F	f מספר עובדים (שכחות)	$L_1 - L_0$ רוחב	מספר שנות ותק
56	56	4	0.5 – 4.5
106	50	5	4.5 – 9.5
154	48	2	9.5 – 11.5
190	36	3	11.5 – 14.5
200	10	5	14.5 – 19.5

שלב א: נימצא את הרבעון התחתון (האחוזון ה-25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$

מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0) \quad ; \quad Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

שלב ב: נחסר את הרבעונים:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

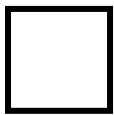
תרגילים:

1. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

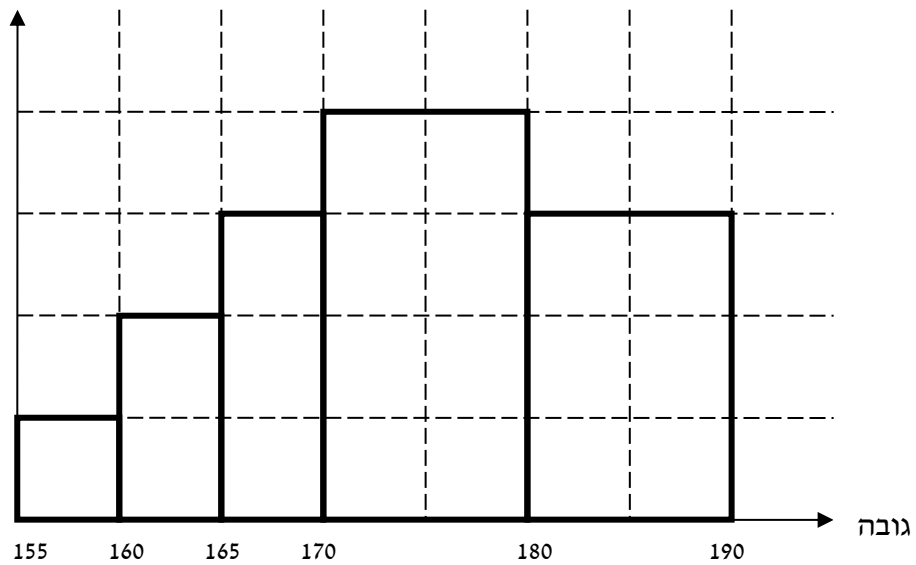
מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

מצא את הטווח הבין-רבעוני.

2. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



אנשים = 5



מצא

את הטווח

הבין-

רבעוני.

פתרונות:

שאלה 1:

13.75

שאלה 2:

13.33

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמות יחסית לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} : \text{הנוסחה לציון תקן של תצפית היא}$$

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע.

כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע.

ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.

ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.

ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במקום עבודה מסוים ממוצע המשכורות 8 אלפי ₪ עם סטית תקן של 2 אלפי ₪ באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערך יותר באופן יחסי משכיל או משתכר ?

תרגילים

1. תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו :

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

- עודד קיבל : 68 בלשון ו70 במתמטיקה.
א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים :

מספר פועלים	תפוקה	
15	48	ממוצע
2	10	סטיית תקן

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
בחר בתשובה הנכונה.
א. התפוקה.
ב. כמות הפועלים.
ג. חריגים באותה מידה.
ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3. הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן 10 סנטימטר. המשקל הממוצע 66 ק"ג עם סטיית תקן 8 ק"ג. ערך התגייס, גובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים- גובהו או משקלו?
ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

פתרונות:

שאלה 1:

א. לשון

ב. 72

שאלה 2:

תשובה ב

שאלה 3:

א. משקל

ב. 70

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים
במחלקות

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש $p\%$

מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון : ערך ש- רבע מהתצפיות קטנות

ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן : $X_{0.25}$

מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נימצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה $\frac{np}{100}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה : $x_p = L_0 + \frac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם רוצים לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה :

$$P_x = \left[\frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)
להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת :

שכר בש"ח	f(x)
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

תרגילים:

1. להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

שכר X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

א. חשבו את המאון ה-60.

ב. מהו העשירון העליון?

ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?

ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7000 ₪?

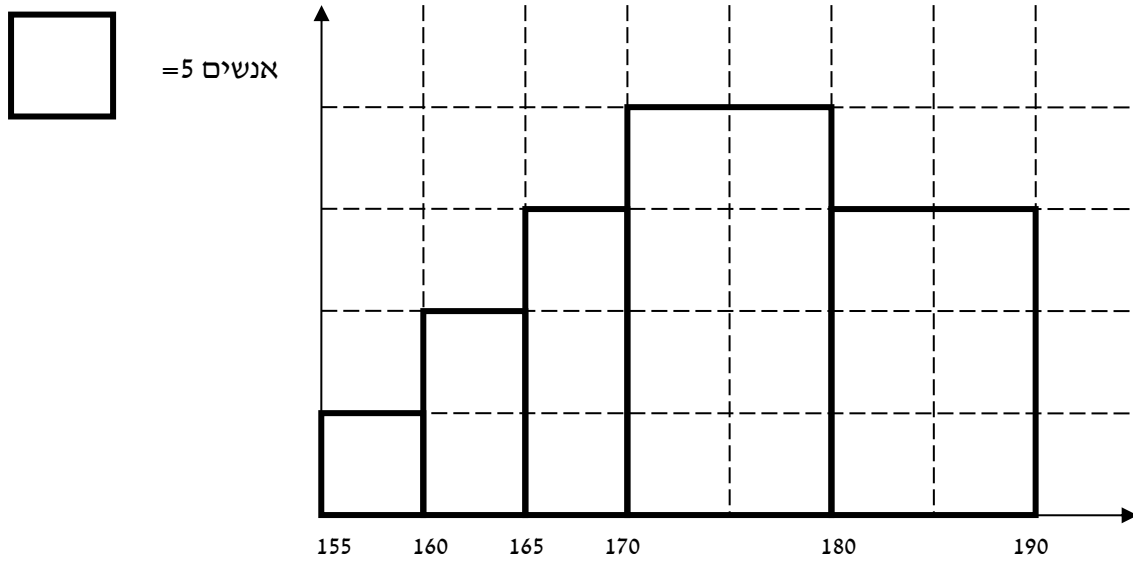
ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?

ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7000 ל-25,000 ₪?

2. למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחות החסרות.

ציון - X	$f(X)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

3. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- א. העשירון
התחתון.
ב. האחוזון ה-
.30
ג. הגובה ש-20%

מהתצפית גדולות ממנו.

- ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.
ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.
ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

פתרונות:**שאלה 1:**

א. 13.23

ב. 22

ג. 17.2

ד. 8.82%

ה. 7.36%

ו. 83.82%

שאלה 3:

א. 162.5

ב. 170

ג. 183.33

ד. 3%

ה. 15%

ו. 55%

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים
בטבלת שכיחויות בדידה

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו כולל יש % p מהנתונים.

מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה :

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בסניף בנק 250 לקוחות . ספרו לכל לקוח את מספר תכניות החיסכון שלו :

# תכניות החיסכון	$f(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

מצא את האחוזון ה-25.

מצא את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

תרגילים:

1. להלן התפלגות של משתנה כלשהו.

$f(x)$	X
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצא להתפלגות את:

האחוזון ה-60.

המאון ה-40.

העשירון העליון.

הטווח בין הרבעונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. רבעון עליון.

פתרונות:**שאלה 2**

א. 1

ב. 2

ג. 4

ד. 4

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - מקדם ההשתנות

רקע:

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל). על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע

הנתונים נחשב את **מקדם ההשתנות - Coefficient of Variation** :

$$CV = \frac{S(X)}{\bar{X}}$$

ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע וככל שמקדם ההשתנות גבוהה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.

תרגילים:

1. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה יי בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

2. נתונות שתי קבוצות:

הממוצע בקבוצה א 100 והשונות 100.

הממוצע בקבוצה ב 500 והשונות 400.

באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

3. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים

במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

ממוצע	תפוקה	מספר פועלים
48	15	
10	2	

לפי קריטריון CV. בחר את התשובה הנכונה.

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.

ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.

ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

פתרונות:

שאלה 2:

קבוצה 2

שאלה 1:

ב. כתה ב

שאלה 3:

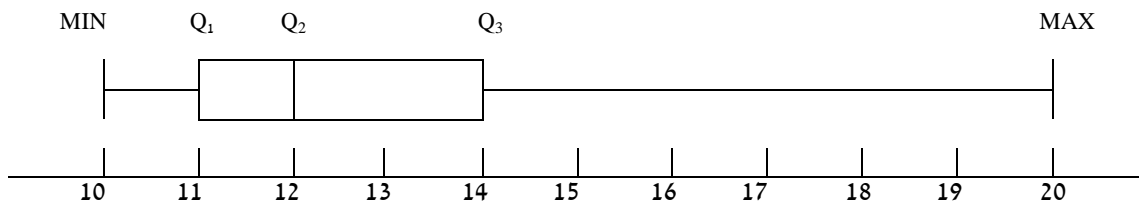
תשובה ב

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - תרשים קופסא - boxplot

רקע:

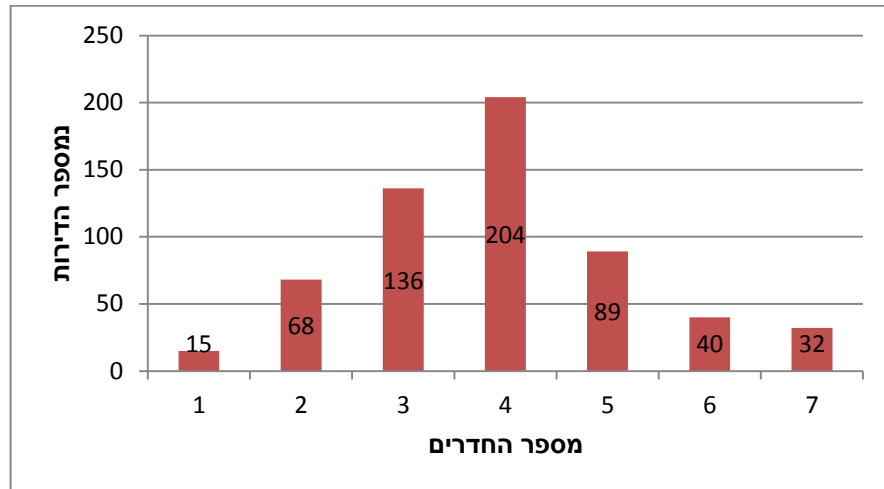
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון:

1. את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2)
2. את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני)
3. את צורת ההתפלגות (סימטרית ואסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית)



תרגילים:

1. להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד.

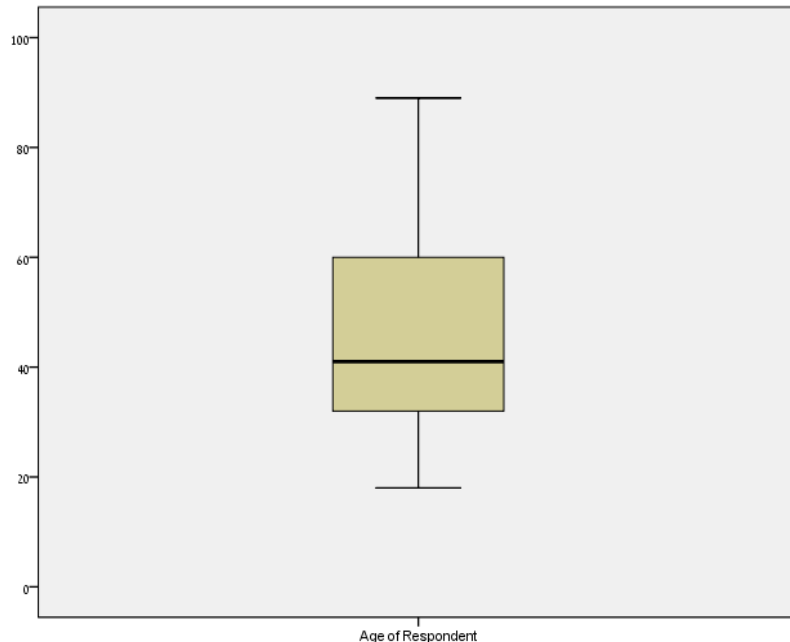


א. מצא את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.

ב. שרטט דיאגרמת קופסא להתפלגות.

ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2. להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל בשנים באוכלוסייה מסוימת:



א. מהו בערך הגיל החציוני באותה אוכלוסייה?

ב. מה בערך טווח הגילאים?

ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

פתרונות:**שאלה 2:**

- א. חציון : 40
- ב. טווח : 70
- ג. התפלגות אסימטרית ימנית

שאלה 1:

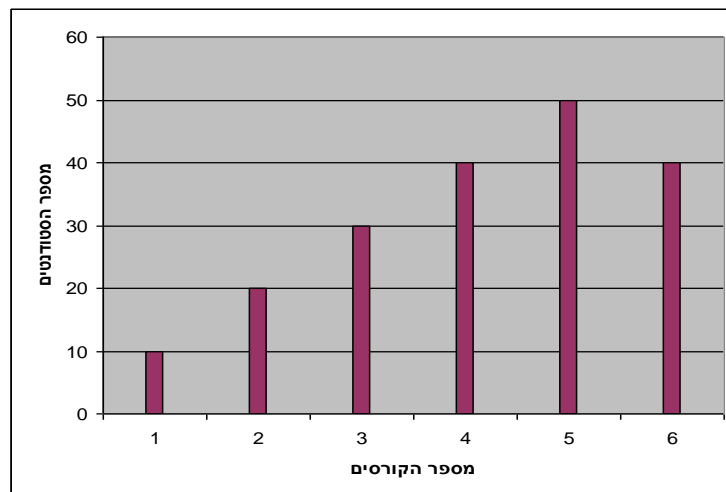
- א. חציון : 4
- רבעון תחתון : 3
- רבעון עליון : 5
- ג. כמעט סימטרית

פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

1. בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם :

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

- א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. מהו המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?
 ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?
 ד. לאותם תלמידים חישובו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3 שגובהו 162 יותר חריג במשקל או בגובה?
 ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן? (יגדיל יקטין או לא ישנה)
2. בפקולטה להנדסה אספה מזכירות הסטודנטים נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008.
 להלן התוצאות שהתקבלו :



- א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. מהי צורת ההתפלגות?
 ג. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות.
 ד. חשב את השכיח, החציון והטווח .

3. להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'. השתתפו במחקר 150 תלמידים.

$$\text{ממוצע הציונים שהתקבל: } \bar{X} = 7\frac{1}{15}$$

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- א. השלם את השכיחויות החסרות בטבלה.
 ב. חשב את הציון החציוני, השכיח.
 ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 – שביעות רצון נמוכה ועד 5 שביעות רצון גבוהה) להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
- ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
- ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
- i. היסטוגרמה.
- ii. דיאגרמת מקלות.
- iii. דיאגרמת עוגה.
- ד. חשבו את המדדים הבאים:
1. טווח
2. שכיח
3. חציון

5. להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים בחברת "סטאר".
בחברה 200 עובדים.

שכיחות	שכיחות יחסית (פרופורציה)	מספר שעות עבודה
	15%	10-20
	20%	20-30
	30%	30-40
	20%	40-50
		50-60

- א. השלם את הטבלה.
- ב. חשב את החציון, השכיח, והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
- ג. מהי סטיית התקן של מס' שעות העבודה?
- ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
- ו. מה ציון התקן של רינה שעובדת 30 שעות בשבוע?
- ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבר.

6. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	מספר המסרונים
40	0-50
60	50-100
50	100-150
30	150-250
20	250-ומעלה

- א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?
 ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?
 ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשלמים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?
 ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן חשב:
1. ממוצע
 2. שכיח
 3. חציון
 4. שונות

7. נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

- א. שרטט היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.
 ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א מהי צורת ההתפלגות?
 ג. חשב את השכיח והחציון של ההתפלגות.
 ד. הסבר, ללא חישובים, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8. התפלגות ציוני מבחן אינטיליגנציה היא סימטרית .

מספר הנבחנים	הציון
	50-70
	70-90
	90-100
	100-110
	110-130
	130-150

נתון שהעשירון העליון הוא 130 והרבעון התחתון הוא 90.

נתון שלמבחן נגשו 500 מועמדים.

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש 40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. אם יוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות . כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

9. להלן מספר טענות , עבור כל טענה ציין אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו .

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

פתרונות:**שאלה 1:**

- א. המשתנה הנחקר כאן הוא משקל תלמיד בק"ג והוא משתנה כמותי רציף.
ב.

$$\bar{X} = 52$$

$$Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$$

השכיח הוא 58

$$R = 28 \quad \text{ג.}$$

$$s = 10.12$$

- ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.
ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן .

שאלה 2:

- א. מספר הקורסים. בדיד.
ב. התפלגות אסימטרית שמאלית
ד. השכיח : 5
הטווח : 5

שאלה 3:

- א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40
תלמידים קיבלו ציון 8.
החציון : 7
השכיח : 8
ג. השונות : 2.533
סטיית התקן : 1.592

שאלה 4:

- א. 20%
ב. שביעות רצון (סדר)
ג. 2
ד. טווח : 4 שכיח : 2 חציון : 2.5
ה. חציון : 4

שאלה 5:

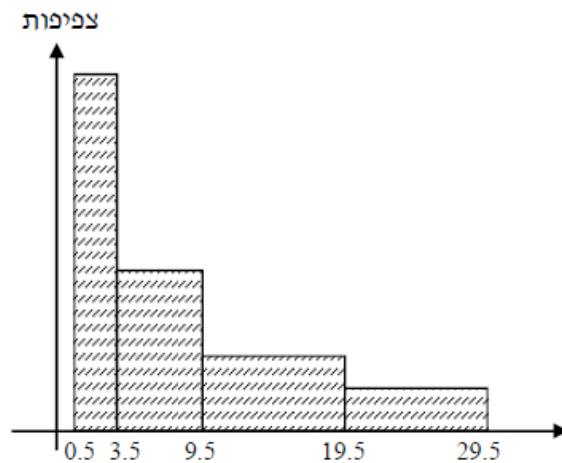
- ב. החציון : 35
 השכיח : 35
 הממוצע : 35
 ג. סטיית תקן : 12.65
 ד. 53.333
 ה. 25%
 ו. -0.395
 ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל סטיית התקן תקטן.

שאלה 6:

- א. 38%
 ב. 40%
 ג. 150
 ד. החציון : 100

שאלה 7:

א.



ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית .

ג. שכיח : 2 חציון : 6.83

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים $Mo < Md < \bar{X} < MR$

שאלה 8:

א.

מספר הנבחנים	ציון
50	50-70
75	70-90
125	90-100
125	100-110
75	110-130
50	130-150

ב. 100

ג. 104

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות אך סטיית התקן לא תשתנה .

שאלה 9:

א. נכון

ב. לא נכון

ג. לא נכון

ד. לא נכון

ה. לא נכון

ו. נכון

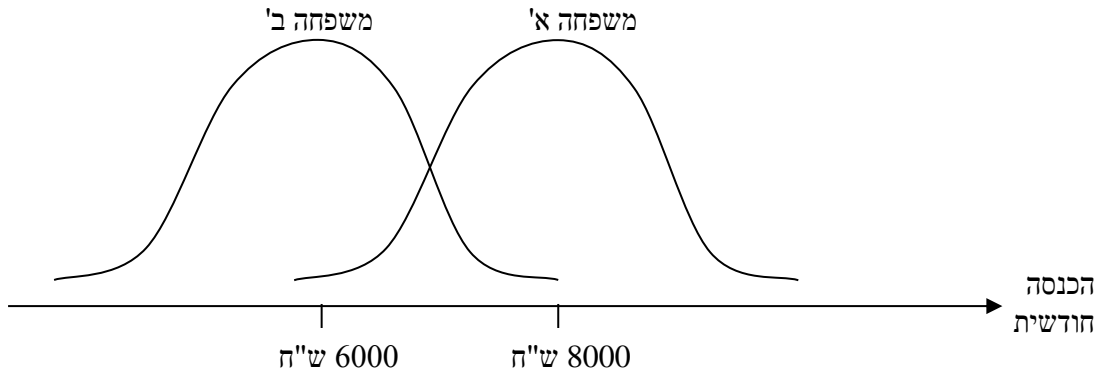
ז. לא נכון

ח. לא נכון

פרק 14 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות אמריקאיות

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



שאלה 1

לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?

א. משפחה א'

ב. משפחה ב'

ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה

ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

שאלה 2

באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?

א. משפחה א'

ב. משפחה ב'

ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת

ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

שאלה 3

באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?

א. משפחה א'

ב. משפחה ב'

ג. לשתיהן אותה סטית תקן

ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:

$f(x)$	x
?	0
10	1
6	2
15	3
?	4
50	סה"כ

1.66 כמו כן נתון הממוצע הוא

שאלה 4

השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0
- ב. 15
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

שאלה 5

חציון הנתונים הוא:

- א. 2
- ב. 1.5
- ג. 25.5
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

שאלה 6

הטווח של הנתונים

- א. 11
- ב. 3
- ג. 4
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של הטווח.

שאלה 7

בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי
- ב. חיובי
- ג. אפס
- ד. לא ניתן לדעת ללא ידיעת הנתונים.

שאלה 8

סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה - 40 ושונות הסדרה - 100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה: 50 ו-30.

השונות של 12 התצפיות היא:

- א. תקטן
- ב. תגדל
- ג. לא תשתנה
- ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ש"ח וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ש"ח. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

שאלה 9

מהי המשכורת הממוצעת החדשה :

א. 2,300 .

ב. 6,900 .

ג. 4,650 .

ד. 4,600 .

ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

שאלה 10

מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר ?

א. 200

ב. 300

ג. 675

ד. לא ניתן לדעת

שאלה 11

הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

א. תגדיל את סטיית התקן.

ב. תקטין את סטיית התקן.

ג. לא תשנה את סטיית התקן.

ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-14

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה :

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

שאלה 12

התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא :

א. מיטב.

ב. צבי.

ג. לובה.

ד. שרית.

ה. סטף.

שאלה 13

פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא :

א. 80.55

ב. 65

ג. 80

ד. 81.66

שאלה 14

איזו כיתה היא ההומוגנית ביותר . הכיתה של :

א. מיטב.

ב. צבי.

ג. לובה.

ד. שרית.

ה. סטף.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-18

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד נמצא ש :

7	6	5	4	3	2	1	0	שוקולד פגום
8	10	11	13	12	48	63	35	מסי קופסאות

שאלה 15

מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא :

א. 1.

ב. 2.

ג. 4.

ד. לא ניתן לדעת

שאלה 16

מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא ?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. 4

ה. לא ניתן לדעת.

שאלה 17

מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה :

א. סדר.

ב. שמי.

ג. כמותי בדיד

ד. כמותי רציף

שאלה 18

השכיח של מספר הפגומים בקופסא :

א. 63

ב. 1

ג. 200

ד. לא ניתן לדעת.

שאלה 19

ביחס לציר המספרים רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים :

א. בערכים הגבוהים.

ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.

ג. בערכים הנמוכים.

ד. לא ניתן לדעת.

ה. אף לא תשובה מהני"ל נכונה.

שאלה 20

בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.
החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר :

א. השכיחות ב 2 החברות זהה אך שונה מ 8.

ב. השכיח ב 2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.

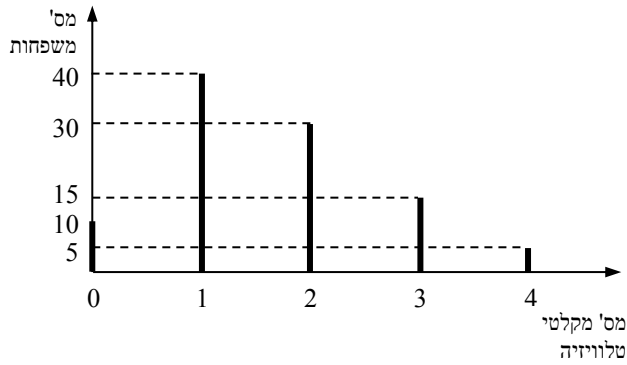
ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.

ד. שכיח בחברה אחת שונה מ 8 ובשנייה הוא 8.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 21 עד 25

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.
תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה :



שאלה 21

- המשתנה הנחקר כאן הוא :
- משתנה שמי.
 - משתנה מסולם סדר.
 - משתנה כמותי בדיד.
 - משתנה כמותי רציף.

שאלה 22

- הטווח של ההתפלגות הוא :
- 35
 - 4
 - 3
 - 2

שאלה 23

- ממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה הוא :
- 1.65
 - 1.5
 - 1
 - 2

שאלה 24

השכיח של התפלגות זו היא :

א. 40

ב. 1.5

ג. 1

ד. 2

שאלה 25

מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלוויזיה. ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?
א. יקטין אותו.

ב. יגדיל אותו.

ג. לא ישנה אותו.

ד. אין לדעת

פתרונות:

שאלה	תשובה
1	א
2	ג
3	ג
4	ג
5	ב
6	ג
7	א
8	ג
9	ב
10	ב
11	ג
12	ה
13	ד
14	ג
15	ב
16	א
17	ג
18	ב
19	ג
20	ה
21	ג
22	ב
23	א
24	ג
25	ב

פרק 15 - בעיות בסיסיות בהסתברות

רקע :

ניסוי מקרי : תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.
למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם : כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה : $\{1,2,3,4,5,6\}$.
מזג האוויר בעוד שבועיים : $\{ \text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביד} \}$

מאורע : תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות : A, B, C, \dots

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$
לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

גודל מרחב המדגם : מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה : $|\Omega| = 6$

גודל המאורע : מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה : $|A| = 2$ $|B| = 3$

מאורע משלים : מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה : $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

מרחב מדגם אחיד (סימטרי) : מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד :

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה : $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

הסתברות במרחב לא אחיד :

יחושב לפי השכיחות היחסית : $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון X
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

הסתברות למאורע משלים :

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- א. הרכב את כל המילים האפשריות.
 ב. רשום את המקרים למאורע:
 A- במילה נמצאת האות E.
 B- במילה האותיות שונות.
 ג. רשום את המקרים למאורע \bar{A} .
2. מטילים זוג קוביות.
- א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
 ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
 A- סכום התוצאות 7.
 C- מכפלת התוצאות 12.
 ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

פתרונות:**שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$

שאלה 3

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

שאלה 4

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

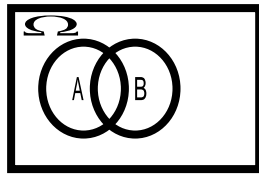
רקע:

פעולת חיתוך :

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך :

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$

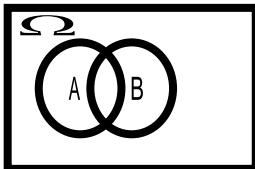
לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולת איחוד :

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא : $A \cup B$ נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

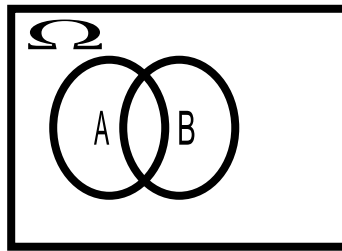
דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה)

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

- א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
 ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
 ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

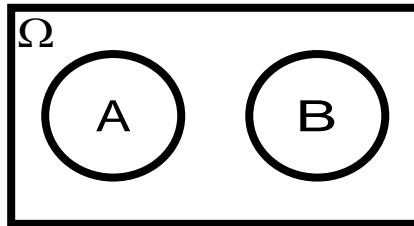
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם :

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מהמשותף: לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{\}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

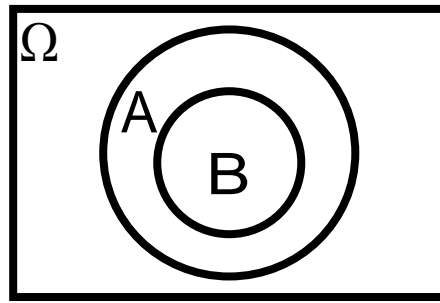
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad : \text{לקבל לפחות 5}$$

$$B = \{3\} \quad : \text{לקבל 3}$$

$$A \cap B = \{\}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים :

-E במילה נמצאת האות E.

-F במילה אותיות שונות.

א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.

ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים :

-A לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.

-B לעבור את המבחן בכלכלה.

העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים :

א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.

ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.

ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.

ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.

ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.

ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.

א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :

$$A =$$

$$B =$$

$$\bar{B} =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\bar{A} \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים :

A = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B = אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\bar{A} \cap B$

ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה. \bar{A}

6. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטיילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :

$$p(A) = 0.6 \quad p(B) = 0.3 \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$

ב. האם A ו-B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

פתרונות:**שאלה 7**

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

שאלה 8

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

שאלה 9

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

שאלה 10

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

שאלה 11

א. כן

ב. 0.3

שאלה 12

התשובה הנכונה ג

שאלה 13

א. 0.05

ב. 0.95

שאלה 14

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

פרק 17 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :
 נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.
 הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
 - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?

2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".
 ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
 - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3. במכללה שני חניונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
 - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
 - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
 - ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
 - ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
 - ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
 - ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
 - ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

פתרונות:**שאלה 1**

- א. 0.833
ב. 0.9375
ג. 0.0625
ד. 0.5
ה. 0.789

שאלה 2

- א. 5%
ב. 0.0833
ג. 0.786
ד. 0.6875

שאלה 3

- א. 0.4
ב. $\frac{2}{3}$
ג. 0.25
ד. $\frac{6}{7}$

פרק 18 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

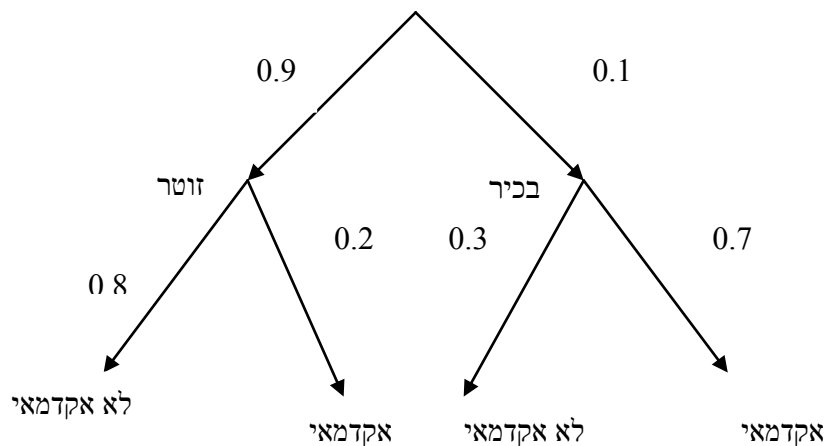
רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1*0.7+0.9*0.2=0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו, A_1, \dots, A_n חלוקה ממצה של Ω .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad \text{אזי:}$$

נוסחת בייס

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת, אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
 - א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
 - ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?

2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
 - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
 - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
 - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי:
 - 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
 - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
 - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
 - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש-68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא

נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

פתרונות:**שאלה 1**א. $2/7$ ב. $23/49$ **שאלה 2**

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

פרק 19 - תלות ואי תלות בין מאורעות

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = p(B)$ נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = p(A)$ כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים. למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18$$

באופן דומה:

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות A_1, \dots, A_n הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

תרגילים:

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

פתרונות :**שאלה 1**

בן

שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

פרק 20 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
 - א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
 - ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
 - ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
 - ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
 - א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
 - ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
 - ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
 - ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:
 - בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
 - בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
 - בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
 - א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
 - ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?
 - ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?
 - ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
 ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
 ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
 ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
 ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
 ג. נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - נבחר אדם מובטל
 B - נבחר גבר
 האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

פתרונות:**שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

שאלה 3

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

שאלה 4

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

שאלה 5

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

פרק 21 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

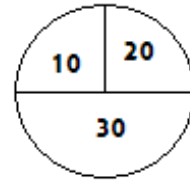
רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.
בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד (פתרון בהקלטה).

תרגילים:

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא :
- 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
 70 משפחות עם מכונית אחת.
 60 משפחות עם 2 מכוניות.
 20 משפחות עם 3 מכוניות .
- בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.
- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
2. מהאותיות C, B, A יוצרים קוד דו תווי.
- א. כמה קודים ניתן ליצור?
 ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
 ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של X .
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של X .
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של X .
5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

פתרונות**שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

שאלה 4

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

שאלה 5

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

פרק 22 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

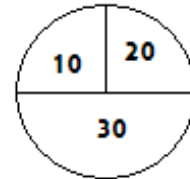
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

שונות – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

סטיית תקן – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

תרגילים:

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של X :

X	-30	0	20	40
$p(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון. חשב את $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשבו את התוחלת וסטית תקן של X .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	x
0.2		0.3		P(x)

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

פתרונות:**שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

שאלה 3

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

שאלה 4

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב . תוחלת : 3

שונות 2

שאלה 5

א.

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב . 5.16

פרק 23 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
 ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון" כמו: מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad ; \quad 0! = 1 \quad \text{כאשר}$$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות}$$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
- (3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

תרגילים:

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה.
נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
א. מהי ההתפלגות של X ?
ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.
א. מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?
4. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

פתרונות :**שאלה 4:**

- א. 0.401
ב. תוחלת : 8.025
סטיית תקן : 2.193

שאלה 2:

- ב. 0.2335
ג. 0.1493
ד. תוחלת : 7
סטיית תקן : 1.449

שאלה 3:

- א. 0.1789
ב. 2

פרק 24 - ההתפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן. λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה בממוצע אירועים קורים ביחידת זמן.

$$X \sim \text{pois}(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרפורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

תרגילים:

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4. לחנות AMPM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
 - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
 - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
 - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

פתרונות :**שאלה 1:**

א. 0.0337

ב. 0.9933

ג. 0.1246

ד. 5

שאלה 2:

א. 0.084

ב. 0.099

ג. 0.151

שאלה 3:

א. 4

ב. 0.407

שאלה 5:

א. 0.0139

ב. 0.2196

ג. 0.6948

פרק 25 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות היפרגאומטרית

רקע:

נתונה אוכלוסייה המכילה N פריטים, מתוכה D פריטים בעלי תכונה מסוימת- פריטים אלה נקראים "מיוחדים".

בוחרים מאותה אוכלוסייה n פריטים ללא החזרה.

X – מוגדר להיות מספר הפריטים ה"המיוחדים" שנדגמו.

משתנה מקרי היפרגאומטרי עם הפרמטרים (N, D, n) יסומן על ידי: $X \sim H(N, D, n)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות:

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

התוחלת של ההתפלגות:

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N}$$

השונות של ההתפלגות:

$$V(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

בכתה 40 תלמידים מתוכם 10 בנות והשאר בנים. בוחרים קבוצה של ארבעה תלמידים שיסעו למשלחת.

א. כיצד מספר הבנים במשלחת מתפלג?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הבנים במשלחת?

ג. מה הסיכוי שבמשלחת יהיו 3 בנים?

תרגילים:

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצא בטבלה.
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
 ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?
2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחה ולא בטבלה.
 ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X ?
 ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X = 2 | X > 1)$
3. זהה בסעיפים הבאים את ההתפלגות וחשב לכל התפלגות את התוחלת והשונות:
 נדגמו 6 אנשים מתוך אוכלוסייה שבה 60% בעלי רישיון נהיגה.
 אנו מתעניינים במספר האנשים שנדגמו עם רישיון נהיגה.
 א. האוכלוסייה גדולה מאד.
 ב. האוכלוסייה בת 10 אנשים.
4. בארגון עובדים 7 מהנדסים, 3 טכנאים ו- 5 הנדסאים. בוחרים באופן מקרי משלחת של 4 עובדים לכנס במדריד.
 א. מהי ההסתברות שייבחרו רק מהנדסים?
 ב. מה תוחלת מספר הטכנאים שייבחרו?

פתרונות:**שאלה 2**

- ב. תוחלת: 1.5
 סטיית תקן: 0.748
 ג. 0.9

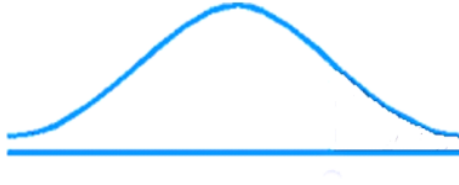
שאלה 1

- ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{5}{9}$
 ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{20}{27}$

פרק 26 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות Z .

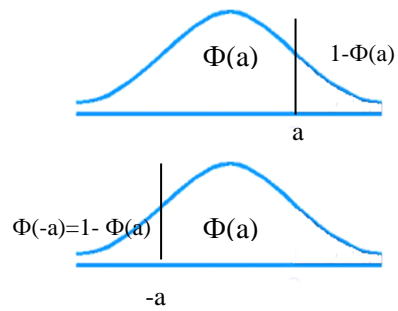
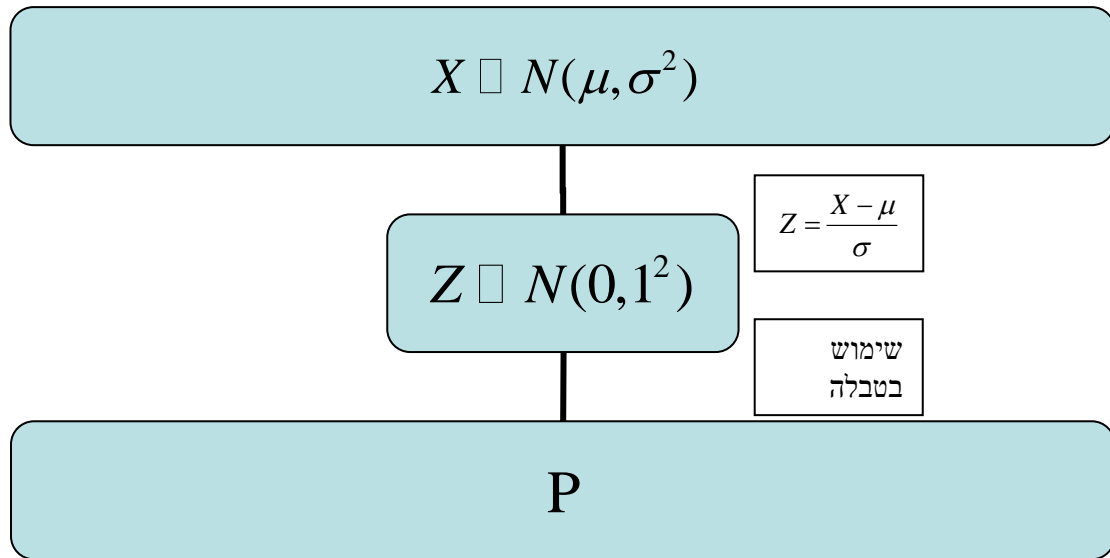
$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

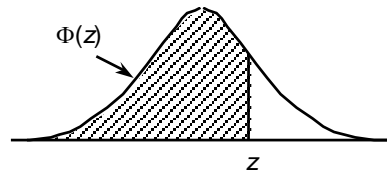
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע. לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל 92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושוונות של 9 דקות רבועות .

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג .

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל – 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה- 20?
 - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בבקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
 - מהו המאון העליון של אורך חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



- א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?
 א. בעשירון העליון.
 ב. בממוצע.
 ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

- א. 1
 ב. 2
 ג. 3
 ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
 ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
 ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?
 ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 1</u>
א. 26.43%	א. 89.25%
ב. 89.44%	ב. 2.28%
ג. 39.44%	ג. 0
ד. 0.383	ד. 50%
ה. 100%	

<u>שאלה 7</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 500	א. 119.2
ב. 100	ב. 80.8
ג. 0.3446	ג. 112.6
ד. 733	ד. 87.4
ה. 267	

<u>שאלה 9</u>	<u>שאלה 8</u>
א. 0.1587	א. 3
ב. 0.0228	ב. בממוצע.
ג. 0.8563	ג. 1
ד. 0.3975	

<u>שאלה 11</u>	<u>שאלה 10</u>
א. 0.1359	א. 1925
ב. 0.675	ב. 0.2266
ג. 100	ג. 0.1587
ד. 0.25	

פרק 27 - קרוב הנורמלי להתפלגות הבינומית

רקע:

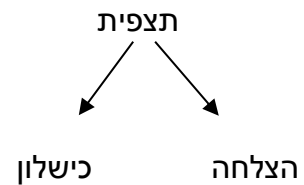
תזכורת על התפלגות בינומית

בפרק זה נדון על התפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו).

מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y .

מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.

כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים).



הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר $q = 1 - p$.

מבצעים מדגם אקראי בגודל n .

$$Y \sim B(n, p)$$

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$E(y) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(y) = npq \quad \text{שונות}$$

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית

אם לפנינו התפלגות בינומית : $Y \sim B(n, p)$ ומתקיים ש :

$$1. n \cdot p \geq 5$$

$$2. n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז : } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות .
הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה.
על פי הכללים הבאים :

$$1. p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. n \cdot p \geq 5$$

$$2. n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. n \cdot p \geq 10$$

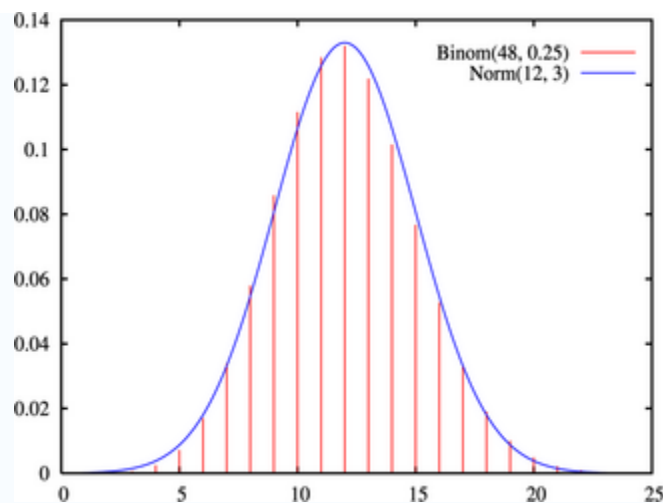
$$2. n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שפשוט התנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) אני בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

- מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
- מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



תרגילים:

1. נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?

2. במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?

3. ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלנו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

4. מטילים מטבע 50 פעמים.
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

5. במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
 - א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 - ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?

6. מפעל לייצור ארטיקים טוען ש הסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

7. מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?

פתרונות:**שאלה 1**

א. 0.201

ב. 0.3758

ג. התוחלת : 2, סטיית התקן : 1.2649

שאלה 2

א. 0.9332

ב. 0.6915

שאלה 3

0.1611

שאלה 4

א. 0.9406

שאלה 5

א. 0.015

שאלה 6

0.9996

שאלה 7

0.8643