



סמסטר ב' מועד ב' תשע"ו

תאריך: 26.7.2016

שעה: 9:00

משך הבחינה: שלוש שעות וחצי

אסור שימוש בכל חומר עזר

## בחינה בקורס "מבוא ללוגיקה ולתורת הקבוצות"

מרצים: ד"ר רועי וגנר

ד"ר רומינה זיגדון

ד"ר כרמית בנבנישתי שפילקה

- במבחן 16 עמודים כולל עמוד זה.
- במבחן ארבע שאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 25 נקודות. עליכם להשיב על כולן.
- את התשובה לכל שאלה יש לכתוב מתחתיה בטופס המבחן במקום שיועד לכך.
- כל טיעון המובא על ידיכם חייב להיות מנומק באופן מלא ע"פ ההגדרות הרלוונטיות.
- המחברת לטיוטה בלבד ולא תיבדק.

1. נגדיר יחס שקילות  $S$  על  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (זוגות סדורים של ממשיים) באופן הבא:  
 $(a, b)S(c, d) \Leftrightarrow ([a + 1] = [c + 1]) \wedge ([b + 1] = [d + 1])$   
 (הסימן  $[x]$  מסמן את הערך השלם של  $x$ , כלומר המספר השלם הקרוב ביותר ל- $x$  שקטן או שווה לו.)
- א. (13 נקודות) כתבו את קבוצת המנה של  $S$  מעל  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ללא חזרות. (כלומר בתיאור הפורמלי של הקבוצה כל קבוצה ששייכת לקבוצת המנה תופיע בדיוק פעם אחת.)
- ב. (12 נקודות) הוכיחו שהעוצמה של קבוצת המנה של  $S$  מעל  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  היא  $\aleph_0$ .

2. תהינה  $f, g: A \rightarrow A$  פונקציות המקיימות שלכל  $\emptyset \neq B$  המוכלת ממש ב- $A$ ,  $f(B), g(B)$  אינן מוכלות ב- $B$ .

$$\text{כאשר } f(B) = \{f(b) | b \in B\}$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. (10 נקודות) אם ב- $A$  לפחות שני אברים אז לכל  $a \in A$  מתקיים  $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ .

- ב. (15 נקודות) לכל  $\emptyset \neq B$  המוכלת ב- $A$  מתקיים  $f \circ g(B)$  אינה מוכלת ב- $B$ .

3. א. (12 נקודות) הצרינו את הטענה אין מספר ממשי שלכל היותר מספר ממשי אחד גדול ממנו.

ניתן להשתמש בסימונים הבאים:

סימני משתנים:  $x, y, z$ .

סימן קבוצה:  $\mathbb{R}$ .

סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים:  $\forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, >, <, \neq, =, \epsilon$ .

לא ניתן להשתמש בקשר השלילה.

- ב. (13 נקודות) הוכיחו עבור קבוצות  $A, B$ :

$$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \text{ אם ורק אם } A \subseteq B \text{ או } B \subseteq A$$

4. א. (13 נקודות) יהי  $R$  יחס סימטרי, טרנזיטיבי ושאינו רפלקסיבי על קבוצה  $A$ .

הוכיחו: קיים  $x \in A$  המקיים  $\forall y \in A (\neg(xRy))$ .

- ב. (12 נקודות) נמונות קבוצות  $A, B$  כך ש- $A \setminus B \sim B \setminus A$  הוכיחו  $A \sim B$ .