<u>מבוא לאקונומטריקה</u>

<u>החוג לכלכלה</u>

תוכן

<u>הקדמה: תזכורת של סטטיסטיקה ומתמטיקה</u>

<u>הגדרות וסימונים</u>

יש להבחין בין שני סוגים של <u>משתנים</u>: משתנים אמפיריים ("רגילים") לעומת משתנים מקריים.

<u>משתנה אמפירי</u> - משתנה שתוצאותיו ידועות מראש (כמו למשל המשתנה רמת הכנסה, גיל, מס' שנות לימוד במדגם מסוים).

<u>משתנה מקרי</u> - משתנה שתוצאותיו לא ידועות מראש (כגון תוצאה בהטלת קוביה או בהטלת מטבע)

שני סוגי המשתנים יסומנו באות לועזית עם אינדקס (כמו למשל Y_t או X_t)

בנוסף לכך ישנם גם <u>קבועים</u>- המקבלים ערך קבוע ומסומנים באות לועזית ללא אינדקס (כמו למשל a או b)

באקונומטריקה נעסוק בעיקר במשתנים מקריים.

לכל משתנה מקרי X_t יש <u>תוחלת</u> המייצגת את מרכז ההתפלגות.

התוחלת מסומנת μ_X או $E(X)$.

<u>השונות</u> מייצגת את מידת הפיזור של ההתפלגות.

השונות מסומנת σ_X^2 או $V(X)$.

<u>סטית התקן</u> היא השורש של השונות והיא מסומנת σ_X.

לשני משתנים מקריים X ו- Y יש <u>שונות משותפת</u> (covariance) המהווה מדד להתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים ומייצגת את הכיוון של הקשר ביניהם (יחס ישר או יחס הפוך).

השונות המשותפת מסומנת cov (x,y)

כאשר:

$Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow$ Y,X בלתי מתואמים

$Cov(X,Y)>0 \Leftrightarrow$ מתאם חיובי בין המשתנים

$Cov(X,Y)<0 \Leftrightarrow$ מתאם שלילי בין המשתנים

X,Y בלתי תלויים $\Rightarrow$ X,Y בלתי מתואמים

<u>מקדם מתאם של פירסון</u> - מדד לכיוון ועוצמת הקשר הלניארי בין שני משתנים:

מקדם המתאם מסומן η_{xy}

$$\eta_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$-1 \le \eta \le 1$$

כאשר:

$\eta = 1$ **מתאם ליניארי חיובי מלא בין שני המשתנים**

$\eta = -1$ **מתאם ליניארי שלילי מלא בין שני המשתנים**

$\eta = 0$ **לא קיים מתאם ליניארי בין שני המשתנים**

<u>אמידה</u>

<u>פרמטר</u>- ערך המשתנה הנחקר המתאר את כל האוכלוסיה

<u>סטטיסטי/אומד</u>-ערך המשתנה הנחקר המתאר את המדגם

אוכלוסיה	מדגם
$E(X) = \mu$	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$V(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2$	$S_X^2 = \frac{S_{XX}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}$
$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$	$\frac{S_{XY}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n}$

$\eta_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$	$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}}$

נוסחאות וחוקים בסטטיסטיקה

יהיו X ו-Y משתנים מקריים, ו-a, b קבועים:

חוקי הסיגמה

1) $\sum_{t=1}^{T} X_t = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_T$

2) סכום של קבוע:

$$\sum_{t=1}^{T} a = Ta$$

3) סכום של קבוע כפול משתנה =לקבוע כפול הסכום:

$$\sum_{t=1}^{T} aX_i = a\sum_{t=1}^{T} X_t$$

4) סכום של סכום/הפרש=לסכום/הפרש הסכומים:

$$\sum_{t=1}^{T} (X_t \pm Y_t) = \sum_{t=1}^{T} X_t \pm \sum_{t=1}^{T} Y_t$$

5) יש לשים לב כי:

$$\sum_{t=1}^{T} X_t^2 \neq \left(\sum_{t=1}^{T} X_t\right)^2$$

$$\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t \neq \sum_{t=1}^{T} X_t \sum_{t=1}^{T} Y_t$$

הגדרות ופיתוחים

1) סכום הסטיות מהממוצע=0:

$$\sum_{t=1}^{T} (X_t - \overline{X}) = 0$$

2) סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע (מונה השונות):

$$S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \overline{X})^2 = \sum_{t=1}^{T} X_t^2 - T\overline{X}^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \overline{X}) X_t$$

3) מונה של השונות המשותפת:

$$S_{XY}=\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})=\sum_{t=1}^{T}X_tY_t-T\overline{X}\overline{Y}=\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})Y_t=\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\overline{Y})X_t$$

חוקי התוחלת

1) **תוחלת של קבוע=קבוע:**

$$E(a)=a$$

2) **תוחלת של סכום/הפרש= לסכום/הפרש התוחלות:**

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$
$$E(\sum(X_i))=\sum E(X_i)$$

3) **תוחלת של כפל/חילוק $\neq$ לכפל/חילוק התוחלות:**

$$E(X\cdot Y)\neq E(X)\cdot E(Y)$$
$$E(\frac{X}{Y})\neq\frac{E(X)}{E(Y)}$$
$$E(X^2)\neq\left[E(X)\right]^2$$

4) **השפעת טרנספורמציה ליניארית על התוחלת:**

$$E(a/\frac{1}{a}X\pm b)=a/\frac{1}{a}\cdot E(X)\pm b$$

חוקי השונות

1) **עבור X ו-Y בלתי תלויים/בלתי מתואמים מתקיים:**

שונות של סכום/הפרש = סכום/הפרש השונויות

$$V(X\pm Y)=V(X)\pm V(Y)$$
$$V\sum(X_i)=\sum V(X_i)$$

2) **עבור X ו-Y תלויים/מתואמים מתקיים:**

שונות של סכום/הפרש $\neq$ סכום/הפרש השונויות

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2\cdot Cov(X,Y)$$

3) **שונות של קבוע=0:**

$$V(a)=0$$
$$V(a\pm x)=V(X)$$

4) **השפעת טרנספורמציה ליניארית על השונות:**

$$V\left(aX+b\right)=a^2V\left(X\right)$$

<u>הערה חשובה:</u>

חוקי התוחלת והשונות מתייחסים <u>למשתנים אמפיריים</u> כאל קבועים (יוצאים מחוץ לתוחלת או לשונות).

חוקי הסכום מתייחסים למשתנים אמפיריים כמשתנים הנשארים בתוך הסיגמא (רק הקבועים ייצאו מחוץ לסיגמא).

חוקי השונות המשותפת

1) **שונות משותפת בין משתנה לקבוע =0:**

$$\operatorname{cov}(X,a)=0$$

2) **שונות משותפת של משתנים המוכפלים בקבוע:**

$$\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$$

3) **שונות משותפת של משתנה עם עצמו=שונות המשתנה:**

$$\operatorname{cov}(X,X)=V(X)$$
$$\operatorname{cov}(Y,Y)=V(Y)$$

פרק 1 - מה זו אקונומטריקה?

אקונומטריקה היא שיטת מחקר שבאמצעותה אנחנו מוצאים קשר בין משתנים.
למשל, אם נדע את הקשר בין שער הריבית לבין שער הדולר, נוכל לדעת איך שער הריבית משפיע על שער הדולר, ונוכל להשתמש בזה לתחזיות כלכליות.

במציאות קיימים חוקים הקושרים בין משתנים. חוקים אלה אינם ידועים לנו, אבל אנו יכולים לראות התוצאות שנובעות מהחוקים האלה. אנו משתמשים בתוצאות אלו כדי לשחזר את החוקים. השיחזור נקרא רגרסיה.

נתחיל בדוגמא:
מתווך דירות בתל אביב רצה לבדוק איך משפיע גודלה של דירה על המחיר שבו היא נמכרת.
הוא הניח 2 הנחות מקדימות:
1) רק גודל הדירה משפיע על מחיר הדירה באופן שיטתי. כל שאר הדברים המשפיעים על מחיר הדירה הם אקראיים ולא ניתנים לחיזוי.
2) ההשפעה של גודל הדירה על מחיר הדירה היא לינארית.

שתי ההנחות האלה מאפיינות את הקשר. אם נסמן את גודל הדירה ב- X ואת מחיר הדירה ב- Y, נוכל לכתוב באופן מתמטי כי $Y = \alpha + \beta X + u$. זהו המודל של המתווך. ההנחות של המתווך נקראות הספציפיקציה של המודל. X ו- Y הם המשתנים של המודל. Y הוא המשתנה המוסבר של המודל. X הוא המשתנה המסביר של המודל (יכול להיות יותר ממשתנה מסביר אחד). α ו- β הם הפרמטרים של המודל. α נקרא חותך . β, או כל מקדם אחר של משתנה מסביר, נקרא שיפוע. u מכונה ההפרעה האקראית (לעיתים מכונה בבדיחות הדעת קריזה).

מודל: $$Y = \alpha + \beta X + u$$

הפרעה אקראית משתנה פרמטרים: משתנה

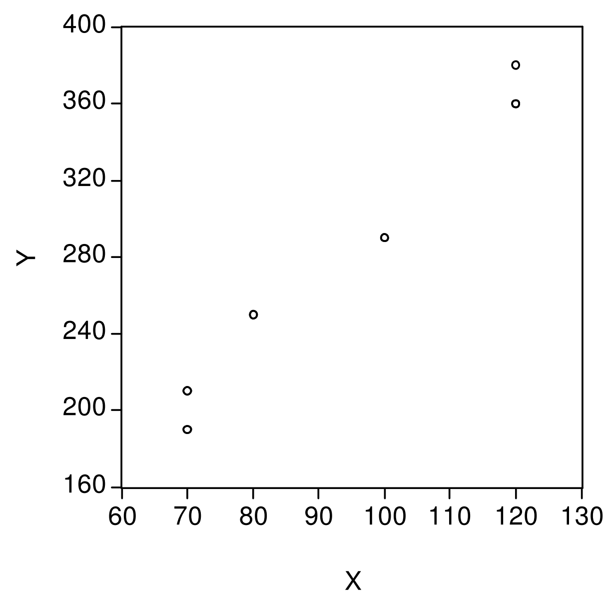
"קריזה"	מסביר	**חותך -** α **שיפוע -** β	**מוסבר**

אחרי הגדרת המודל המתווך אסף נתונים על 6 דירות, שנמכרו בחודש האחרון באותו איזור.

זהו המדגם של המתווך. במדגם יש 6 תצפיות. נוהגים להציג את המודל כאשר לכל משתנה נוסף אינדקס $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$. האינדקס מייצג את מספר התצפית.

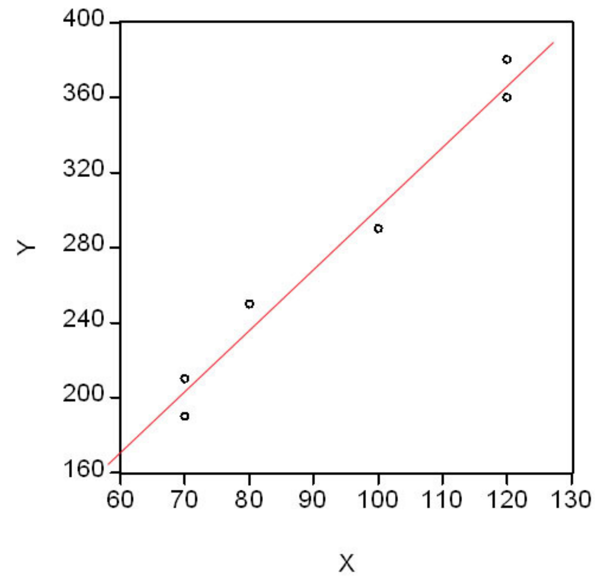
מספר הדירה	גודל הדירה במ"ר	מחיר הדירה באלפי דולרים
1	$X_1 = 70$	$Y_1 = 190$
2	$X_2 = 70$	$Y_2 = 210$
3	$X_3 = 80$	$Y_3 = 250$
4	$X_4 = 100$	$Y_4 = 290$
5	$X_5 = 120$	$Y_5 = 360$
6	$X_6 = 120$	$Y_6 = 380$

נציג את 6 התצפיות בגרף:



מהו הקו הישר המתאר את הקשר בין שני המשתנים בצורה הטובה ביותר? (הקו הוא ישר בגלל שהמתווך הניח לינאריות של המודל).

מסתבר שקו הרגרסיה הטוב ביותר הוא קו שחושב <u>בשיטת הריבועים הפחותים</u> (השיטה תתואר במלואה בהמשך):



הנוסחה של הקו היא: $\hat{Y}_t = -27.32 + 3.29X_t$.

זהו כנראה לא הקו האמיתי, אך ממילא את הקו האמיתי אף פעם אי אפשר לדעת. סביר שקו זה הוא די קרוב לקו האמיתי.

לפי הנוסחה כל מ"ר נוסף שיש בדירה מעלה את מחירה ב-3,290 דולר.

מקו זה יודע המתווך להעריך מחירים של דירות. כשפנה אליו בעל דירה שגודלה 90 מ"ר ושאל אותו מה שווי הדירה, חישב המתווך לפי הנוסחה,

$-27.32 + 3.29 \cdot 90 = 268.78$**, והשיב לבעל הדירה: "המחיר שאתה יכול לקבל עליה הוא 268,780 דולר. אם יהיה לך מזל תקבל יותר, אבל יכול להיות שתצטרך למכור בפחות".**

בשפה אקונומטרית נוכל לומר כי אם יהיה לו מזל אז ההפרעה האקראית תהיה חיובית, ואם לא – היא תהיה שלילית.

<u>לסיכום:</u>

1) במודל $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$**,** α **ו-** β **הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).**

2) $\hat{\alpha}$ **הוא האומד ל-** α**.** $\hat{\beta}$ **הוא האומד ל-** β**.**

3) אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. אומדי הריבועים הפחותים מסומנים בד"כ ע"י 'כובע' - $\hat{\beta}$**.**

אומדים אחרים מסומנים בד"כ ע"י 'תלתל' - $\tilde{\beta}$**.**

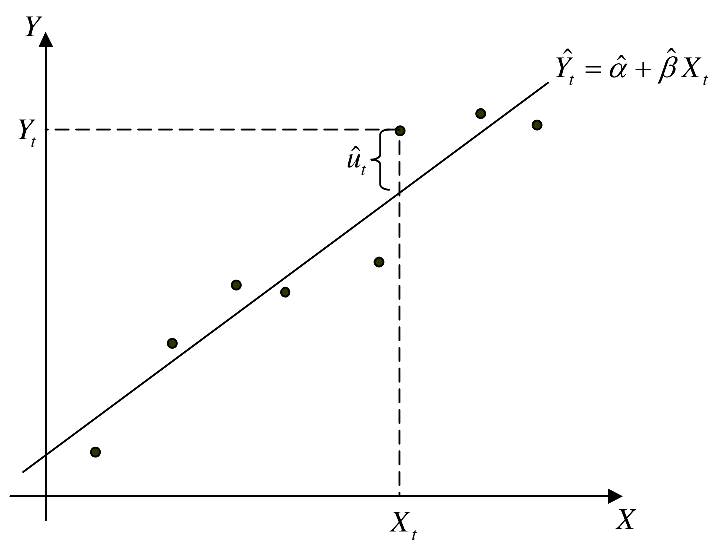
4) בעוד α **ו-** β **הם קבועים,** $\hat{\alpha}$ **ו-** $\hat{\beta}$ **הם משתנים מקריים. מדוע? מפני שבכל מדגם מתקבלים** $\hat{\alpha}$ **ו-** $\hat{\beta}$ **אחרים.**

5) את α **ו-** β **אי אפשר לדעת, ולכן אי אפשר לדעת מהו הקו האמיתי, וכן אי אפשר לדעת את** u_t**.**

6) אפשר לדעת את $\hat{u}_t$**, שהיא הסטיה מקו הרגרסיה. נגדיר זאת באופן הבא:**

*** עבור** X_t **, הערך הצפוי של המשתנה המוסבר (** $\hat{Y}_t$ **) המתקבל לפי הרגרסיה הוא** $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$**.**

*** הסטיה של התצפית (** Y_t **) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה (** $\hat{Y}_t$ **) היא** $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$**.**



קו הרגרסיה (הקו הנאמד)

תצפית בודדת

שלבי התהליך האקונומטרי

הגדרת מודל

כל הגורמים המשפיעים באופן שיטתי חייבים להופיע במודל. כל ההשפעות האקראיות באות לידי ביטוי בקריזה.

איסוף נתונים

ככל שמספר התצפיות במדגם גדול יותר כן יהיו התוצאות טובות יותר.

אמידה

יש שיטות אמידה רבות. אנחנו לומדים רק על אומדי הריבועים הפחותים.

ניתוח סטטיסטי של התוצאות

מובהקות הרגרסיה (באמצעות מבחן F), איכות הרגרסיה (באמצעות R^2), מובהקות האומדים (באמצעות מבחן t).

ניתוח כלכלי של התוצאות

משמעות הקשר בין המשתנים וביצוע תחזיות אם יש צורך.

במבחן:

הגדרת מודל

בד"כ איננו צריכים להגדיר את המודל אלא מגדירים אותו בשבילנו.

איסוף נתונים

את הנתונים איננו צריכים לאסוף.

אמידה

אנחנו צריכים לדעת באופן תאורטי איך אומדים וכן את תכונות האומדים. האמידה עצמה מבוצעת ע"י מחשב, ואנו מקבלים את תוצאותיה.

ניתוח סטטיסטי של התוצאות

אנו צריכים לשלוט הן בתאוריה והן בפרקטיקה של הניתוח.

ניתוח כלכלי של התוצאות

נדרש ברמה בסיסית.

פרק 2 - אומדי הריבועים הפחותים (אר"פ) וההנחות הקלאסיות

שיטת האמידה של α ושל β נקראת שיטת הריבועים הפחותים

Ordinary Least Squares (OLS)

השאלה הנשאלת בשיטת אמידה זו היא: איזה $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ יביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה.

ובתרגום מתימטי:

$$\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \hat{u}_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t\right)\right]^2 = ?$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$.

	מודל עם חותך ושיפוע $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	מודל ללא חותך $Y_t = \beta X_t + u_t$	מודל רק עם חותך $Y_t = \alpha + u_t$
חישוב האומדים	$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(Y_t - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$	$\hat{\alpha} = \bar{Y}$
תוחלת האומדים	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$ $E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$	$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$
שונות האומדים	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{S_{XX}}$ $V\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}\right)$	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{T} X_t^2}$	$V\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma_u^2}{T}$

<u>הערה חשובה:</u> בתהליך הגזירה של פונקציית הריבועים הפחותים מתקבלות "המשוואות הנורמליות":

<u>עבור המודל הקלאסי (עם חותך):</u>

בגזירה של α מתקבלת המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{u}_t = 0$

בגזירה של β מתקבלת המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$

<u>עבור מודל ללא חותך:</u>

מתקבלת משוואה נורמאלית אחת מגזירת β בלבד: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$

המשוואות הנורמאליות צריכות להתקיים על מנת שפונקציית הריבועים הפחותים תתקיים ($\sum \hat{u}_t^2 = \min$ **)**

<u>תירגול:</u>

? **כלכלן החליט לאמוד את המודל:** $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

א. נסחו את בעית ה-OLS.

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS (המשוואות הנורמאליות).

ג. מצאו נוסחה לקבלת האומדים $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$.

ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים ($\bar{X}, \bar{Y}$ **)**

ה. בהנחה והיינו בוחרים אומד אחר ל- β **שאינו אומד הריבועים הפחותים, מה היה יחס הביטויים:** $\sum e_i$ **ו-** $\sum e_i^2$ **של אומד זה ביחס לאומד הריבועים הפחותים?**

? **כלכלן החליט לאמוד את המודל:** $y_i = \beta x_i + u_i$.

א. נסחו את בעית ה-OLS.

ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.

ג. מצאו נוסחה לקבלת $\hat{\beta}$.

ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה <u>אינו</u> עובר דרך נקודת הממוצעים ($\bar{X}, \bar{Y}$ **)**

ה. מהו התנאי שבו אומד הריבועים הפחותים שמצאתם בסעיף ג יהיה זהה לנוסחה של אומד הריבועים הפחותים שנמצא בשאלה הקודמת (במודל עם חותך)?

? חוקר רצה לחקור האם ציוני IQ משפיעים על הציון באקונומטריקה ולכן אסף תצפיות מ-5 סטודנטים:

e_i	IQ	SCORE
1	100	80
1-	110	75
1	110	80
2	103	90
3-	102	85

איזה מבין המודלים הבאים נאמד?

א. $sc\hat{o}re_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot IQ_i$

ב. $sc\hat{o}re_i = \hat{\beta} \cdot IQ_i$

ג. $sc\hat{o}re_i = \hat{\alpha}$

ד. $sc\hat{o}re_i = \bar{y}$

? נבדק הקשר שבין שכר לשעה שעובד מסוים מרוויח אצל מעסיק מסוים (X) לבין כמות העובדים שמועסקים אצל אותו מעסיק (Y) (הניחו שכר שווה בין העובדים אצל אותו המעסיק).

לשם כך נדגמו 10 מעסיקים באופן מקרי ונתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 35$$

$$\bar{y} = 5.8$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 19{,}100$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 440$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2858.85$$

מהי תחזית כמות העובדים המועסקים אצל מעסיק מסוים המשתכרים 25 ₪ לשעה?

<u>ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה:</u>

כדי שהנוסחאות הנ"ל יהיו נכונות וכדי שתכונות האומדים (שיפורטו בהמשך) יתקיימו, צריכים להשמר מספר כללים. כללים אלו נקראים ההנחות הקלאסיות. קיימות 7 הנחות כאלה:

1) קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.

מוסבר=α+β מסביר+u

מקדם β: שיפוע הקו המתאר את הקשר בין המסביר למוסבר.

כדי שהקשר יהיה ליניארי שיפוע β צריך להיות קבוע.

**** שימו לב כי ישנם מודלים בהם הקשר בין X ל-Y הוא לא ליניארי אבל בין המסביר למוסבר כן נקבל קו ישר ששיפועו קבוע, כמו למשל במודל:**
$y = \alpha + \beta \ln x + u$.

2) קיימים לפחות שני ערכי X ששונים זה מזה: $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \overline{X})^2 \neq 0$

המשמעות הסטטיסטית של הנחה זו היא כי X הוא משתנה ולא קבוע. כלומר, יש לו פיזור או שונות השונה מ-0.

הבעיה ב-X קבוע היא ששונותו שווה ל-0 וכאשר $S_X^2 = 0$ **הקשר בין ה-X ל-Y שווה גם הוא ל-0.**

3) תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית: $E(u_t) = 0$ **לכל** t

לכל ערך X באוכלוסיה יש פיזור מקרי של ערכי Y ושל טעויות או "קריזות" (u), כל אחת מקריזות אלו איננה ניתנת לחיזוי אך בממוצע הן מתקזזות ומתאפסות ואנחנו פועלים לפי ההיגיון הכלכלי אותו ניתן לנבא על סמך הקו.

4) ה-Xים אינם משתנים מקריים.

אנו מניחים שהמשתנה המסביר הוא אקסוגני, כלומר ידוע מראש, משפיע על Y אבל לא מושפע ממנו בחזרה.

במילים אחרות, ניבוי Y על סמך X מסוים, מחייב את ה-X להיות משתנה אמפירי, ידוע מראש ולא אקראי ולהיות המשתנה המסביר, המשפיע במודל. למשל, אם נרצה לנבא את תצרוכת משפחה על סמך הכנסתה, כאשר נדגום משפחה ונשאל להכנסתה נצפה לקבל תשובה מסויימת (שההכנסה למשפחה לא תהיה אקראית) ולהניח כי זהו המשתנה המשפיע על התצרוכת ולא להיפך במודל הניבוי הנוכחי בו אנו משתמשים.

**** שימו לב כי מהנחה זו משתמע גם כי המתאם בין הטעויות לערכי X שווה ל-0: $\text{cov}\left(X_t, u_t\right) = 0$ (שכן המתאם בין X לבין U שווה ל-0 עבור כל t).**

5) הומוסקדסטיות: השונות של ההפרעה האקראית זהה לכל תצפית ותצפית:
$V\left(u_t\right) = \sigma_u^2$ לכל t

הפיזור סביב קו הרגרסיה הוא אחיד.

6) אין מתאם בין הפרעות אקראיות: $\text{cov}\left(u_t, u_s\right) = 0$ לכל $t \neq s$

"הקריזות" של תצפיות שונות אינן תלויות אחת בשניה.
הדבר תלוי בדגימה האקראית של התצפיות.

למשל, אם אנו בוחנים השפעה של ההכנסה על התצרוכת של משפחות, אם דגמנו באופן אקראי את המשפחות, לא יהיה קשר בין הטעות בניבוי של תצרוכת משפחה מסוימת (u_t) לטעות בניבוי התצרוכת של משפחה אחרת (u_s).

7) ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית : $u_t \approx N$

התפלגות נורמלית של טעויות סביב התוחלת (ששווה כאמור ל-0) משמעה שרוב הטעויות בניבוי הן קטנות ולא מאוד משמעותיות.

<u>לסיכום:</u>

1) קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.

2) X איננו קבוע: $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \overline{X})^2 \neq 0$

3) תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית: $E\left(u_t\right) = 0$ לכל t

4) X_t **אינם משתנים מקריים** $\Leftarrow$ **ניתן להוציא אותם מחוץ לתוחלת ולשונות** $\Leftarrow$ $\operatorname{cov}(X_t, u_t) = 0$

5) **הומוסקדסטיות: שונות ההפרעה האקראית קבועה לכל תצפית:**
$V(u_t) = \sigma_u^2$ **לכל** t

6) u_t **ב"ת:** $\operatorname{cov}(u_t, u_s) = 0$ **לכל** $t \neq s$

7) **ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית :** $u_t \approx N$

?שכר של עובדים מנובא על ידי השכלתם במודל הבא: $w_i = \alpha + \beta \cdot s_i + u_i$

א. כתבו את ההנחות הקלאסיות במונחי המשתנים של המודל הנתון והסבירו אותן.

ב. התייחסו לכל אחת מהטענות הבאות וקבעו האם היא:
הנחה קלאסית/משוואה נורמאלית (או תוצאה הנובעת ממשוואה נורמאלית)/אף אחד מהשניים:

1. $\operatorname{cov}(s_i, u_i) = 0$

2. $\operatorname{cov}(s_i, e_i) = 0$

3. $E(u_i) = 0$

4. $\operatorname{cov}(u_i, u_j) = 0$

5. $\bar{e} = 0$

6. $\overline{w} = \overline{\hat{w}}$

7. $\sum u_i = 0$

8. $V(u_i) = \sigma_i$

9. $S_s^{\,2} \neq 0$

<u>תכונות האומדים</u>

אומדי הריבועים הפחותים הם לינאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים.

1) <u>לינאריות</u>

אר"פ ניתנים להצגה כקומבינציה לינארית של Y_t.

במילים אחרות, כדי ש- $\hat{\beta}$ למשל, תהיה אומד ליניארי צריך להתקיים:

$\hat{\beta}=\sum W_t\cdot Y_t$ כאשר W_t היא קומבינציה של ערכי X.

למשל: $\hat{\beta}=\dfrac{\sum X_t\cdot Y_t}{\sum X_t^2}$

אומד זה ניתן להצגה בצורה הבאה:

$$\hat{\beta}=\frac{X_1}{\sum X^2}\cdot Y_1+\frac{X_2}{\sum X^2}\cdot Y_2+\ldots+\frac{X_T}{\sum X^2}\cdot Y_T$$

$$\hat{\beta}=\frac{W_t}{a}\cdot Y_t$$

לפיכך מדובר באומד ליניארי.

הוכחת ליניאריות עבור האומדים של המודל הקלאסי:

$$;\ \hat{\beta}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\sum w_t Y_t,\quad w_i=\frac{X_t-\overline{X}}{S_{xx}}$$

$$\hat{\alpha}=\sum v_t Y_t,\quad v_t=\frac{1}{T}-w_t\overline{X}$$

<u>כלל אצבע-כיצד יודעים אם אומד הוא לינארי?</u>

הלכה למעשה יש לבדוק האם מתקיימים 3 התנאים הבאים:

1) **המשתנים המקריים (ה- y_t) הם ממעלה ראשונה (כלומר לא יהיו נתונים בחזקה או בשורש).**
2) **בין המשתנים המקריים (ה- y_t) יש סכום או הפרש (ולא כפל או חילוק).**
3) **כל שאר הגורמים פרט ל- y_t אינם משתנים מקריים (בהתאם להנחות, כזכור, x_t איננו משתנה מקרי).**

כלל אצבע: אם בנוסחה של האומד לא מופיעים סימני כפל בין Y_t-ים או העלאה בחזקה/שורש של Y_t וכן ה-Y_t-ים לא מופיעים במכנה, אז סביר להניח שהאומד לינארי.

? האם האומד: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2}$ **הוא ליניארי?**

? האם האומד $\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t^3 \sum_{t=1}^{T} X_t(Z_t + Y_t)}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$ **הוא ליניארי?**

? כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.

1. $\tilde{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$
2. $\tilde{\beta} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$
3. $\tilde{\beta} = \sum (\frac{y_i}{x_i})^2$
4. $\tilde{\beta} = \frac{y_N - y_1}{x_N - x_1}$
5. $\tilde{\beta} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$
6. $\tilde{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$

מי מהאומדים הוא ליניארי ומהן המשקולות?

2) <u>חוסר הטיה</u>

התוחלת של אר"פ שווה לערך האמיתי של הפרמטר. כלומר, אומד $\hat{\vartheta}$ מסויים יהווה אח"ה לפרמטר ϑ אותו הוא אומד באוכלוסיה אם מתקיים:

$$E(\hat{\vartheta}) = \vartheta$$

זהו מושג תאורטי (ולא קונקרטי) שאומר כי ממוצע כל האומדים ($\hat{\vartheta}$) של אינסוף המדגמים האפשריים בגודל מסוים שווה לפרמטר (ϑ).

עבור מדגם מקרי אחד האומד איננו שווה לפרמטר ($\hat{\vartheta} \neq \vartheta$) אבל על פני אינסוף המדגמים האפשריים, ממוצע האומדים ($E(\hat{\vartheta})$) צריך להיות שווה לפרמטר (ϑ) כדי שהאומד יהיה אח"ה.

<u>כיצד יודעים אם אומד הוא חסר הטיה?</u>

בשלב הראשון יש לבצע עבודת הכנה –

מבטאים את האומד באמצעות הפרמטר האמיתי: מתחילים מהאומד המוצע, מציבים במקום ה- Y_t את המודל ומפתחים אלגברית.

**** יש לזכור כי:**

u_t, y_t מהווים משתנים מקריים $\Leftarrow$ נשארים בתוך התוחלת, השונות וה-$\sum$.

x_t <u>איננו</u> משתנה מקרי (על פי הנחה מס' 4) $\Leftarrow$ יוצא מחוץ לתוחלת ולשונות אך נשאר בתוך ה-$\sum$

α, β קבועים $\Leftarrow$ יוצאים מחוץ לתוחלת, לשונות ול-$\sum$

דוגמא:

עבור המודל $Y_t = \beta X_t + u_t$ והאומד המתאים לו $\hat{\beta} = \frac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2} = \frac{\sum X_t \left(\beta X_t + u_t\right)}{\sum X_t^2} = \frac{\beta \sum X_t^2}{\sum X_t^2} + \frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2} = \beta + \frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}$$

שלב מקדים זה יעשה לפני בדיקת חוסר הטייה, יעילות ועקיבות.

הוכחת חוסר הטיה – מפעילים תוחלת על האומד, ואם התוחלת שווה לפרמטר האמיתי אז האומד חסר הטיה.

בשפה מתמטית: אם $E\left(\hat{\beta}\right)=\beta$ **, אז** $\hat{\beta}$ **הוא אומד חסר הטיה ל-** β **.**

כדי שהדבר יתקיים הנחות (3) ו- (4) חייבות להתקיים.

המשך הדוגמא שלעיל:

$$E\left(\hat{\beta}\right)=E\left(\beta+\frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}\right)=E\left(\beta\right)+E\left(\frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}\right)=\beta+\frac{\sum X_t E\left(u_t\right)}{\sum X_t^2}=\beta$$

מסקנה: האומד חסר הטיה!

כלל אצבע:

אם בעבודת ההכנה נשארים בסוף הפיתוח רק שני סוגי איברים:

1) **הפרמטר האמיתי**
2) **איבר או כמה איברים שמכילים את** u_t **(קומבינציה ליניארית של** u_t**)**

אז האומד חסר הטיה.

למשל, בעבודת ההכנה שלעיל:

$$\hat{\beta}=\beta+\frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}$$

איבר המכיל את u_t — **הפרמטר האמיתי**

❓נתון האומד הבא:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$$

האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

1. **בדוק במודל עם חותך**
2. **בדוק במודל ללא חותך**

3) <u>יעילות</u>

יעילות פירושה השונות הקטנה ביותר. ככל שהשונות של האומד קטנה יותר, כך יש הסתברות גבוהה יותר שהוא יהיה קרוב יותר לפרמטר האמיתי באוכלוסייה אותו הוא אומד.

$\hat{\vartheta}_1$ **יקרא אומד יעיל יותר מ-** $\hat{\vartheta}_2$ **אם מתקיים שהשונות שלו קטנה יותר:**

$$V(\hat{\vartheta}_1) < V(\hat{\vartheta}_2)$$

משפט גאוס מרקוב:

יעילות היא תמיד מושג השוואתי. לכן בכדי לדעת האם השונות של האומד היא המינימאלית האפשרית נשתמש במשפט גאוס מרקוב.
לפי משפט גאוס-מרקוב אר"פ הם בעלי השונות הנמוכה ביותר בקבוצה שלהם (קבוצת האומדים הלינאריים חסרי ההטיה), והם נקראים B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimation).

כלומר:

אם האומד שלנו הוא ליניארי וחסר הטייה $\Leftarrow$ מבלי לחשב את שונותו נדע לפי משפט גאוס-מרקוב שהיא גדולה יותר משל אומד הריבועים הפחותים.
אם האומד איננו ליניארי ו/או חסר הטיה $\Leftarrow$ לא ניתן להשתמש במשפט גאוס-מרקוב ואז היחס בין שונות האומד לשונות אומד הריבועים הפחותים המקביל איננו ידוע.

<u>כיצד מחשבים שונות של אומד?</u>

ראשית כל, הנחות (4), (5) ו-(6) חייבות להתקיים. אם הן מתקיימות, מחשבים את השונות של האיברים המכילים את u_t מהפיתוח הקודם.

נדגים על ידי חישוב שונות אר"פ $\hat{\beta}$:

1. **במודל ללא חותך**

$$V\left(\hat{\beta}\right)=V\left(\frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}\right)=\frac{V\left(\sum X_t u_t\right)}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sum V\left(X_t u_t\right)}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\sum X_t^2 V\left(u_t\right)}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sum X_t^2\sigma_u^2}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sigma_u^2\sum X_t^2}{\left(\sum X_t^2\right)^2}=\frac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2}$$

2. **במודל עם חותך**

$$V(\hat{\beta})=V\left(\frac{\sum (X_t-\bar{X})u_t}{S_{XX}}\right)=\frac{V\sum (X_t-\bar{X})u_t}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sum V(X_t-\bar{X})u_t}{S_{XX}{}^2}=$$

$$\frac{\sum\left[(X_t-\bar{X})^2V(u_t)\right]}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sum\left[(X_t-\bar{X})^2V(u_t)\right]}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sigma^2 S_{XX}}{S_{XX}{}^2}=\frac{\sigma^2}{s_{xx}}$$

4) <u>עקיבות</u>

ככל שהמדגם יגדל כן יתקרב האומד לערך האמיתי של הפרמטר.

אם נגדיל את המדגם לאינסוף תצפיות ונחשב את האומד, הוא יהיה שווה לפרמטר האמיתי באוכלוסיה ($\underset{T\to\infty}{\hat{\theta}\to\vartheta}$)

<u>תנאי הכרחי לעקיבות:</u> האומד חייב להיות פונקציה של גודל המדגם. במילים אחרות, האומד צריך להיות מושפע מגודל המדגם. ברגע שהאומד עונה על תנאי זה הוא יהיה עקיב. אומד המחושב במדגם סופי בהגדרה לא יוכל להיות עקיב לפרמטר באוכלוסיה.

<u>סיכום: השלבים להוכחת התכונות</u>

1) **הוכחת ליניאריות**
2) **הכנת האומד $\Leftarrow$ להציב במקום Y_t את המודל האמיתי.**

במודל עם חותך: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$

במודל ללא חותך: $Y_t = \beta X_t + u_t$

3) **פיתוח האלגברה**

4) **חישוב תוחלת, שונות, עקיבות.**

- **ליניאריות מהווה תנאי הכרחי לחוסר הטיה.**
- **ליניאריות וחוסר הטייה מהוות תנאי הכרחי לבחינת היעילות של האומד לפי משפט גאוס-מרקוב.**
- **עקיבות איננה תלויה בתכונות האחרות, אלא רק בהיותו של האומד פונקציה של גודל המדגם (לא מחושב על מדגם סופי). כך שאומד לא חייב להיות ליניארי או חסר הטיה כדי להיות עקיב.**
- **העקיבות משפיעה על היעילות של האומד. עבור אומדים התלוים בגודל המדגם: ככל שגודל המדגם גדול יותר כך שונות האומד קטנה והאומד יהיה יעיל יותר לפרמטר באוכ'.**

<u>תרגול ממבחנים</u>

<u>תרגיל המבוסס על שאלה ממבחן לדוגמא (בשווי של 25 נקודות)</u>

נתון המודל $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, $T = 100$

כאשר מתקיימות כל ההנחות הקלאסיות.

נתון האומד $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=51}^{100} Y_t - \sum_{t=1}^{50} Y_t}{\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t}$

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד חסר הטיה ל- β **נכון / לא נכון**

ב. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד עקיב ל- β **נכון / לא נכון**

ג. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד לינארי ל- β **נכון / לא נכון**

ד. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד יעיל ל- β **נכון / לא נכון**

ה. השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$ היא:

תרגיל המבוסס על שאלה ממבחן לדוגמא (בשווי של 14 נקודות)

נתון המודל $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

(יש לשים לב המודל ללא חותך)

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum Y_t}{\sum X_t}$

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד מוטה ל- β : **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

ב. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי $\tilde{\beta}$ איננו אומד יעיל יותר מאומד הריבועים הפחותים: **נכון / לא נכון /לא ניתן לדעת**

ג. מהי השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$?

תרגיל המבוסס על שאלה ממבחן לדוגמא (בשווי של 16 נקודות)

נתון המודל $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

(יש לשים לב המודל ללא חותך)

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum \left(X_t - \bar{X} \right)^2}$

א. מהי התוחלת של $\tilde{\beta}$?

ב. $E\left(\tilde{\beta}\right) < \beta$. **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

ג. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי אומד הריבועים הפחותים הינו אומד יעיל יותר מ- $\tilde{\beta}$. **נכון / לא נכון/לא ניתן לדעת**

ד. מהי השונות האמיתית של האומד $\dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$?

שאלות נוספות מתוך מבחנים

בכל השאלות ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

האומדים הם אר"פ, והמודל הוא $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

1. $E(Y_t) = E(\hat{Y}_t)$ **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

2. $\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})\bar{Y} \neq 0$ **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

3. אמידת המודל בשיטת הריבועים הפחותים תתן את התוצאה: $\sum_{t=1}^{T} u_t = 0$

נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

4. אם נתון ש- $r_{XY} = 0.57$ **, אזי** $\hat{\beta}$ **:**

א. הוא בהכרח שלילי

ב. הוא בהכרח חיובי

ג. הוא בהכרח שווה לאפס

ד. לא ניתן לקבוע את סימנו על סמך הנתונים הקיימים

5. סמן את הטענה הנכונה בהכרח:

א. $\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{Y})\hat{u}_t = 0$

ב. $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} X_t^2 - (T\bar{X})^2$

ג. $\sum_{t=1}^{T} X_t u_t = 0$

ד. אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה בהכרח.

6. אומדי הריבועים הפחותים אינם חסרי הטיה, אם נתון שהשונות של u_t **אינה קבועה.** **נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת**

7. אומד חסר הטיה הוא אינו בהכרח גם אומד עקיב.

נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

<u>פרק 3 - מודלים לא ליניאריים</u>

עד עכשיו דיברנו רק על מודלים ליניאריים (linear-linear). בפרק זה נלמד גם על מודלים שאינם ליניאריים: מודל חצי לוגריתמי (semi-log), מודל לוגריתמי כפול (double-log) ומודל לוג ליניארי (linear-log).

נשאלת השאלה- מתי מודל מוגדר כליניארי?
מודל מוגדר כליניארי כאשר הוא מתאר <u>קשר קוי</u> בין המשתנים- המסביר והמוסבר שלו.
למשל המודל הליניארי הקלאסי: $Y = \alpha + \beta X + u$ מתאר קשר קוי בין x ל-y.

המשמעות של קשר ליניארי היא שהנגזרת- $\frac{\partial Y}{\partial X}$ היא קבועה.

נגזרת זו מתארת את <u>השינוי השולי</u> (השיפוע של הגרף): אם מגדילים את x ביחידה אחת, בכמה יחידות משתנה y.
במודל הליניארי- שינוי זה הוא קבוע ושווה ל- β.

בניגוד למודל הליניארי, שלושת המודלים האחרים (המודלים הלוגריתמים) מתארים קשרים שאינם ליניאריים בין X ל-Y. במודלים אלו <u>השינוי השולי</u> (השיפוע) לא יהיה קבוע, אלא תלוי במשתנים- x או y או בשניהם:

1) **במודל *החצי לוגריתמי* הקשר בין x ל- y מתואר על ידי הפונקציה הבאה:**

$$Y = e^{\alpha+\beta x+u}$$

השינוי השולי איננו קבוע אלא תלוי ב-y: $\frac{\partial Y}{\partial X} = \beta \cdot Y$.

ככל ש-Y גדל כך השיפוע (β) גדל.

משמעות ה- β במודל כזה היא <u>שיעור</u> השינוי השולי: $\beta = \frac{\frac{\partial Y}{\partial X}}{Y}$

שיעור שינוי שולי אומר: אם מגדילים את X ביחידה, בכמה <u>%</u> ישתנה Y.
במודל החצי לוגריתמי עבור עליה ביחידה אחת של X , Y ישתנה ב- $100 \cdot \beta\%$.

במודלים אלו, המתארים שיעורי תשואה, השינוי באחוזים הוא קבוע למרות שהשינוי השולי איננו קבוע.

2) **במודל *הלוגריתמי הכפול* הקשר בין x ל- y מתואר על ידי הפונקציה הבאה:** $Y = e^{\alpha} \cdot X^{\beta} \cdot e^{u}$

השינוי השולי איננו קבוע אלא תלוי ב-x וב-y: $\frac{\partial Y}{\partial X} = \beta \cdot \frac{Y}{X}$.

משמעות ה- β **במודל כזה היא <u>הגמישות</u>:** $\beta = \frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{\frac{\partial Y}{Y}}{\frac{\partial X}{X}}$

משמעות הגמישות היא שינוי שולי באחוזים: אם מגדילים את X ב-% אחד, בכמה % ישתנה Y.

במודל הלוגריתמי הכפול ה- β **מייצגת את הגמישות, כלומר אם נגדיל את X ב-% אחד, Y ישתנה ב-** β **%.**

במודלים אלו הגמישות היא קבועה למרות שהשינוי השולי איננו קבוע.

3) **במודל הלוג-ליניארי הקשר בין x ל- y מתואר על ידי הפונקציה הבאה:**

$$e^{y} = e^{\alpha} \cdot X^{\beta} \cdot e^{u}$$

השינוי השולי איננו קבוע אלא תלוי ב-X. ככל ש-X עולה כך פוחת השינוי השולי: $\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\beta}{X}$.

במודל זה אם X עולה ב-% אחד, Y עולה ב- β **:** $\beta = \frac{\partial Y}{\frac{\partial X}{X}}$

ל- β **אין משמעות כלכלית במודל זה.**

<u>גמישות</u>

בנוסף למשמעות ה- β **בכל אחד מהמודלים, מושג נוסף שיש להכיר הוא מושג <u>הגמישות</u>.**

כאמור, גמישות משמעה: שינוי שולי <u>באחוזים</u>. כלומר בכמה % ישתנה Y אם X יגדל ב-% אחד.

הביטוי המתימטי לגמישות:

$$\frac{\frac{\partial Y}{Y}}{\frac{\partial X}{X}} = \frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y}$$

כלומר, כדי לחשב גמישות יש להכפיל את השינוי השולי ($\frac{\partial Y}{\partial X}$) ב- $\frac{X}{Y}$

1) **במודל הליניארי- הגמישות:** $\frac{\beta X}{Y}$

2) **במודל החצי לוגריתמי-הגמישות:** $\beta Y \cdot \frac{X}{Y} = \beta X$

3) **במודל הלוגריתמי הכפול- הגמישות:** $\beta \frac{Y}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \beta$

4) **במודל הלוג-ליניארי-הגמישות:** $\frac{\beta}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \frac{\beta}{Y}$

ניתן לראות כי פרט למודל הלוגריתמי הכפול שבו הגמישות היא קבועה, הגמישות של המודלים האחרים משתנה כפונקציה של X או של Y או של שניהם. כלומר ניתן לחשבה עבור נקודה ספציפית על הגרף (X_t, Y_t) בלבד.

<u>טרנספורמציות של המודלים הלא ליניאריים לקו ישר:</u>

בכדי שניתן יהיה לאמוד את המודלים הלא ליניאריים בשיטת OLS, עליהם לעבור טרנספורמציה לקו ישר.

טרנספורמציה של המודלים לקו ישר תאפשר לתאר את הקשר בין המשתנה המסביר למשתנה המוסבר באופן לינארי.

טרנספורמציה זו תתבצע על ידי הוצאת ln (לוג טבעי) משתי צידי המשוואה בכדי לבטל את ה- e.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN(e^{x}) = X$$
$$LN(X^{Y}) = Y \cdot LN(X)$$

$$LN(X \cdot Y) = LN(X) + LN(Y)$$
$$LN(\frac{X}{Y}) = LN(X) - LN(Y)$$

המודל	לפני הטרנספורמציה	אחרי הטרנספורמציה
1) לוג-ליניארי	$e^{y} = e^{\alpha} \cdot X^{\beta} \cdot e^{u}$	$Y = \alpha + \beta \ln X + u$
2) לוגריתמי כפול	$Y = e^{\alpha} \cdot X^{\beta} \cdot e^{u}$	$\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$
3) חצי לוגריתמי	$Y = e^{\alpha + \beta x + u}$	$\ln Y = \alpha + \beta X + u$

אם נתייחס למשתנה המסביר או המוסבר בתוספת הלוג, ניתן יהיה לתאר את הקשר ביניהם באופן ליניארי.

סיכום:

המודל	**משמעות ה- β**	**השינוי השולי** ($\frac{\partial Y}{\partial X}$) **בכמה ישתנה Y אם נגדיל את X ביחידה?**	**הגמישות** ($\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{X}{Y}$) **בכמה % ישתנה Y אם נגדיל את X ב-1%?**
ליניארי $Y=\alpha+\beta X+u$	**השינוי השולי** **אם נגדיל את X ביחידה** **Y ישתנה ב- β יחידות**	β	$\frac{\beta X}{Y}$
חצי לוגריתמי $\ln Y=\alpha+\beta X+u$ ($Y=e^{\alpha+\beta x+u}$)	**שיעור השינוי השולי** **אם נגדיל את X ביחידה** **Y ישתנה ב-** $100\cdot\beta\%$	βY	βX
לוגריתמי כפול $\ln Y=\alpha+\beta\ln X+u$ ($Y=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}$)	**הגמישות** **אם נגדיל את X ב-1%** **Yישתנה ב- β%**	$\frac{\beta Y}{X}$	β
לוג ליניארי $Y=\alpha+\beta\ln X+u$ ($e^{y}=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}$)	**אין משמעות כלכלית** **אם נגדיל את X ב-1%** **Y ישתנה ב-** β	$\frac{\beta}{X}$	$\frac{\beta}{Y}$

****המשתנה שיש בו LN השינוי בו יהיה באחוזים**

תרגול

? על מנת לאמוד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

$$MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t \quad (1)$$

$$MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t \quad (2)$$

$$LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t \quad (3)$$

$$LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t \quad (4)$$

א. הסבירו את המשמעות של β בכל אחד מהמודלים

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים: (12.311,1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

? נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

$$\hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05} \quad (1)$$

$$\hat{Y} = e^{4.5+0.05X} \quad (2)$$

$$\hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X} \quad (3)$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{1+e^{4.5+0.05X}} \quad (4)$$

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור X=6

נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

1. $$Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i}$$

2. $$Q_i = Ae^{\beta_1 \cdot L_i + u_i}$$

3. $$Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i}$$

4. $$Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i$$

5. $$Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i$$

6. $$Q_i = e^{A + \beta_1 \cdot Ki + u_i}$$

7. $$Q_i = A(\frac{K_i}{2} + 7)^{\beta_1} e^{u_i}$$

8. $$Q_i = A + \beta_1 \cdot L_i + u_i$$

9. $$Q_i = A + \beta_1 \cdot (\frac{K_i}{L_i}) + u_i$$

כאשר:

Q- הוצאות צריכה על מוצר מסוים על ידי פרט מסוים.

A- הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה ו/או שנות לימוד אפסיים.

K- הכנסת הפרט.

L- שנות לימוד.

א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?

ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?

ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.

ד. עקומת אנג'ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנג'ל?

? נתון המודל הבא:

$$Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$$

א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?

ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?

ג. נאמד המודל הבא:

$$\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$$

והתקבלו התוצאות הבאות: $\hat{\alpha}_0 = 3,\ \hat{\alpha}_1 = 0.8$

מהם האומדנים עבור $A,\ \beta_1$?

פרק 4 - מבחני המובהקות וקריאת פלטים (של תוכנת SAS)

פלט ניתוח שונות (Analysis of Variance)

להלן פלט ניתוח שונות של SAS:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	k +	RSS +	$RSS/k = MSR$	$F = \frac{MSR}{MSE}$	PF
Error	$T-k-1$	ESS	$ESS/(T-k-1) = MSE$		
C Total	$T-1$	TSS			

Root MSE	$\sqrt{MSE} = s_u$	R-square	$R^2 = \frac{RSS}{TSS}$
Dep Mean	$\overline{Y}$	Adj R-sq	$\overline{R}^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} \cdot \frac{T-1}{T-k-1}$
C.V.	$\frac{s_u}{\overline{Y}} \cdot 100$		

פלט זה מתחלק לשני חלקים:

החלק הראשון (מעל לקו המקווקו) מתאר את מבחן F למובהקות מודל הרגרסיה.

החלק השני (מתחת לקו המקווקו) מתאר מדדים חשובים של מודל הרגרסיה.

מדדים חשובים של מודל הרגרסיה

1) מדד R^2 לטיב ההתאמה (R-square)

<u>עונה על השאלה:</u> איזה אחוז מהשונות של המשתנה התלוי (Y) מוסבר על ידי קו הרגרסיה, ההיגיון הכלכלי (Xים)?

מדד לפרופורציית השונות המוסברת.

$$0 \le R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS} \le 1$$

- **R^2 נע בין 0 ל-1. ככל שקרוב יותר ל-1 ההתאמה טובה יותר.**
- **אר"פ מביא למקסימום את R^2**
- **בהוספת משתנים מסבירים נוספים למודל, R^2 יכול רק לעלות או "להתנפח" או לכל היותר להשאר ללא שינוי (כתוצאה מהירידה בשונות הלא מוסברת ESS).**

2) $\bar{R}^2$ - R^2 המתוקן (Adj R-sq)

<u>עונה על השאלה:</u> האם כדאי היה לי להוסיף משתנים ב"ת נוספים למודל?

משמש להשוואה בין מודלים בעלי מספר שונה של משתנים מסבירים:

$$\bar{R}^2 = R^2 \cdot \left(\frac{T-1}{T-k-1}\right)$$

- **המדד המתוקן לפרופורצית השונות המוסברת ($\bar{R}^2$) לוקח בחשבון את "ההפסד" בדרגות החופש כתוצאה מהוספת המשתנים למודל ולא רק את "הרווח" בירידת השונות הלא מוסברת (ה-ESS).**
- **לכן, בניגוד ל- R^2 , ה- $\bar{R}^2$ יכול לרדת בהוספת משתנים למודל ולא רק לעלות.**

מבחן **F** למובהקות מודל הרגרסיה

<u>מבחן מובהקות העונה לשאלה:</u> האם מודל הרגרסיה שלנו לניבוי משתנה תלוי מסויים על ידי k משתנים ב"ת, מובהק באוכלוסיה?

<u>השערות:</u>

$H_0: R^2 = 0$

$H_1: R^2 > 0$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{\frac{RSS}{K}}{\frac{ESS}{T-K-1}} = \frac{\frac{R^2}{K}}{\frac{1-R^2}{T-K-1}}$$

- את סטטיסטי F נחשב בעזרת לוח ניתוח השונות המוצג בחלק הראשון בפלט.

<u>כלל החלטה ומסקנה:</u>

נדחה את H0 כאשר:

שימוש בטבלת F: $F>F(K,T-K-1;1-\alpha)$

שימוש בפלט: $PF<\alpha$

<u>מסקנה:</u> יש/אין עדות לכך שמודל הרגרסיה מובהק באוכלוסיה.

?חוקר רצה לבחון את השפעת ההכנסה (INCOME) על גובה המס (TAX)

(במיליארדי $) שגובה מדינה במערב לפי המודל: $TAX_t = \alpha + \beta \cdot INCOME_t + u_t$.

לשם כך אסף נתונים מ-51 מדינות. להלן התוצאות:

Model: MODEL1

Dependent Variable: TAX

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	2046.89694	2046.89694	8798.672	0.0001
Error	49	11.39922	0.23264		
C Total	50	2058.29615			

Root MSE	0.48232	R-square	0.9945
Dep Mean	5.4242	Adj R-sq	0.9943
C.V.	8.88711		

בדקו את ההשערה כי המודל מובהק ברמת מובהקות של 0.05.

פלט מקדמי הרגרסיה (Parameter Estimates)

להלן פלט מקדמי הרגרסיה של SAS:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	$\hat{\alpha}$	$s_{\hat{\alpha}}$	$\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = t_{(\hat{\alpha}=0)}$	$Pt_{\hat{\alpha}}$
X	1	$\hat{\beta}$	$s_{\hat{\beta}}$	$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = t_{(\hat{\beta}=0)}$	$Pt_{\hat{\beta}}$

ניתוח הפלט

הפלט לעיל מתאר את מקדמי הרגרסיה: $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ ומובהקותם.

- **שורה ראשונה מתייחסת ל- $\hat{\alpha}$ המכונה ה"חותך" של קו הרגרסיה (INTERCEP) ומובהקותו.**
- **השורות הבאות מתייחסות למקדם של המשתנים הבלתי תלויים , ל- $\hat{\beta}$ טות.**

  בדוגמא שלהלן קיים משתנה מסביר אחד בלבד (k=1).

  במודל של רגרסיה רבת משתנים יתווספו שורות נוספות כמספר המשתנים הבלתי תלויים במודל.
- **Parameter Estimate – מתאר את ערך המקדמים $\hat{\alpha}$ וה- $\hat{\beta}$ טות. כל שאר הנתונים מתייחסים למבחני המובהקות שלהם.**

מבחן t למובהקות ה-β

<u>מבחן מובהקות העונה לשאלה:</u>האם משתנה מסביר מסויים רלוונטי למודל (מובהק)?

<u>השערות:</u>

$$H_0 : \beta = 0$$
$$H_1 : \beta \neq 0$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$t_{\beta=0} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{S_{\hat{\beta}}}$$

<u>כלל הכרעה ומסקנה:</u>

נדחה את H0 אם:

שימוש בטבלת T: $\left|t_{\beta=0}\right| > t_{(T-K-1,1-\frac{\alpha}{2})}$

שימוש בפלט: $Pt_{\hat{\beta}} < \alpha$

<u>מסקנה:</u> יש/אין עדות לכך שהמשתנה הב״ת המסויים מובהק באוכ׳ (ולכן רלוונטי למודל).

<u>הערות:</u>

- **ניתן גם לבצע מבחן מובהקות חד צדדי ל- β הנותן מענה על השאלה: האם מקדם השיפוע או הקשר בין המשתנים הוא חיובי או שלילי באוכ׳?**

  <u>ההשערות:</u>

  $$H_0 : \beta = 0$$
  $$H_1 : \beta > / < 0$$

  <u>כלל ההכרעה:</u>

  שימוש בטבלת T:

  $$t_{\beta=0} > t_{(T-K-1,1-\alpha)}$$
  $$t_{\beta=0} < -t_{(T-K-1,1-\alpha)}$$

  שימוש בפלט:

  $$\frac{pt_{\hat{\beta}}}{2} < \alpha$$

- **ניתן לבדוק בנוסף האם ה-β (השינוי השולי) שווה לערך מסויים באוכ'.**

<u>השערות לדוגמא:</u>

$$H_0 : \beta = 2$$
$$H_1 : \beta \neq 2$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$t_{\beta=2} = \frac{\hat{\beta} - 2}{S_{\hat{\beta}}}$$ **(זה לא נתון בפלט של SAS וצריך לחשב)**

<u>כלל הכרעה:</u>

ניתן להשתמש בטבלת T אך לא ניתן להשתמש ב- $Pt_{\hat{\beta}}$ **שבפלט.**

במקרה זה ניתן גם לחשב רווח בר סמך ל- β ולראות האם הוא מכיל את הערך המבוקש (את β_0) אם כן- נקבל את H0 ואם לא-נדחה אותה.

- **רב"ס ל-β:**

$$P(\hat{\beta} - t_{(T-K-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{(T-K-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S_{\hat{\beta}}) = 1 - \alpha$$

? בהמשך לדוגמא הקודמת- בדיקת השפעת ההכנסה על גודל המס, התקבלו גם התוצאות הבאות:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-0.086912	0.08953904	-0.971	0.3365
INCOME	1	0.152232	0.0016229	93.801	0.0001

א. אמדו את המודל : $TAX = \alpha + \beta \cdot INCOME + U$

מהי המשמעות הכלכלית של β ?

ב. האם המודל מובהק? בדקו על סמך הפלט הנ"ל ברמת מובהקות של 0.05.

ג. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר, עבורה עדיין תידחה השערת האפס מסעיף ב' ?

ד. בדקו את ההשערה כי ככל שההכנסה עולה כך עולה גם המס (שיפוע β חיובי) ברמת מובהקות של 0.01.

ה. בנו רווח-סמך ברמת סמך של 95% עבור β

ו. בדקו את ההשערה שתוספת של מיליארד $ להכנסה תגדיל את המס ב - 0.2 מיליארד $, ברמת מובהקות של 0.05.

- שימו לב כי-

במודל עם משתנה מסביר אחד בלבד קיימת זהות בין מבחן F למובהקות המודל לבין מבחן t למובהקות ה-β:

$$F_{(1,T-2;1-\alpha)} = t^2_{(T-2,1-\frac{\alpha}{2})}$$

$$F = t^2_{\hat{\beta}}$$

$$PF = Pt_{\hat{\beta}}$$

כלומר: כל החלטה המתקבלת במבחן אחד חייבת להיות זהה להחלטה המתקבלת במבחן השני.

בשאלה לדוגמא ניתן לראות כי:

$$F_{(1,49;0.95)} = 4 = t^2_{(49,0.975)} = 2^2$$

$$F = 8798.672 = t^2 = 93.801^2$$

$$PF = 0.0001 = Pt_{\hat{\beta}}$$

פלט ה-Covariance of Estimates

פלט שמתאר את השונות המשותפת (covariance) של האומדנים- $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$:

Covariance of Estimates

COVB	INTERCEP	X
INTERCEP	$s^2_{\hat{\alpha}}$	$\text{cov}\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$
X	$\text{cov}\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$	$s^2_{\hat{\beta}}$

שימוש בטבלת ה-cov של SAS יעשה במקרה שבו בהשערת האפס מופיעים שני הפרמטרים- α ו- β

במקרה כזה יוצרים פרמטר חדש: γ (גמה) המהווה קומבינציה ליניארית של α ו- β

השערות:

$$H_0 : \gamma = 0$$
$$H_1 : \gamma \neq 0$$

סטטיסטי המבחן:

$$t = \frac{\hat{\gamma} - \gamma}{S_{\hat{\gamma}}}$$

מחשבים את $\hat{\gamma}$ על ידי הצבת האומדנים- $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ (מתוך הפלט של SAS).

את השונות של $\hat{\gamma}$ מחשבים תוך שימוש בנוסחאות :

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

$$\operatorname{cov}(aX, bY) = a \cdot b \cdot \operatorname{cov}(X,Y)$$

ואחר כך מוציאים לשונות שורש כדי לקבל את סטית התקן.

דוגמא:

נתון פלט האמידה של המודל $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

שלצורך אמידתו נאספו 240 תצפיות:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.25	0.25	21	0.0000
X	1	0.96	0.12	8	0.0000

Covariance of Estimates

	INTERCEP	X
INTERCEP	0.0625	-0.003
X	-0.003	0.0144

יש לבדוק את ההשערה $H_0 : \alpha = 5\beta$

ניצור פרמטר חדש γ השווה לקומבינציה ליניארית של α ו- β : $\gamma = \alpha - 5\beta$

ההשערות:

$$H_0 : \gamma = 0$$
$$H_1 : \gamma \neq 0$$

סטטיסטי המבחן:

$$t=\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{S_{\hat{\gamma}}}$$

נציב את האומדים: $\hat{\gamma}=\hat{\alpha}-5\hat{\beta}=5.25-5\cdot 0.96=0.45$

חישוב השונות של $\hat{\gamma}$ **(** $S_{\hat{\gamma}}^2$ **):**

$$V(\hat{\gamma})=V(\hat{\alpha}-5\hat{\beta})=V(\hat{\alpha})+V(5\beta)-2\operatorname{cov}(\hat{\alpha},5\hat{\beta})=$$
$$V(\hat{\alpha})+5^2V(\hat{\beta})-2\cdot 5\operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta})=$$
$$0.0625+25\cdot 0.0144-10\cdot(-0.003)=0.4525$$

סטית התקן היא: $S_{\hat{\gamma}}=\sqrt{0.4525}=0.6726$

נחשב את הסטטיסטי: $t_{\hat{\gamma}}=\dfrac{0.45-0}{0.6726}=0.66$

כלל הכרעה ומסקנה: $t_{\hat{\gamma}}=0.66<t_{(238,0.975)}=1.96$ **, לכן אין סיבה מספקת לדחות את השערת האפס.**

מסקנה: אין עדות לכך שה- $\alpha\neq 5\beta$

חוקר רצה לבדוק את השפעת הותק בעבודה (EXP) על השכר (SALARY) לפי המודל: $\ln\left(\text{SALARY}_t\right)=\alpha+\beta\cdot\text{EXP}_t+u_t$ **. הוא אסף 403 תצפיות, ואמד את הפרמטרים בתוכנת SAS. להלן חלקים מהפלט ויש להשלימו:**

Analysis of Variance

		Sum of	Mean		
Source	**DF**	**Squares**	**Square**	**F Value**	**Prob>F**
Model	**----**	**----**	**5.68015**	**----**	**----**
Error	**----**	**205.22539**	**----**		
C Total	**----**	**----**			

Root MSE	**----**	**R-square**	**----**
Dep Mean	**7.14247**	**Adj R-sq**	**0.0245**
C.V.	**10.01602**		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	---- (*)	----	----	----
EXP	1	-0.008740	----	----	0.0009

Covariance of Estimates

COVB	INTERCEP	EXP
INTERCEP	0.0047463101	----
EXP	-0.000154685	6.882844 E-6

(*) נתון נוסף: $\overline{EXP} = 22$

א. קיים קשר חיובי מובהק בין ותק ללוג השכר. **נכון / לא נכון**

ב. שיעור התשואה בשכר לשנת ותק הוא:

ג. תחזית לוג השכר עבור אדם בעל 10 שנות ותק היא:

עריכת תחזית וקריאת פלטים (של SPSS)

אמידה נקודתית

אמידה נקודתית עבור X_0 מסוים (תחזית) מחושבת על פי קו הרגרסיה במדגם:

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X_0$$

אמידת מרווח ל- $E(Y)$

כאשר אנו מתבקשים לאמוד את התחזית באוכלוסיה עבור X_0 מסוים, נחשב רווח בר סמך לערך ממוצע של Y באוכ' עבור X_0 מסוים ($E(Y)$) ברמת סמך $1-\alpha$.

נוסחת הרב"ס:

$$\hat{Y} \pm t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_u \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

$$\hat{\sigma}_u = MSE = \frac{SSE}{n-2} \qquad \sum (X_i - \overline{X})^2 = S_{XX} = (n-1)S_X^2$$

רישום הרב"ס: $p(\_\_\_ \le E(Y) \le \_\_\_\_) = 1-\alpha$

אמידת מרווח ל-Y

כאשר אנו מתבקשים לאמוד ערך בודד של Y באוכלוסיה עבור X_0 מסוים, נחשב רווח בר סמך לערך בודד של Y באוכ' עבור X_0 מסוים (Y_0) ברמת סמך $1-\alpha$.

נוסחת הרב"ס:

$$\hat{Y} \pm t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

רישום הרב"ס: $p(\_\_\_ \le Y \le \_\_\_\_) = 1-\alpha$

רב"ס לערך בודד יהיה רחב יותר מאשר רב"ס לערך ממוצע משום שטעות התקן בראשון גדולה מאשר באחרון.

רב"ס לערך ממוצע מנסה לאמוד את התחזית באוכ' עבור ערך מסוים של X ואילו רב"ס לערך בודד מנסה לאמוד את תחום ערכי Y באוכ' עבור ערך X מסוים.

התחזית מדויקת יותר (שונות התחזית קטנה יותר) כאשר:

1. n (גודל המדגם) גדול יותר
2. שונות המשתנה המסביר X גדולה יותר
3. X_0 קרוב יותר ל $\bar{X}$
4. האומד לשונות הטעויות- $\hat{\sigma}_u$, קטן יותר.

דוגמא:

במדגם של 30 דירות מושכרות לסטודנטים ברדיוס של עד 2 ק"מ מסביב למכללה נחקר הקשר בין שכר דירה למספר הסטודנטים הגרים בדירה. להלן התוצאות:

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
שכר הדירה	1386.7667	509.46027	30
מספר הסטודנטים	3.0000	1.31306	30

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.602[a]	.362	.339	414.05503

a. Predictors: (Constant), number of students
b. Dependent Variable:rent

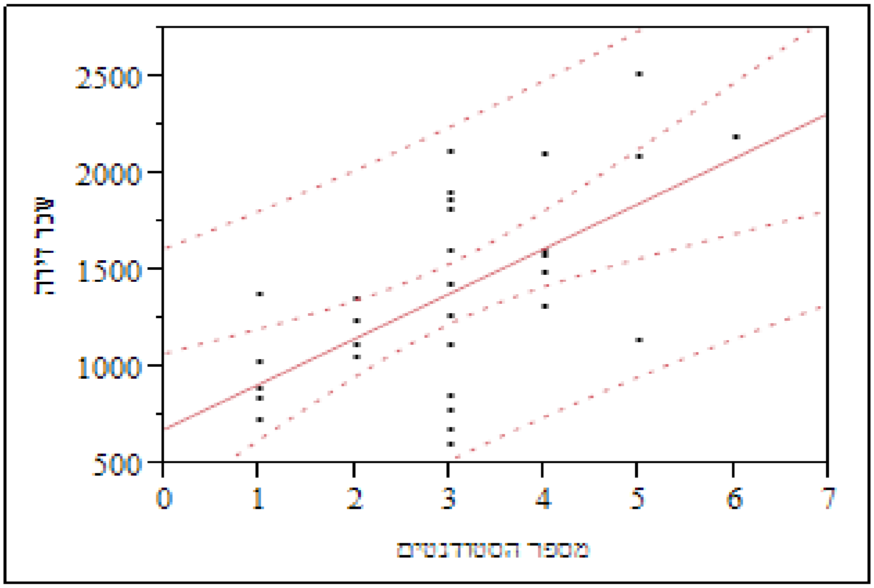
ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2726579.520	1	2726579.520	15.904	.000[a]
	Residual	4800363.847	28	171441.566		
	Total	7526943.367	29			

a. Predictors: (Constant), number of students
b. Dependent Variable: rent

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	686.207	191.244		3.588	.001
	מספר הסטודנטים	233.520	58.556	.602	3.988	.000



1. חשב אומדן נקודתי לשכר הדירה אותו ישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד.

2. אמוד את שכר הדירה הממוצע שישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת בטחון של 95% .

3. אמוד את שכר הדירה שישלם סטודנט יחיד החולק את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת ביטחון של 95% .

פרק 5 - שינוי יחידות מדידה

שינוי ליניארי (טרנספורמציה ליניארית) שנעשה במשתנה המוסבר או במשתנה המסביר במודל.
שינוי ליניארי משמעו: הוספה/החסרה של קבוע ו/או הכפלה/חילוק של קבוע של אחד או שני המשתנים.

- **טרנספורמציה ליניארית של המשתנים לא תשפיע על** R^2 **,** F **,** $t_{\hat{\beta}}$**ו-** PF **.**
- **האומדים (** $\hat{\alpha}$**ו-** $\hat{\beta}$ **) וסטיות התקן שלהם (** $S_{\hat{\alpha}}$**ו-** $S_{\hat{\beta}}$ **) עשויים להשתנות וכך גם** $t_{\hat{\alpha}}$ **(נסמן את הפרמטרים שלאחר השינוי ב-** α' **ו-** β' **ואת האומדים ב-** $\hat{\alpha}'$ **ו-** $\hat{\beta}'$ **).**

השינויים מסוכמים בטבלה הבאה:

	$\hat{\beta}'$	$\hat{\alpha}'$	$S_{\hat{\beta}}$	$S\hat{\alpha}$
הוספת קבוע ל- X **:** $Y=\alpha'+\beta'\left(X+d\right)+v$	$\hat{\beta}'=\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}-\hat{\beta}d$	$s_{\hat{\beta}'}=s_{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\alpha}'}\neq s_{\hat{\alpha}}$
הוספת קבוע ל- Y **:** $Y+d=\alpha'+\beta'X+v$	$\hat{\beta}'=\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}+d$	$s_{\hat{\beta}'}=s_{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\alpha}'}=s_{\hat{\alpha}}$
הכפלת X **פי קבוע:** $Y=\alpha'+\beta'\left(dX\right)+v$	$\hat{\beta}'=\frac{\hat{\beta}}{d}$	$\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}$	$s_{\hat{\beta}'}=\frac{s_{\hat{\beta}}}{d}$	$s_{\hat{\alpha}'}=s_{\hat{\alpha}}$
הכפלת Y **פי קבוע:** $dY=\alpha'+\beta'X+v$	$\hat{\beta}'=d\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}'=d\hat{\alpha}$	$s_{\hat{\beta}'}=ds_{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\alpha}'}=ds_{\hat{\alpha}}$

מסקנות מהטבלה:

$t_{\left(\hat{\beta}'=0\right)}=t_{\left(\hat{\beta}=0\right)}$ **תמיד.**

$t_{(\hat{\alpha}'=0)} = t_{(\hat{\alpha}=0)}$ **רק בהכפלות.**

? חוקר ביקש לאמוד את הקשר בין שכר בש"ח (MWAGE) לבין שנות לימוד (SCL) באמצעות 2 מודלים שונים.

להלן תוצאות האמידה :

(1) $$MWAGE_t = 139.54 + 118.62 \cdot SCL_t$$

(2) $$MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t$$

חשבו מחדש את מקדמי הרגרסיה וסטטיסטי המבחן F בכל אחד מהמודלים כתוצאה:

1. **התברר כי נעשה טעות בחישוב מספר שנות הלימוד, ויש צורך להוסיף 20% למשתנה המקורי.**
2. **התברר כי הקשר בין שכר לשנות לימוד הוא ריבועי ולכן יש צורך להעלות את המשתנה המקורי של מספר שנות הלימוד בריבוע.**

? בהמשך לנתוני השאלה לדוגמא מהפרק החמישי:

החוקר טען כי יש לבדוק את הקשר בין שכר לותק ע"י שימוש בשכר נטו (NET) ולא בשכר ברוטו (SALARY). קיים שיעור מס קבוע של 20%. המודל הוא:

$\ln\left(\text{NET}_t\right) = \alpha' + \beta' \cdot \text{EXP}_t + v_t$.

מה יהיו ערכי האומדים, סטיות התקן שלהם וטיב ההתאמה באמידת מודל זה?

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN(X \cdot Y) = LN(X) + LN(Y)$$
$$LN\left(\frac{X}{Y}\right) = LN(X) - LN(Y)$$

פרק 6 - רגרסיה רב משתנית

כאשר יש יותר ממשתנה מסביר אחד, מדובר ברגרסיה מרובה.
המודל הקלאסי:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + ... + \beta_k X_{kt} + u_t$$

- **קבוע α יש אחד**
- **מספר ה-β טות כמספר המשתנים הב''ת במודל.**

מבחני המובהקות

מבחן F למובהקות המודל

השערות:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_K = 0$$
$$H_1 : OTHERWISE$$

סטטיסטי המבחן F וכלל ההכרעה:

$$F = \frac{\frac{RSS}{k}}{\frac{ESS}{T-k-1}} = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{T-k-1}} > F(k, T-k-1; 1-\alpha)$$

מבחן t למובהקות ה-βטות

מבחן לבדיקת מובהקות β ספציפית.

השערות:

$$H_0 : \beta_i = 0$$
$$H_1 : \beta_i \neq 0$$

סטטיסטי המבחן t וכלל ההכרעה:

$$\left| t_{\hat{\beta}_i} \right| = \left| \frac{\hat{\beta}_i}{S_{\hat{\beta}_I}} \right| > t_{(T-k-1;1-\frac{\alpha}{2})}$$

❓ נאמד המודל $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$ והתקבלו התוצאות הבאות:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	------------	-----------	0.0000
Error	------	-----------	------------		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	------------	R-square	-------------
Dep Mean	178.6645	Adj R-sq	0.999022
C.V.	0.988075		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X	1	-------------	0.042711	22.84485	0.0000
Z	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
W	1	-5.029101	0.073149	-------------	0.0000
S	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

א. השלם את הנתונים החסרים בפלט.

ב. האם המודל מובהק? בדקו ברמת מובהקות של 0.05

ג. האם משתנה W רלוונטי למודל? בדקו ברמת מובהקות של 0.01

השוואה בין מודלים- $\bar{R}^2$ וחוק חיטובסקי

לעיתים אנו מתבקשים להכריע בסוגיה האם כדאי לנו להוסיף למודל משתנה ב"ת מסויים. במקרה זה נשווה את פרופורציית השונות המוסברת המתוקנת $\bar{R}^2$ בין המודל ללא המשתנה המסביר לבין המודל עם המשתנה המסביר שהוספנו. להזכירכם $\bar{R}^2$ בניגוד ל- R^2 לוקח בחשבון לא רק את הרווח שבהקטנת החלק הלא מוסבר בהוספת משתנים ב"ת למודל אלא גם את ההפסד שבירידה בדרגות החופש. לכן בניגוד ל- R^2 הוא יכול לקטון בהוספת משתנים ב"ת למודל.

לפי חוק חיטובסקי-בהוספת משתנה מסביר אחד בלבד למודל ה- $\overline{R}^2$ **יעלה אך ורק אם** $\left|t_{\hat{\beta}}\right| > 1$**.**

כאשר $\left|t_{\hat{\beta}}\right| < 1$ **אז** $\overline{R}^2$ **ירד בהוספת המשתנה והוא גם לא יהיה רלוונטי למודל (מובהק).**

כאשר $\left|t_{\hat{\beta}}\right| > 2$ **אז** $\overline{R}^2$ **יעלה והמשתנה שהוסף יהיה גם מובהק.**

כאשר $1 < \left|t_{\hat{\beta}}\right| < 2$ **אז ה-** $\overline{R}^2$ **יעלה אך יש לבדוק את רלוונטיות המשתנה שהוסף למודל על פי מבחן t.**

? במודל לניבוי ההכנסה על פי שנות לימוד וותק במקום העבודה, התקבל $\overline{R}^2 = 0.266$ **. הוסף המשתנה היקף המשרה. במבחן למובהקות המשתנה הנוסף התקבל:** $t_{\hat{\beta}} = o.456$ **. האם ערך** $\overline{R}^2$ **יעלה/ירד/לא ישתנה בהוספת המשתנה הנוסף למודל?**

****<u>הערה חשובה:</u> ניתן להשתמש גם באומד המוטה-** R^2 **להשוואה בין מודלים אם מתקיימים שני התנאים הבאים:**

1) **מספר המשתנים זהה**
2) **המשתנה המוסבר זהה**

מבחן WALD

אם רוצים לבדוק השערת אפס שיש בה מספר לא מוגבל של שוויונים משתמשים במבחן WALD (במבחן t **היה רק שוויון אחד בהשערת האפס).**

איך עושים זאת?

1) אומדים את המודל המקורי. מודל זה נקרא המודל החופשי או המודל הלא-מוגבל, ובאנגלית Unrestricted. בתהליך האמידה של המודל הלא-מוגבל מקבלים את סכום ריבועי הסטיות של המודל, נסמן אותו ב- ESS_U **.**

2) מגדירים את כל השוויונים של השערת האפס.

3) מציבים את השוויונים של השערת האפס במודל המקורי. באופן הזה הופכים אותו למודל כפוי (כופים עליו את השערת האפס), או מודל מוגבל, או באנגלית Restricted.

4) אומדים את המודל המוגבל. בתהליך האמידה של המודל המוגבל מקבלים את סכום ריבועי הסטיות של המודל, נסמן אותו ב- ESS_R.

5) אם יודעים את מספר התצפיות, T**, מספר המשתנים המסבירים במודל הלא-מוגבל,** k**, ומספר השוויונים בהשערת האפס,** m**, אפשר לחשב את הסטטיסטי:**

$$WALD_{stat} = \frac{\frac{ESS_R - ESS_U}{m}}{\frac{ESS_U}{T-k-1}}$$ **(המודל המקורי עם חותך).**

m **- דרגות החופש של המונה**

$T-k-1$ **- דרגות החופש של המכנה**

אם במעבר ממודל U ל-R המשתנה המוסבר לא השתנה, ניתן לחשב את סטטיסטי המבחן WALD גם במונחים של R^2 **:**

$$WALD_{stat} = \frac{\frac{R_U^2 - R_R^2}{DF_R - DF_U}}{\frac{1-R_U^2}{DF_U}}$$

<u>כלל הכרעה לדחיית H0:</u>

$$WALD_{stat} > F_{(DF_R - DF_U, DF_U; 1-\alpha)}$$

אם דוחים את H0 המסקנה היא שהמודל המקורי (הלא-מוגבל) הוא הרלוונטי ולהיפך.

? נאמד המודל $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$ **והתקבלו התוצאות הבאות:**

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	4	646169.84	161542.46	51835.84	0.0000
Error	199	620.1683	3.1164236		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	1.7653395	R-square	0.999041
Dep Mean	178.6645	Adj R-sq	0.999022
C.V.	0.988075		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X	1	0.975736	0.042711	22.84485	0.0000
Z	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
W	1	-5.029101	0.073149	-68.75141	0.0000
S	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

הועלתה השערה כי ההשפעה על Y של משתנה S היא פי 3 מזו של משתנה Z, וכן כי החותך הוא 5.

א. מהי השערת האפס?

ב. מהו המודל המוגבל שאותו צריך לאמוד?

<u>המשך השאלה</u>

להלן אמידת המודל המוגבל:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	2	646166.01	323083.01		
Error	201	623.9983	3.104469		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	1.7619504	R-square	0.999035
Dep Mean	173.6645	Adj R-sq	0.999026
C.V.	1.0145714		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
X	1	0.978491	0.036399	26.88240	0.0000
Z+3S	1	2.999995	0.003669	817.6080	0.0000
W	1	-5.043109	0.071218	-70.81249	0.0000

ג. חשב את הסטטיסטי של WALD.

ד. כמה דרגות חופש יש במונה וכמה במכנה?

ה. האם דוחים או מקבלים את השערת האפס?

<u>מקרים פרטיים של מבחן WALD</u>

1) מבחן F למובהקות המודל הוא מקרה פרטי של WALD :

השערות:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$$
$$H_1: OTHERWISE$$

אם נבצע זאת במבחן WALD :

המודל הלא מוגבל יהיה:

U: $$Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + u_t$$

המודל המוגבל יהיה:

R: $$Y_t = \alpha + u_t$$

במקרה זה :

$$WALD_{stat} = F$$

$$WALD_{stat} = \frac{\frac{R_U^2 - R_R^2}{DF_R - DF_U}}{\frac{1 - R_U^2}{DF_U}} = \frac{\frac{R_U^2}{k}}{\frac{1 - R_U^2}{T - k - 1}} = F$$

2) מבחן t למובהקות ה-β הוא מקרה פרטי של מבחן WALD:

למשל במודל:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + u_t$$

רוצים לבדוק את מובהקות β_2

<u>השערות:</u>

$$H_0: \beta_2 = 0$$
$$H_1: \beta_2 \neq 0$$

ניתן לבדוק זאת גם במבחן WALD:

$$\textbf{U:}\quad Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + ... + \beta_k X_k + u$$

$$\textbf{R:}\quad Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_3 X_3 + ... + \beta_k X_k + u$$

במקרה זה :

$$WALD_{stat} = t^2_{\hat{\beta}}$$

$$F_{(1,DF_U;1-\alpha)} = t^2_{(DF_U;1-\frac{\alpha}{2})}$$

$$PF_{WALD} = Pt_{\hat{\beta}}$$

3) כשיש מגבלה אחת ב-HO- ניתן לבצע גם מבחן t עם הגדרת סטטיסטי $\hat{\gamma}$.

במקרה זה:

$$WALD_{stat} = t^2_{\hat{\gamma}}$$

$$F_{(1,DF_U;1-\alpha)} = t^2_{(DF_{\hat{\gamma}};1-\frac{\alpha}{2})}$$

$$PF_{WALD} = Pt_{\hat{\gamma}}$$

לדוגמא:

על מנת לאמוד את פונקצית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה:

$$C_t = \alpha + \beta_1 \cdot W_t + \beta_2 \cdot P_t + u_t$$

להלן תוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	---	---------	--------	-------	--------
Error	---	---------	52968		
C Total	---	---------			

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-107.226	------	----------	-------
W	1	0.743	------		
P	1	0.561	-------		

Covariance of Estimates

COV	INTERCEP	W	P
INTERCEP	-----------	-----------	--------
W	-----------	0.0046	-0.0090
P	-----------	-0.0090	0.016

על מנת לבדוק את ההשערה שהנטיה השולית לצרוך מתוך ההכנסה זהה לנטיה השולית לצרוך מתוך ההון, נאמדה גם המשוואה הבאה:

$C_t = \alpha + \beta_1 \cdot Y_t + u_t$ **כאשר:** Y_t**=סה"כ ההכנסה של משק בית t**

התקבל: ESS=0.4566

בידקו את ההשערה בשתי דרכים.

<u>לסיכום:</u> מתי נשתמש במבחן-t ומתי במבחן-F ?

- **כאשר בהשערות ישנם סימני אי שיוויון (השערות חד צדדיות), נשתמש בהתפלגות t**
- **כאשר יש סימן שיוויון אחד בהשערת האפס, ניתן להשתמש ב-t או ב- F (תלוי מה יותר נוח ואילו נתונים זמינים לנו).**
- **כאשר יש בהשערת האפס יותר מסימן שיוויון אחד, נשתמש בהתפלגות F.**

תרגול מסכם

חוקר אמד את התצרוכת של 500 משקי בית כפונקציה של הכנסה שלהן לפי המשוואה: $EXPENSE_t = \alpha + \beta \cdot INCOME_t + u_t$.

$EXPENSE_t$ - התצרוכת של משק הבית ה-t-י באלפי שקלים

$INCOME_t$ - ההכנסה של משק הבית ה-t-י באלפי שקלים

ההפרעות האקראיות מקיימות את כל ההנחות הקלאסיות

התקבל הפלט הבא:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	2013.105	2013.105	6495.745	0.0000
Error	498	154.3358	0.3099112		
C Total	499	2167.441			

Root MSE	0.556697	R-square	0.928794
Dep Mean	3.990208	Adj R-sq	0.928651
C.V.	13.95157		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	0.041995	0.054951	0.764236	0.4451
INCOME	1	0.713503	0.008853	80.59618	0.0000

1) **מהו Pvalue לבדיקת מובהקות המודל ע"י מבחן F?**
2) **מהו אחוז השונות בתצרוכת המוסבר ע"י ההכנסה?**
3) **מהו אומדן לתצרוכת ההתחלתית של משק בית?**
4) **האם אומדן זה מובהק?**
5) **על עוזר מחקר הטיל החוקר לבדוק את ההשערה כי על כל 1000 ש"ח נוספים בהכנסה צורך הפרט 700 ש"ח, כנגד ההשערה כי הוא צורך יותר מ-700 ש"ח. נסח את השערת האפס ואת ההשערה האלטרנטיבית.**
6) **מהו הסטטיסטי t לבדיקת ההשערה?**

7) מהו הסטטיסטי WALD לבדיקת ההשערה?

8) התברר כי היתה טעות בנתונים, וכי יש להוסיף 1000 ש"ח לתצרוכת של כל משק בית:

א. ההוספה תגדיל את האומד ל- α : נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

ב. בעקבות ההוספה האומד ל- α יהיה מובהק: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

ג. ההוספה תשנה את האומד ל- β : נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

ד. ההוספה תשנה את R^2 : נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

החוקר טען כי יש להוסיף לפונקצית התצרוכת גם את השפעת העושר. העושר של משק בית מורכב מתוכניות החסכון שלו ($SAVINGS$) ומניירות הערך שיש לו (NE). שתי סדרות הנתונים הן באלפי שקלים.

החוקר אמד את המשוואה:

$$EXPENSE_t = \alpha + \beta_1 \cdot INCOME_t + \beta_2 \cdot SAVINGS_t + \beta_3 \cdot NE_t + u_t$$

וקיבל כי סכום ריבועי הסטיות של הטעויות הוא 121.

9) מהי השערת האפס לבדיקת הטענה של החוקר (שהמודל החדש נכון ולא המקורי)?

10) מהו הסטטיסטי WALD לבדיקת ההשערה?

החוקר רצה לבדוק את ההשערה כי הנש"צ מתוך ההכנסה שווה ל-0.6 וכי השפעת ניירות הערך על התצרוכת היא פי 2 מהשפעת תוכניות החסכון.

11) מהי השערת האפס לבדיקה זו?

12) המודל המוגבל לבדיקת ההשערה יהיה מהצורה $Z_t = \gamma_0 + \gamma_1 W_t + v_t$.

בטא את Z_t, ו- W_t באמצעות המשתנים המקוריים.

סיכום: מבחנים לדוגמא

<u>פרק 7 - מבחני ספציפיקציה- מבחן LM (כופלי לגרנג')</u>

במבחן כופלי לגרנג' (LM) אנו בודקים האם משתנה או משתנים מסבירים מסוימים רלוונטיים למודל.

לדוגמא:

נניח שיש לנו מודל הכולל 4 משתנים מסבירים <u>(UNRESTRICTED)</u>:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}$$

לגבי השניים הראשונים אנו בטוחים כי הם רלוונטיים וחייבים להופיע במודל. לגבי השניים האחרונים אנחנו לא בטוחים.

<u>השערות:</u>

$$H0: \beta_3 = \beta_4 = 0$$
$$H1: OTHERWISE$$

<u>המודל המוגבל (RESTRICTED) הינו:</u>

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t}$$

במבחן LM אומדים את המודל המוגבל ומקבלים עבור כל תצפית את הסטייה מקו הרגרסיה - $Y_t - \hat{Y}_t = \hat{u}_t$.

כעת אומדים את <u>רגרסיית העזר</u> שבה מנסים לנבא את הסטייה מקו הרגרסיה עבור כל תצפית:

$$\hat{u}_t = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + \delta_2 x_{2t} + \delta_3 x_{3t} + \delta_4 x_{4t} + \omega_t$$

<u>הרציונאל של המבחן הוא:</u>

אחת מן ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה היא כי המשתנים הב"ת אינם מתואמים עם טעות האמידה: $\operatorname{cov}(X_t, u_t) = 0$.

המשתנים המצויים בתוך המודל (השניים הראשונים), לא מתואמים עם טעות האמידה ($R^2_{\hat{u}12}=0$).

לגבי שני המשתנים שיש לנו ספק לגביהם:

אם הם יהיו מתואמים עם טעות האמידה ($R^2_{\hat{u}34}\neq 0$) – זו אינדיקציה ש"שכחנו" להוסיפם למודל וכי הם רלוונטיים (דוחים H0).

אם הם אינם מתואמים עם טעות האמידה ($R^2_{\hat{u}34}=0$), המודל מושלם כמו שהוא (מקבלים את H0).

- **הסבר באמצעות מעגלי וואן:**

<u>חישוב הסטטיסטי:</u>

הכפלת ה- R^2 של רגרסיית העזר במספר התצפיות (T).

$$LM_{stat}=R^2\cdot T$$

<u>כלל הכרעה של H0:</u>

אם $LM_{stat}>\chi^2_m$ נדחה את H0.

m- מס' ההגבלות ב-H0.

לדוגמא:

UNRESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	------------	-----------	0.0000
Error	------	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	------	R-square	-----
Dep Mean	----	Adj R-sq	-----
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X1	1	0.975726	0.042711	22.84485	0.0000
X2	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

RESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646001.81			
Error	------	788.2			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	---------	R-square	-----
Dep Mean	---------	Adj R-sq	-----
C.V.	---------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	7.067731	0.656604	10.76406	0.0000
X1	1	26.36455	0.756627	34.84485	0.0000
X2	1	29.58626	0.076993	384.2721	0.0000

רגרסיית עזר

Dependent variable :RES

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	--------	-------	0.0000
Error	------	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	---------	R-square	0.213
Dep Mean	---------	Adj R-sq	-------
C.V.	---------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.9608892	0.776604	7.675584	0.0000
X1	1	1.2077723	0.978845	1.233875	0.8455
X2	1	0.4840697	0.886754	0.545889	0.9976
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

1) **בדקו את הטענה כי לפחות אחד מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל בשתי דרכים.**

2) **איזה מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל?**

****<u>שימו לב</u> כי:**

עבור <u>המשתנים הנוספים למודל</u> -כל המדדים (הבטות, ערכי t וה-Pvalu) ברגרסיית העזר שווים לאלו של הרגרסיה הלא מוגבלת.

עבור <u>המשתנים הקיימים במודל</u> -המדדים אינם שווים בין שתי הרגרסיות.

3) **הסבירו את הקשרים בין שלוש המשוואות: (R) (U) ו (עזר) ואת הקשר בין מבחן WALD ומבחן LM.**

הקשר בין משוואות ה-U, ה-R והעזר:

א. U=R+עזר

ב. $ESS_U = ESS_y$

ג. $ESS_R = TSS_y$

ד. $R_y^2 = 1 - \frac{ESS_y}{TSS_y} = 1 - \frac{ESS_U}{ESS_R} = \frac{ESS_R - ESS_U}{ESS_R}$

4) שחזרו בעזרת שתי המשוואות הראשונות (U ו- R) את LM_{stat}

5) שחזרו בעזרת המשוואה האחרונה (רגרסיית העזר) את $WALD_{stat}$

פרק 8 - טעויות ספציפיקציה

טעויות ספציפיקציה הן טעויות בניסוח משוואת הרגרסיה.

ישנם שני סוגים של טעויות ספציפיקציה:

1) **הוספת משתנה בלתי תלוי שאיננו רלוונטי (איננו מובהק) למודל.**

2) **השמטת משתנה בלתי תלוי רלוונטי (מובהק) למודל.**

1) הוספת משתנה לא רלוונטי

נניח שהמודל האמיתי (הנכון) כולל שני משתנים בלתי תלויים, אבל אנחנו חושבים בטעות כי הוא כולל גם משתנה בלתי תלוי שלישי.

המודל האמיתי: $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$

המודל הנאמד (הטעותי): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \varepsilon$

אם נקבל את HO במבחן t למובהקות β_3 נסיק כי המשתנה איננו רלוונטי ונאמוד את המודל מחדש הפעם ללא המשתנה השלישי.

אולם, גם אם לא נוכל לאמוד מחדש, הימצאותו של משתנה שאיננו רלוונטי במודל הרגרסיה איננה פוגמת ברלוונטיות של המשתנים האחרים במודל ולא בתכונות החיוניות למבחני המובהקות שלהם.

כלומר, האומדים האחרים ($\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$) יהיו חסרי הטיה , יעילים ועקיבים לפרמטרים באוכלוסיה (α, β_1, β_2) וגם השונויות הנאמדות תהיינה חסרות הטיה, כך שניתן יהיה לבצע על האומדים האחרים בדיקת השערות תקפה.

<u>מסקנה:</u>

טעות ספציפיקציה של הוספת משתנה שאיננו רלוונטי למודל איננה טעות שיוצרת בעיה.

****שימו לב כי לעיתים נרצה להשאיר משתנה שאיננו מובהק במודל. מדובר במקרים בהם המשתנה הנוסף מעלה את $AdjR^2$ למרות שאיננו מובהק, כיוון ש:**

$1 < t_{\hat{\beta}}$ (לפי חוק חיטובסקי) .

2) השמטת משתנה רלוונטי

נניח שהמודל האמיתי כולל שני משתנים בלתי תלויים אולם אנו אומדים בטעות מודל הכולל רק את אחד המשתנים הב"ת:

המודל האמיתי: $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$

המודל הנאמד (הטעותי): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$

במקרה זה עלולה להיווצר בעיה בהשמטת משתנה x_2.

א. <u>בעיה באמידה של β_1 :</u>

הבעיה תיווצר במקרה ובו קיים קשר בין המשתנה הב"ת שהושמט לבין המשתנים הב"ת האחרים במודל.

כאשר <u>$r_{12} \neq 0$</u>, בהיעדר x_2, $\hat{\beta}_1$ לא ישקף טוב את הפרמטר באוכלוסיה β_1 (יהיה אומד מוטה לפרמטר) מכיוון שהוא "יספח לעצמו" חלק מן ההשפעה שיש ל- x_2 על Y.

- **הדגמה באמצעות מעגלי ואן:**

****שימו לב- אם מקדם השיפוע של x_1 שונה במודל הנאמד לעומת במודל האמיתי ניתן להסיק מכך כי** $\text{cov}_{12} \neq 0$

ניתן להעריך את <u>כיוון ההטיה</u> (חיובית או שלילית) של האומד ל- $\hat{\beta}_1$ ביחס לפרמטר β_1 באוכלוסיה:

גודל ההטיה: $\beta_2 \cdot \frac{\text{cov}(x_1,x_2)}{\text{cov}(x_1,x_1)}$ **או** $\beta_2 \cdot \frac{S_{12}}{S_{11}}$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{S_{12}}{S_{11}}$$

אם $S_{12} = 0$ **האומד ל-** β_1 **יהיה חסר הטיה (למרות היעדרו של** x_2 **מהמודל).**

אם S_{12} **ו-** β_2 **הם שווי סימן-ההטיה חיובית-האומד ל-** β_1 **יהיה מוטה כלפי מעלה.**

אם S_{12} **ו-** β_2 **הם שוני סימן-ההטיה שלילית- האומד ל-** β_1 **יהיה מוטה כלפי מטה.**

ב. <u>בעיה באמידה של α:</u>

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \beta_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \frac{S_{12}}{S_{11}})$$

ניתן לראות כי גם כאשר $S_{12} = 0$ **האומד ל-** α **יהיה מוטה.**

רק כאשר $S_{12} = 0$ **וגם** $\bar{x}_2 = 0$ **האומד ל-** α **יהיה חסר הטיה.**

ג. <u>בעיה באמידת השונות של β_1 ו- α:</u>

אומד השונות יהיה מוטה תמיד כלפי מעלה כי הוא איננו לוקח בחשבון את החלק ש- x_2 **מסביר ב-Y:**

$S^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{ESS}{T-k-1}$ **מכיוון ש-ESS מוטה כלפי מעלה אז** $s^2_{\hat{\beta}_1}$ **מוטה כלפי מעלה.**

<u>מסקנה:</u>

בדיקת ההשערות על הפרמטרים של המודל הנאמד איננה תקפה.

<u>סיכום:</u>

בהיעדר x_2**, בדיקות ההשערות לפרמטרים של המודל הטעותי אינן תקפות::**

	אומד ל- β_1	**אומד ל-** α	**אומד לשונות הפרמטרים**
$S_{12} = 0$	**חסר הטיה**	**מוטה** **אלא אם-**	**מוטה (כלפי מעלה)**

		$\bar{x}_2 = 0$	
$S_{12} \neq 0$	**מוטה** **כיוון ההטיה:** **חיובי: S_{12} ו- β_2 שווי סימן** **שלילי: S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן**	**מוטה**	

<u>פרק 9 - מולטיקוליניאריות</u>

מולטיקוליניאריות היא תופעה סטטיסטית בעייתית המתייחסת למתאם בין המשתנים המסבירים במודל.

נבחין בין מולטיקוליניאריות מלאה לחלקית.

1) מולטיקוליניאריות מלאה

מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל.

הדבר קורה כאשר משתנה מסביר אחד הוא קומבינציה ליניארית מלאה של המשתנה המסביר השני:

$x_1 = a + bx_2$ (x_1 **הוא קומבינציה ליניארית מלאה של** x_2) **מכאן ש:** $r_{12} = 1$.

****שימו לב כי מדובר בטרנספורמציה ליניארית ולא בטרנספורמציה אחרת (למשל** $x_1 = x_2^2$ **), אז בהכרח** $r_{12} \neq 1$.

במצב של מולטיקוליניאריות מלאה אין כל השפעה של המשתנה האחד מעבר לשני.

לדוגמא: נניח שאנו רוצים לאמוד את הביקוש לדירות בתל אביב כפונקציה של מחירן בשקלים (x_1) ובדולרים (x_2):

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$$

בהנחה ששער הדולר נותר קבוע, המחיר בדולרים מהווה קומבינציה ליניארית מלאה של המחיר בשקלים (המחיר בשקלים * שער הדולר). במקרה כזה לא ניתן להפריד את ההשפעה של שני המשתנים הב״ת זה מזה ומדובר בעצם באותו המשתנה.

מדוע זה בעייתי?

כיוון שלא ניתן לאמוד את המודל שכן אר״פ אינם מוגדרים.

הסבר: בגזירת אר״פ, נוצר מצב של תלות ליניארית בין המשוואות הנורמאליות וחלקן יתבטלו. נִוותר עם יותר נעלמים ממשוואות ועם אינסוף פיתרונות, כך שלא נוכל להגדיר את האומדים.

בדוגמא שלנו:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$$

גזירת $\hat{\alpha}$ **:** $\sum \hat{u}_t = 0$

גזירת $\hat{\beta}_1$ **:** $\sum \hat{u}_t x_1 = 0$

גזירת $\hat{\beta}_2$ **:** $\sum \hat{u}_t x_2 = 0$

מכיוון ש: $x_1 = bx_2$ **(b = שער הדולר) אז גזירת** $\hat{\beta}_1$ **:** $\sum \hat{u}_t (bx_2) = 0$, $b\sum \hat{u}_t x_2 = 0$, $0 = 0$ **והמשוואה מתבטלת.**

<u>פיתרון</u>: הורדת אחד המשתנים ואמידת המשוואה מחדש בלעדיו.

2) מולטיקוליניאריות חלקית

כאשר יש מתאם גבוה מאוד בין משתנים מסבירים במודל (אך לא מושלם) עלולה להיווצר בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית.

לדוגמא: נניח שאנו רוצים לאמוד את הציונים בתואר ראשון ע"י ציוני הפסיכומטרי (x_1) וציוני הבגרות (x_2):

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$$

מכיוון שיש מתאם גבוה בין ציוני הפסיכומטרי וציוני הבגרות לא נוכל לבודד באופן מלא את ההשפעה המדויקת של כל אחד מהם על ציוני ה-.B.A.

כל אחד מהמשתנים הב"ת "יגזול" מן ההשפעה הייחודית שיש למשתנה הב"ת השני על המשתנה התלוי, כך שבסופו של דבר, למרות שהמודל עם שני המשתנים הב"ת יהיה מובהק, התרומה הייחודית של כל משתנה ב"ת לניבוי התלוי לא תהיה מובהקת.

<u>זיהוי מולטיקוליניאריות חלקית:</u>

1) **כאשר קיימת <u>סתירה</u> בין התוצאה <u>במבחן F</u> למובהקות המודל (המודל מובהק) לבין <u>מבחני t</u> למובהקות השיפועים (אף אחד מן השיפועים איננו מובהק).**

הסתירה נוצרת כתוצאה מהגדלת השונות של כל אחד מהשיפועים בשל המתאם הגבוה בין הב"ת, באופן שלא מאפשר לדחות את השערת האפס למובהקות השיפועים:

$$s^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{MSE}{SSX_1(1-r_{12})}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$$

2) **<u>רגישות לספציפיקציה</u>- הורדת משתנה ב"ת שאיננו מובהק תהפוך משתנים ב"ת אחרים במודל למובהקים. אם אין בעיה של מולטיקוליניאריות, הורדת משתנים ב"ת שאינם רלוונטיים מהמודל, לא אמורה להשפיע על מובהקותם של המשתנים הב"ת האחרים.**

3) **<u>סימנים הפוכים</u>-כאשר השיפועים של המשתנים הב"ת מקבלים סימנים הפוכים מכיוון ההשפעה שלהם על המשתנה התלוי. אם למשל, x_1 משפיע חיובית על Y ואילו x_2 משפיע שלילית על Y אבל הם יופיעו במשוואת הרגרסיה עם סימנים הפוכים ($\hat{\beta}_1$ שלילית ואילו $\hat{\beta}_2$ חיובית), יש לחשוד שקיימת בעיה של מולטי קולינאריות במודל (מתאם גבוה מאוד בין המשתנים הב"ת ש"מבלבל" את הסימנים שלהם).**

<u>השלכות של מולטיקוליניאריות חלקית:</u>

מולטיקוליניאריות חלקית איננה פוגעת בתכונות של אר"פ (הם נותרים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים) ולא באומד השונות של האומדים (שנותר חסר הטיה) כך שבדיקת השערות תוך שימוש באומדים הללו תהיה תקפה (זאת בניגוד למולטיקוליניאריות מלאה).

במובן הזה, בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית דומה לבעיה של הוספת משתנה ב"ת שאיננו רלוונטי.

<u>פיתרונות למולטיקוליניאריות חלקית:</u>

1) **ברוב המקרים נשקול להוריד את אחד המשתנים.**

יחד עם זאת, כאשר המובהקות של המשתנים היא גבולית $1 < t_{\hat{\beta}} < 2$, יתכן ונותיר את שניהם בתוך המודל כיוון שבסך הכול יש עליה ב- $AdjR^2$ (לפי חוק חיטובסקי).

2) ניתן לעיתים לאחד את שני המשתנים למשתנה אחד. למשל, בדוגמא של ניבוי ציוני ה-.B.A על ידי ציוני הפסיכומטרי והבגרות, יש לשקול להגדיר משתנה חדש שיהווה שקלול ציוני הפסיכומטרי והבגרות ולהשתמש בו לניבוי ה-.B.A.

<u>שלבי בדיקת ההשערות:</u>

1) מבצעים מבחן F לבדיקת מובהקות המודל.

2) במידה והמודל מובהק, מבצעים מבחן t למובהקות כל אחד מהשיפועים.

3) ביצוע מבחן WALD לבדיקת כל השיפועים שלא יצאו מובהקים:

א. אם מקבלים את H0: אין סתירה עם מבחני t- אין בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית, נוריד את קבוצת המשתנים הלא רלוונטיים מהמודל.

ב. אם דוחים את H0: יש סתירה עם מבחני t- קיימת בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית, יש להוריד מן המודל כל פעם משתנה אחד ולבצע מבחן WALD בלעדיו, עד שמזהים את המשתנה/משתנים שיש להוריד מהמודל.

פרק 10 - סיכום ותרגול של טעויות ספציפיקציה ומולטי קולינאריות

סיכום

<table>
<tr><th>הבעיה</th><th>הגדרה</th><th>זיהוי</th><th>השלכות</th><th>פיתרון</th></tr>
<tr>
<td>הוספת משתנה
לא רלוונטי</td>
<td>המודל האמיתי:
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\varepsilon$
המודל הנאמד (הטעות):
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$</td>
<td>קבלת H0 במבחן t למובהקות β_2</td>
<td>ניתן לבצע בדיקת השערות
אר"פ ($\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2$) חסרי הטיה
אומדי השונות ($S^2_{\hat{\alpha}},S^2_{\hat{\beta}_1},S^2_{\hat{\beta}_2}$) חסרי הטיה</td>
<td>*הורדת המשתנה</td>
</tr>
<tr>
<td>השמטת משתנה
רלוונטי</td>
<td>המודל האמיתי:
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$
המודל הנאמד (הטעות):
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\varepsilon$</td>
<td>דחית H0 במבחן t למובהקות β_2</td>
<td>לא ניתן לבצע בדיקת השערות
<table>
<tr><th>בהיעדר x_2:</th><th>אומד ל- β_1</th><th>אומד ל- α</th><th>אומד לשונות הפרמטרים</th></tr>
<tr><td>$S_{12}=0$</td><td>חסר הטיה</td><td>מוטה
אלא אם- $\bar{x}_2=0$</td><td>מוטה חיובית</td></tr>
<tr><td>$S_{12}\neq0$</td><td>מוטה חיובית:
β_2 ו- S_{12} שווי סימן
מוטה שלילית:
β_2 ו S_{12} מנוגדי סימן</td><td>מוטה</td><td>מוטה חיובית</td></tr>
</table>
</td>
<td>הוספת המשתנה</td>
</tr>
<tr>
<td>מולטיקוליניאריות
מלאה</td>
<td>מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$
כאשר $r_{12}=\pm1$</td>
<td>אם: $x_1=a+bx_2$
אז: $r_{12}=1$</td>
<td>לא ניתן לבצע בדיקת השערות
אר"פ ($\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2$) בלתי מוגדרים.</td>
<td>הורדת אחד המשתנים</td>
</tr>
<tr>
<td>מולטיקוליניאריות
חלקית</td>
<td>מתאם חזק בין המשתנים המסבירים במודל
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$
כאשר $0.7<|r_{12}|<1$</td>
<td>א.סתירה בין מבחן F ל- t
ב.רגישות לספציפיקציה
ג.סימנים הפוכים</td>
<td>ניתן לבצע בדיקת השערות
אין פגיעה בתכונות אר"פ ושונותם</td>
<td>**הורדת אחד המשתנים
או איחודם</td>
</tr>
</table>

* במידה והמובהקות גבולית ($1<t_{\hat{\beta}_2}<2$) נשקול להשאיר משתנה לא רלוונטי כי מעלה את $AdjR^2$ (חוק חיטובסקי).

** במידה ומובהקותם גבולית ($1<t_{\hat{\beta}}<2$) נשקול להשאיר את שניהם בשל העלייה ב- $AdjR^2$ (חוק חיטובסקי).

תרגול

שאלה מס' 1

להלן מודל של שכר W_t, כפונקציה של שנות לימוד S_t :

$$W_t = \alpha + \beta \cdot S_t + u_t \quad \textbf{(1)}$$

להלן מודל של שכר W_t, כפונקציה של שנות לימוד S_t ושל גיל A_t :

$$W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + v_t \quad \textbf{(2)}$$

כל האומדים חיוביים ומובהקים וקיים קשר שלילי בין גיל להשכלה.

א. $\hat{\beta}_1$ במשוואה (1) הוא:

1. **אומד חסר הטיה**
2. **אומד מוטה שלילית**
3. **אומד מוטה חיובית**
4. **אומד מוטה, אך לא ניתן לדעת את כיוון ההטיה.**

ב. ניתן להשתמש במבחן t לבדיקת מובהקות השיפוע במשוואה (1). נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. בנוסף למשתנים במשוואה השנייה, החליט החוקר להוסיף גם את משתנה הוותק, EXP_t . מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים (מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 3:

$$W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + \beta_3 \cdot EXP_t + w_t \quad \textbf{(3)}$$

חווה דעתך על המשוואה השלישית.

<u>שאלה מס' 2</u>

נתונות ארבע משוואות הרגרסיה הבאות (כאשר הסטיות במודל האמיתי מקיימות את הנחות הרגרסיה הקלאסיות):

(1) **כאשר התקבל :** $\sum \hat{V}_t^{\,2} = \sum (X_{2t} - \overline{X}_{2t})^2$

(2)

(3)

(4) $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \Sigma_t$

(6.3)

(המספרים בסוגריים הם ערכי t של אומדני המקדמים).

לגבי הטענות הבאות, קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא, והסבירו :

א. **האומד של β_1 במשוואה (2) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.**

ב. **האומד של β_1 במשוואה (3) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.**

ג. **האומד של β_1 במשוואה (4) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.**

ד. **האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה ל $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2).**

ה. **השונות התיאורטית של האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה לשונות התיאורטית של $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2), אך אומדני השונויות שונים.**

ו. **האומד ל - α במשוואה (4) הינו חסר הטיה.**

ז. **האומד ל - α במשוואה (3) הינו חסר הטיה.**

ח. R^2 של משוואה (2) גדול מ - R^2 של משוואה (3).

ט. $\bar{R}^2$ של משוואה (2) גדול מ - $\bar{R}^2$ של משוואה (3).

<u>שאלה מס' 3</u>

נתון המודל :

חוו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

א. בהנחה כי מתקיים: $R^2 = 0.92$

(0.3) (0.5)

הערכים בסוגריים הם ערכי t למובהקות הבטות.

יש טעות במודל כי המודל מובהק והמקדמים לא: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ב. בהנחה כי מתקיים : $X_{1t} - 2X_{2t} = 1$

לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. בהנחה כי מתקיים: $x_{1t} = x_{2t}^2$.

לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ד. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים א ו- ב.

ה. בהנחה כי מתקיים: $r_{12} = 0.98$

1. לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים:

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

2. איזו בעיה עלולה להיווצר במודל ומהן השלכותיה.

3. בהנחה שהמודל יצא מובהק אולם הבטות אינן מובהקות וערכי t למובהקות הבטות הן כדלקמן: $\begin{matrix} t_{\hat{\beta}_1} = 1.31 \\ t_{\hat{\beta}_2} = 1.45 \end{matrix}$ **, מה יהיה הפיתרון הטוב ביותר, לדעתכם, לבעיה במודל (אליה התייחסתם בסעיף 2)?**

א. להוריד את x_1

ב. להוריד את x_2

ג. להוריד את שני המשתנים.

ד. להותיר את שני המשתנים.

פרק 11 - משתני דמי

הנושא של משתני דמי מטפל בהכנסת משתנים ב"ת איכותיים למודל הרגרסיה.

עד כה כל המשתנים הב"ת שהכנסנו למודל היו כמותיים, כלומר קיבלו ערכים מספריים.

למשל, נניח שאנו סבורים שמס' שנות הלימוד של אדם משפיעות על שכרו:

W_t = **השכר (המשתנה התלוי)**

S_t = **שנות לימוד (המשתנה הב"ת)**

משוואת הרגרסיה: $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t$

במקרה זה המשתנה המסביר (כמו גם המוסבר) הוא כמותי.

נניח שאנו סבורים שגם משתנה המגדר משפיע על השכר. משתנה זה איננו כמותי כמו שנות לימוד אלא איכותי שכן הוא לא מקבל ערכים מספריים אלא ערכים קטגוריאליים כ"גבר" או "אישה".

נשאלת השאלה כיצד נכניס אותו לתוך משוואת הרגרסיה?

נגדיר משתנה D שיקבל את הערך 0 אם מדובר ב"אישה" ואת הערך 1 אם מדובר ב"גבר".

משתנה כזה נקרא משתנה דמי (dummy variable).

לעומת משתנה רגיל ש"פועל" תמיד, משתנה זה "יפעל" רק אם מדובר בגבר.

ניתן להכניס את משתנה הדמי למודל בשלושה אופנים שונים:

(1) משתנה דמי לחותך- המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד

(2) משתנה דמי לשיפוע- המין משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד

(3) משתנה דמי לכל הפונקציה- המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע

(1) משתנה דמי לחותך

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$

החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.

שכר ההתחלתי של אישה: α_0

שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$

הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 **(הפרש בין החותכים)**

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H0: \alpha_1 = 0$

**** השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.**

? על בסיס מדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת התקבלו התוצאות הבאות:

$$W_t = 5500 + 1043 \cdot D + 119 \cdot S_t$$

(S.E) (134) (56) (24)

המספרים בסוגריים הם טעויות התקן של מבחני המובהקות לפרמטרים.

א. מהו השכר ההתחלתי של גבר בעל 12 שנות לימוד?

ב. מה ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים?

ג. האם הבדל זה מובהק באוכלוסיה?

ד. בדקו את הטענה כי השכר ההתחלתי של גברים גבוה ביותר מ- 500 ₪ מזה של נשים.

ה. בדקו את הטענה שהשכר ההתחלתי של נשים נמוך ב-600 ₪ מזה של גברים.

<u>פונקצית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד</u>

המגדר הוא המשתנה היחיד במשוואה:

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + u_t$$

החותך מייצג כאן את השכר ה<u>ממוצע</u> עבור כל קטגוריה.

שכר הממוצע של אישה: α_0

שכר הממוצע של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$

הבדל בשכר הממוצע בין נשים וגברים: α_1 **(הפרש בין החותכים)**

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t : $H0:\alpha_1 = 0$ **(מבחן זהה למבחן t להבדל בין ממוצעים).**

? **על אותו המדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת ביקש החוקר לבדוק האם יש הבדל בשכר הממוצע בין גברים לנשים. תוצאות האמידה:**

$$W_t = 5200 + 1120 \cdot D$$

נתון: $S_{\hat{\alpha}_1} = 63$

בדקו האם קיים הבדל מובהק בשכר <u>הממוצע</u> בין נשים וגברים?

(2) משתנה דמי לשיפוע

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד.

$$W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 D S_t + u_t$$

השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.

אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד- β_0

אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד- $\beta_0 + \beta_1$

הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 **(הפרש השיפועים)**

בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H0:\beta_1 = 0$

**** החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.**

? על בסיס אותו מדגם, ביקש החוקר לדעת האם קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד. תוצאות האמידה נתונות להלן:

$$W_t = 5000 + 110 \cdot S_t + 120 \cdot D \cdot S_t + u_t$$

(68) (23) (25)

בדוק את ההשערה.

(3)משתנה דמי לכל הפונקציה

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע. הווה אומר, גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$

השכר ההתחלתי של אישה: α_0

השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$

הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 **(הבדל בחותכים)**

אצל אישה-התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0

אצל גבר-התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0 + \beta_1$

הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 **(הבדל בשיפועים)**

<u>בדיקת השערות למשתני הדמי:</u>

באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$

H1: לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0

אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד:

$HO:\alpha_1=0$ **ו-** $H0:\beta_1=0$

<u>מבחן CHOW</u>

דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות, <u>בלא יצירת משתני דמי</u>:

חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי. מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).

עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד .

נשים: $W_t=\alpha_f+\beta_f X_t+u_t$

גברים: $W_t=\alpha_m+\beta_m X_t+u_t$

השערות: $H_0:\alpha_f=\alpha_m;\beta_f=\beta_m$

לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD שהשתמשנו בו מקודם):

המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן לא יכלול את המדגם המאוחד כי אין צורך בשתי רגרסיות נפרדות:

$$W_t=\alpha+\beta X_t+u_t$$

המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם:

$$ESS_U=ESS_f+ESS_m$$
$$DF_U=DF_f+DF_m$$

$$CHOW_{stat}=\frac{\dfrac{ESS_R-(ESS_f+ESS_m)}{DF_R-(DF_f+DF_m)}}{\dfrac{ESS_f+ESS_m}{DF_f+DF_m}}=WALD_{stat}$$

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. **אם דחינו את HO במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.**
2. **בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.**

? חוקר רצה לבדוק את הטענה שסוג הכביש משפיע על מס׳ תאונות הדרכים בקטעי כביש בינעירוניים, בהינתן נפח התנועה.

החוקר בדק האם <u>הפונקציה</u> של מס׳ התאונות בהינתן נפח התנועה, שונה בין כבישים מהירים לבין כבישים שאינם מהירים. לשם כך אמד החוקר את ארבע המשוואות הבאות:

(1) $\boxed{}$ **כבישים מהירים בלבד**

(2) $\boxed{}$ **כבישים לא - מהירים בלבד**

(3) $\boxed{}$ **שני סוגי הכביש (כל המדגם)**

(4) $\boxed{}$

כאשר: $\boxed{}$ = **מס׳ תאונות הדרכים הקטלניות בקטע כביש t בשנה**

$\boxed{}$ = **נפח התנועה בקטע כביש t ליום באלפים**

= משתנה דמי המקבל את הערך 1 כאשר הכביש מהיר ,

ו- 0 כאשר הכביש לא מהיר.

תוצאות אמידת המשוואות מופיעות בהמשך השאלה.

1) בדקו את טענת החוקר בשתי דרכים שונות. ציינו איזה מן המשוואות רלוונטיות עבור כל דרך.

2) חשבו את הערכים המספריים עבור אומדני משוואה (4).

3) מהו האומדן הנקודתי למס' התאונות בכביש מהיר כאשר נפח התנועה עומד על ארבעת מכוניות ליום בקטע הכביש האמור?

הועלתה הטענה כי המקדם להשפעה של נפח התנועה בדרכים מהירות הינו כפול מזה שבדרכים לא -מהירות.

4) מהי השערת האפס לבדיקת הטענה (במונחי משוואה (4))?

5) מהי הרגרסיה "תחת " למבחן WALD ?

משוואה (1) - כבישים מהירים בלבד

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	344
Number of Observations Used	344

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	4700.81174	4700.81174	89.12	<.0001
Error	342	18039	52.74684		
Corrected Total	343	22740			

Root MSE	7.26270	R-Square	0.2067
Dependent Mean	5.10465	Adj R-Sq	0.2044
Coeff Var	142.27617		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	1.55289	0.54303	2.86	0.0045
avgd	1	0.02098	0.00222	9.44	<.0001

משוואה (2) - כבישים לא מהירים בלבד

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	410
Number of Observations Used	410

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	971.99073	971.99073	145.83	<.0001
Error	408	2719.34830	6.66507		
Corrected Total	409	3691.33902			

Root MSE	2.58168	R-Square	0.2633
Dependent Mean	1.38780	Adj R-Sq	0.2615
Coeff Var	186.02612		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.14978	0.16360	0.92	0.3605
avgd	1	0.02877	0.00238	12.08	<.0001

משוואה (3) - שני סוגי הכביש (כל המדגם)

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	754
Number of Observations Used	754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	8052.00804	8052.00804	288.84	<.0001
Error	752	20964	27.87730		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.27990	R-Square	0.2775
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2765
Coeff Var	171.22758		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.73903	0.23665	3.12	0.0019
avgd	1	0.02330	0.00137	17.00	<.0001

משוואה (4)

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	754
Number of Observations Used	754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	8256.966	2752.322	99.44	<.0001
Error	750	20759	27.678		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.26102	R-Square	0.2846
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2817
Coeff Var	170.61553		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.14978	0.33340	0.45	0.6534
type	1				0.0067
avgd	1				<.0001
avgdtype	1				0.1283

סיכום ביניים:

	משתנה דמי **לחותך**	משתנה דמי **לשיפוע**	משתנה דמי **לכל הפונקציה**
המודל	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot X_t + u_t$	$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$
ההשערה במילים	**קיים הבדל בין הקטגוריות ב-Y ההתחלתי (בחותך).**	**קיים הבדל בין הקטגוריות בתוספת ל- Y בגין X (בשיפוע).**	**קיים הבדל בין הקטגוריות במשוואת הרגרסיה כולה (בחותך ובשיפוע).**
בדיקת ההשערה	**מבחן t להפרש החותכים:** $H0: \alpha_1 = 0$	**מבחן t להפרש השיפועים:** $H0: \beta_1 = 0$	**מבחן WALD להפרש בין הפונקציות (החותכים והשיפועים):** $H0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$ ****ניתן לבדוק את ההשערה בדבר הבדל בין הפונקציות גם במבחן CHOW.** **אם דוחים את HO יש לברר את מקור ההבדל באמצעות מבחני t (אפשרי רק ב-WALD):** $H0: \alpha_1 = 0$ $H0: \beta_1 = 0$

משתני דמי אם המשתנה האיכותי יכול לקבל יותר משני ערכים

כאשר המשתנה האיכותי כלל שני ערכים בלבד (למשל, מגדר: גבר, אישה) הסתפקנו במשתנה דמי אחד.

במקרים רבים המשתנה האיכותי כולל יותר משני ערכים/קטגוריות. במקרה כזה נגדיר מס' משתני דמי כמספר הקטגוריות פחות אחד.

למשל, את המשתנה האיכותי של עונות השנה הכולל 4 ערכים: אביב, קיץ, סתיו, חורף נייצג באמצעות 3 משתני דמי:

D_1 **יקבל את הערך 1 אם מדובר באביב ו-0 אחרת.**

D_2 **יקבל את הערך 1 אם מדובר בקיץ ו-0 אחרת.**

D_3 **יקבל את הערך 1 אם מדובר בסתיו ו-0 אחרת.**

אם מדובר בחורף אז כל משתני הדמי יקבלו את הערך 0 ולכן החורף היא קבוצת הייחוס.

נניח שאנו רוצים לבדוק עונתיות במחירי הירקות:

$V_t =$ **מדד מחירי הירקות**

$p_t =$**מדד המחירים לצרכן**

(1) <u>**משתני דמי לחותך**</u>

<u>**הטענה:**</u> **יש הבדל בין עונות השנה במחיר ההתחלתי של הירקות**

<u>**המודל:**</u> $V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$

כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב- β.

למחיר זה יתווסף α_0 **בחורף,** $\alpha_0 + \alpha_1$ **באביב,** $\alpha_0 + \alpha_2$ **בקיץ ו-** $\alpha_0 + \alpha_3$ **בסתיו.**

ניתן לראות כי: α_0 **:החותך בקטגוריה שהושמטה**

$\alpha_0 + \alpha_i$ **:החותך בקטגוריה i.**

<u>**בדיקת השערות:**</u>

השערות:

$$H0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
$$H1: OTHERWISE$$

המבחן הסטטיסטי : מבחן WALD:

(U) $V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \beta \cdot P_t + u_t$

(R) $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$

****שימו לב שהחותך במשוואה המוגבלת איננו α_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.**

אם נדחה את HO במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין החותכים על ידי מבחני t:

1. **האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין האביב לחורף:** $H0: \alpha_1 = 0$
2. **האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הקיץ לחורף:** $H0: \alpha_2 = 0$
3. **האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הסתיו לחורף:** $H0: \alpha_3 = 0$

? א. הועלתה הטענה כי יש הבדל במחיר ההתחלתי בין האביב לקיץ.

1. **מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?**
2. **פרטו שני מבחנים סטטיסטיים בעזרתם ניתן לבדוק את הטענה.**

ב. הועלתה הטענה כי יש רק שתי עונות המשפיעות על מחיר הירקות ההתחלתי: קיץ+אביב, חורף+סתיו.

1. **מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?**
2. **מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? פרטו.**

(2) <u>משתני דמי לשיפוע</u>

<u>הטענה:</u> יש הבדל בין עונות השנה בתוספת למחיר הירקות בגין המחיר לצרכן

<u>המודל:</u> $V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t$

המחיר ההתחלתי של הירקות שווה בין עונות השנה (α) אולם כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב:

β_0 בחורף, $\beta_0 + \beta_1$ באביב, $\beta_0 + \beta_2$ בקיץ ו- $\beta_0 + \beta_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי: β_0 : השיפוע בקטגוריה שהושמטה

$\beta_0+\beta_i$: השיפוע בקטגוריה i.

<u>בדיקת השערות:</u>

השערות:

$$H0:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$$
$$H1:OTHERWISE$$

המבחן הסטטיסטי : מבחן WALD:

(U) $$V_t=\alpha+\beta_0P_t+\beta_1(D_{1i}P_t)+\beta_2(D_{2i}P_t)+\beta_3(D_{3i}P_t)+u_t$$

(R) $$V_t=\alpha+\beta\cdot P_t+u_t$$

****שימו לב שהשיפוע במשוואה המוגבלת איננו β_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.**

אם נדחה את HO במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין השיפועים על ידי מבחני t.

(3) <u>משתני דמי לכל הפונקציה</u>

<u>הטענה</u>:יש הבדל בין עונות השנה בפונקצית הרגרסיה לניבוי מחיר הירקות באמצעות המחיר לצרכן.

<u>המודל</u>: $$V_t=\alpha_0+\alpha_1D_{1i}+\alpha_2D_{2i}+\alpha_3D_{3i}+\beta_0P_t+\beta_1(D_{1i}P_t)+\beta_2(D_{2i}P_t)+\beta_3(D_{3i}P_t)+u_t$$

<u>בדיקת השערות:</u>

השערות:

$$HO:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$$

המבחן הסטטיסטי: מבחן WALD:

(U) $$V_t=\alpha_0+\alpha_1D_{1i}+\alpha_2D_{2i}+\alpha_3D_{3i}+\beta_0P_t+\beta_1(D_{1i}P_t)+\beta_2(D_{2i}P_t)+\beta_3(D_{3i}P_t)+u_t$$

(R) $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$

אם דוחים את HO, יש לבדוק במבחני WALD האם ההבדל הוא בין החותכים או בין השיפועים:

$HO: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $HO: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

באם דוחים את H0 יש להמשיך לבדוק באמצעות מבחני t:

$H0: \alpha_j = 0$ $HO: \beta_j = 0$

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים

נתבונן בדוגמא שבה יש שני משתנים איכותיים המשפיעים על פונקצית השכר-

מגדר (אישה, גבר) וגזע (לבן, שחור).

נגדיר משתנה דמי G שיקבל 1 אם מדובר בגבר ו-0 אחרת (אישה).

נגדיר משתנה דמי R שיקבל 1 אם מדובר בלבן ו-0 אחרת (שחור).

נבדוק כיצד מגדר וגזע משפיעים על השכר ההתחלתי (החותך), כאשר השכר תלוי גם בשנות לימוד (S_t).

(1) <u>הבדל בחותך ללא אינטראקציה</u>

<u>המודל:</u> $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \beta \cdot S_t + u_t$

במודל זה- אין השפעה משולבת של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.

במילים אחרות, ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים ונשים לא תלוי בגזע (זהה עבור שחורים ועבור לבנים) ולהיפך-ההבדל בשכר ההתחלתי בין לבנים לשחורים לא תלוי במגדר (זהה עבור נשים וגברים).

ניתן לבדוק השערות על כל אחד מהמשתנים הב"ת האיכותיים בנפרד:

1. **הבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים:** $HO: \alpha_1 = 0$
2. **הבדל בשכר ההתחלתי בין שחורים ללבנים:** $H0: \alpha_2 = 0$

(2) **הבדל בחותך עם אינטראקציה**

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$

במודל זה הטענה היא כי קיימת, בנוסף להשפעה של מגדר וגזע בנפרד על השכר, גם השפעה משולבת (אינטראקציה) של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.

במילים אחרות, ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים ונשים תלוי בגזע (שונה אם מדובר בשחורים או בלבנים) ולהיפך.

במודל זה, לעומת הקודם, נוספת ההשערה לבדיקת השפעת האינטראקציה בין מגדר לגזע על השכר ההתחלתי:

3. $HO: \alpha_3 = 0$

דרך נוספת ליצירת מודל עם אינטראקציה:

הגדרת משתני דמי המייצגים שילוב בין המשתנים האיכותיים גזע ומגדר באופן הבא:

D_1 **יקבל 1 אם מדובר בגבר לבן ו-0 אחרת**

D_2 **יקבל 1 אם מדובר בגבר שחור ו-0 אחרת**

D_3 **יקבל 1 אם מדובר באשה לבנה ו-0 אחרת**

הנשים השחורות מהוות כאן את קבוצת הייחוס.

המודל: $W_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \delta \cdot S_t + u_t$

נעזר בטבלה בכדי לנסח את ההשערות לבדיקת האינטראקציה:

	גבר	אישה	הפרש
לבן	$\gamma_0 + \gamma_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$\gamma_1 - \gamma_3$
שחור	$\gamma_0 + \gamma_2$	γ_0	γ_2

הפרש	$\gamma_1 - \gamma_2$	γ_3	

ההשערות לבדיקת קיום האינטראקציה:

$HO: \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ **או** $HO: \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3$

התוצאות שיתקבלו כאן יהיו כמובן זהות לחלוטין לתוצאות שהתקבלו בדרך הקודמת:

$$WALD = t^2$$
$$PF = Pt$$

? שאלה מס' 1

חוקר בדק השפעות של השכלה, גזע (שחור, לבן) וניסיון (EXP) על לוג השכר (ln(Y)) במדגם בן 306 תצפיות:

$$\ln(Y)_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 EXP_t + \beta_2 EXP_t^2 + u_t$$

ln(Y)-לוג השכר

EXP- שנות ניסיון

D_1 **מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת)**

D_2 **מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה נמוכה (ו-0 אחרת)**

D_3 **מקבל את הערך 1 עבור לבנים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת)**

תוצאות אמידת משוואת הרגרסיה מוצגות בפלט להלן:

```
                                   Analysis of Variance

                                    Sum of          Mean
        Source           DF         Squares         Square     F Value     Pr
> F
```

```
         Model              5        --------      ------      ------    ---
---
         Error            300        140           ------

         Corrected Total  305        210

                       Root MSE                  -------   R-Square     -------
                       Dependent Mean            -------   Adj R-Sq     -------
                       Coeff Var                 -------
```

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	-------	--------	60.84	0.00
D1	1	-------	--------	-3.20	0.00
D2	1	-------	--------	-5.56	0.00
D3	1	-------	--------	7.23	0.00
EXP	1	-------	--------	8.11	0.00
EXP^2	1	--------	--------	-7.45	0.00

בטרם ניגשים לפיתרון השאלה יש להכין את טבלת העזר הבאה:

	השכלה נמוכה	השכלה גבוהה	הפרש
לבנים	α_0	$\alpha_0+\alpha_3$	α_3
שחורים	$\alpha_0+\alpha_2$	$\alpha_0+\alpha_1$	$\alpha_1-\alpha_2$
הפרש	α_2	$\alpha_1-\alpha_3$	

(א) לפי המשוואה הניסיון זהה עבור שחורים ולבנים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

(ב) בדוק את הטענה כי בקרב אנשים בעלי השכלה נמוכה אין השפעה לגזע.

(ג) בדוק את הטענה כי אין השפעות השכלה בקרב לבנים.

(ד) הי השערת האפס לבדיקת הטענה כי אין אינטראקציה בין גזע להשכלה?

(ה) לבדיקת ההשערה של הסעיף הקודם בוצע מבחן WALD.

הרגרסיה המוגבלת תחת השערת האפס הינה:

$$Z_0 = \gamma_0 + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \gamma_4 Z_4 + \nu$$ **מהם ה-Z-ים?**

(ו) בדוק את ההשערה אם ידוע שבמודל המוגבל $R^2 = 0.33$

(ז) החוקר החליט לאמוד במקום את המשוואה המקורית את המשוואה:

$$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \lambda_3 (S \cdot E) + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$

כאשר: S מקבל את הערך 1 עבור שחורים ו-0 אחרת (לבנים)

E מקבל את הערך 1 עבור השכלה גבוהה ו-0 אחרת (השכלה נמוכה).

מה הקשר בין המקדמים של שני המודלים?

(ח) אם יאמוד החוקר את המשוואה:

$$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$

האם תהיה טעות ספציפיקציה של השמטת משתנה רלוונטי (היעזר בסעיפים ד',ו' ו-ז').

<u>שאלה מס' 2</u>

חוקרת בדקה השפעות השכלה, מגדר וניסיון על הכנסה מעבודה לפי המשוואה הבאה:

$$\ln(MWAGE) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot S + \alpha_2 \cdot E + \alpha_3 \cdot (S \cdot E) + \beta_0 \cdot EXP + \beta_1 \cdot (EXP \cdot S) + \beta_2 \cdot (EXP \cdot E) + \beta_3 \cdot (EXP \cdot S \cdot E) + U$$

כאשר : S משתנה דמי : 1= עבור נשים, 0=גברים

E משתנה דמי : 1= עבור השכלה גבוהה (scl >12) , 0=השכלה נמוכה

בטרם ניגשים לפיתרון השאלה יש להכין את טבלת העזר הבאה:

	השכלה גבוהה (E=1)	השכלה נמוכה (E=0)	הפרש
נשים (S=1)	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+(\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3)EXP_t$	$\alpha_0+\alpha_1+(\beta_0+\beta_1)EXP_t$	חותך: $\alpha_2+\alpha_3$ שיפוע: $\beta_2+\beta_3$
גברים (S=0)	$\alpha_0+\alpha_2+(\beta_0+\beta_2)EXP_t$	$\alpha_0+\beta_0 EXP_t$	חותך: α_2 שיפוע: β_2
הפרש	חותך: $\alpha_1+\alpha_3$ שיפוע: $\beta_1+\beta_3$	חותך: α_1 שיפוע: β_1	

א. רשמו את הפונקציה לחישוב:

1. **תחזית לוג השכר עבור גבר בעל השכלה נמוכה ו- 10 שנות ניסיון.**
2. **תחזית לוג השכר ההתחלתי עבור נשים משכילות.**
3. **לאחר כמה שנות ניסיון ישתווה השכר של נשים משכילות לזה של גברים משכילים?**

ב. רשמו את השערות האפס המתאימות לבדיקת הטענות הבאות:

1. **אין השפעה של מגדר והשכלה על השכר.**

2. **השפעת ההשכלה אינה תלויה במגדר.**

3. **אין השפעות השכלה אצל גברים.**

4. **אין הבדל בשיעורי התשואה לניסיון, בקרב הנשים.**

<u>פרק 12 - הפרה של ההנחות הקלאסיות</u>

ארבעת הנושאים האחרונים שנלמד עוסקים במצב של הפרת אחת ההנחות הקלאסיות הדרושות לאמידת הפרמטרים בשיטת OLS.

הנושא הראשון- <u>הטרוסקדסטיות</u>, עוסק בהפרת הנחה מס' 5 המדברת על שונות קבועה ויחידה לאורך קו הרגרסיה: $V(u_t)=\sigma^2$.

הנושא השני- <u>מתאם סידרתי</u>, עוסק בהפרת הנחה מס' 6 המדברת על אי תלות בין הטעויות: $\text{cov}(u_t,u_s)=0$

הנושא השלישי-<u>מודלים דינמיים</u>, והרביעי-<u>משוואות סימולטניות</u>, עוסקים בהפרת הנחה מס' 4 המדברת על אי תלות בין המשתנים הב"ת לטעויות:

$\text{cov}(x,u)=0$

בכל אחד מן הנושאים נלמד:

- **מהן ההשלכות של הפרת ההנחות הללו על אומדי הריבועים הפחותים.**
- **מהם המבחנים הסטטיסטיים המשמשים לזיהוי קיומה של ההפרה.**
- **כיצד נתקן את משוואת הרגרסיה כך שניתן יהיה לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS.**

פרק 13 - הטרוסקדסטיות

הטרוסקדסטיות הוא מצב שבו מופרת הנחה מס' 5, הנחת ההומוסקדסטיות, הגורסת כי השונות של ה"קריזה" היא אותה שונות עבור כל תצפית ותצפית: $V(u_t)=\sigma^2$ לכל t, כלומר התצפיות מפוזרות באופן אחיד סביב קו הרגרסיה.

במצב של הטרוסקדסטיות הקריזה של כל תצפית היא בעלת שונות אחרת:

$V(u_t)=\sigma_t^2$

למשל כאשר בודקים את הקשר שבין הכנסה ותצרוכת מגלים כי ברמות הכנסה נמוכות אין גמישות רבה בהוצאות ולכן התצפיות מרוכזות סביב קו הרגרסיה. לעומת זאת ברמות גבוהות של הכנסה התצפיות מפוזרות יותר ויש שונות גבוהה יותר בתצרוכת. השונות, אם כן, איננה אחידה סביב קו הרגרסיה והיא תלויה בתצפית- זהו מצב של הטרוסקדסטיות.

ההשלכות של הטרוסקדסטיות על אומדי OLS

מבין התכונות של אר"פ (ליניאריות, חוסר הטיה, עקיבות ויעילות) היחידה שמופרת בהינתן הטרוסקדסטיות היא: יעילות של אומדי הרבועים הפחותים.

זאת מכיוון שבכדי להוכיח יעילות של האומדים השתמשנו בהנחה מס' 5 של שונות קבועה. לכן הפרתה גוררת פגיעה ביעילות האומד.

מבחנים לזיהוי הטרוסקדסטיות

החשד לקיומה של בעיית הטרוסקדסטיות בנתונים צריך להתעורר כאשר אנו בוחנים את גרף השאריות. גרף השאריות גם מאפשר לנו לבחון את הצורה הפונקציונאלית של השונות, כלומר באיזה אופן השונות משתנה בין תצפית לתצפית.

קיימות שתי שיטות לזיהוי הטרוסקדסטיות: מבחן GQ (Goldfeld-Qauandt) ומבחן White.

ההבדל בין שני המבחנים הוא בהחלטה על הצורה הפונקציונאלית של השונות. כלומר על האופן שבו השונות משתנה בין תצפית לתצפית, (על פי דיאגראמת הפיזור).

מבחן GQ מניח כי במקום שונות אחת אחידה של הטעויות לכל התצפיות, קיימות שתי שונויות שונות בלבד. ואילו מבחן White מניח כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות.

1) <u>מבחן GQ</u>

ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה היא כי קיימות שתי שונויות שונות של טעויות.

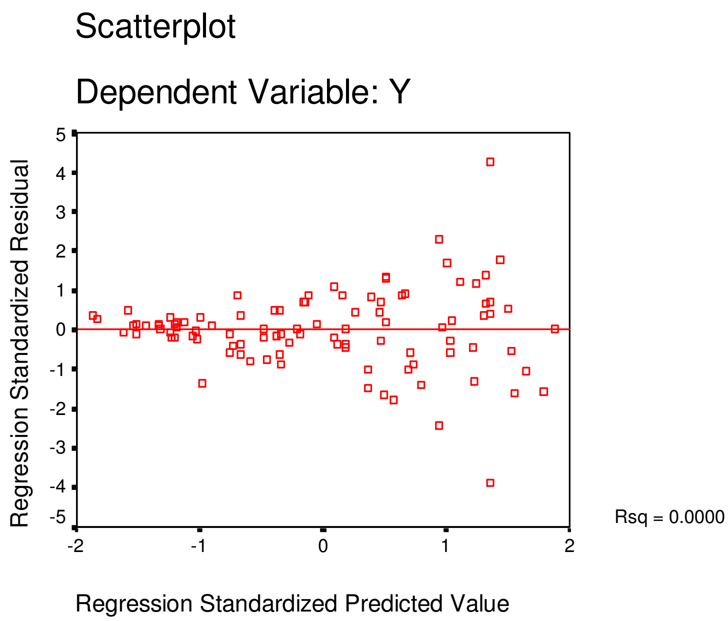
ביצוע המבחן:

- **מחלקים את המדגם לשני חלקים:**
  1. **החלק שבו אנו חושדים שיש שונות גבוהה יותר**
  2. **החלק שבו אנו חושדים שיש שונות נמוכה יותר**

  מקובל להשמיט מס' תצפיות (בין 1/6 ל-1/3) במרכז המדגם.
- **אומדים כל אחד מהחלקים בנפרד ומקבלים את ה-ESS של כל חלק.**
- **מחשבים את הסטטיסטי:** $F_{stat} = \frac{ESS_1 / T_1 - K - 1}{ESS_2 / T_2 - K - 1}$ **(תמיד השונות הגבוהה חלקי הקטנה).**
- **סטטיסטי זה מתפלג** $F_{(\alpha; T_1 - K - 1, T_2 - K - 1)}$
- **כלל ההכרעה: אם** $F_{stat} > F_C$ **אז דוחים את H0.**
- **ההשערות:** $\begin{matrix} HO: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{matrix}$

לדוגמא: נאמד הקשר שבין הכנסה לתצרוכת: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

גרף השאריות של הרגרסיה הנ"ל נתון להלן:



מגרף זה אנו למדים כי ככל שעולים ברמת ההכנסה כך השונות בהוצאות הפרט עולה. כלומר השונות איננה אחידה סביב קו הרגרסיה אלא תלויה ברמת ההכנסה- זהו מצב של הטרוסקדסטיות.

בכדי לבצע מבחן GQ :

- **התצפיות של המשתנה הכנסה סודרו מהגדול לקטן והמדגם חולק לשלוש קבוצות שוות.**
- **רגרסיה נפרדת הורצה על השליש הראשון ועל השליש האחרון.**

התוצאות של אמידת הקשר בין הכנסה לתצרוכת מוצג בפלטים 1 ו-2 בהתאמה:

משוואה (1)

```
The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: Y
```

```
                     Number of Observations Read          16
                     Number of Observations Used          16


                     Analysis of Variance


                              Sum of           Mean
       Source           DF       Squares         Square    F Value    Pr
> F

       Model             --       -------        ------       ----     ----
--

       Error            14      166452.9         -----

       Corrected Total ---        -----
```

משוואה (2)

```
                                        The REG Procedure
                                          Model: MODEL1
                                    Dependent Variable: y


                     Number of Observations Read          16
                     Number of Observations Used          16


                     Analysis of Variance


                              Sum of           Mean
       Source           DF       Squares         Square    F Value    Pr
> F

       Model           ---      --------     --------     ------     ---
--

       Error            14      2934638       ------

       Corrected Total ---        ----
```

<u>השערות:</u>

$$HO:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$
$$H1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

<u>סטטיסטי המבחן:</u>

$$F_{stat}=\frac{ESS_1/T_1-K-1}{ESS_2/T_2-K-1}=\frac{2{,}934{,}638}{166{,}452.9}=17.62$$

<u>כלל הכרעה:</u>

$F_{stat}=17.62>F(0.05;14,14)=2.48$ **לכן יש סיבה מספקת לדחות את HO ברמת מובהקות של 5%.**

<u>מסקנה:</u>

יש עדות להטרוסקדסטיות בנתונים.

? על מנת לבחון את פונקצית הייצור בענף מסוים נאספו נתונים על 150 פירמות.

נסמן:

Q תפוקה שנתית באלפי שקלים.

L מספר עובדים

המודל הנאמד: $\ln(Q)=\alpha+\beta\cdot\ln(L)$

החוקר חשש שההפרעה המקרית איננה הומוסקדסטית.

לשם כך הוא מיין את התצפיות בסדר עולה של מספר העובדים, השמיט 1/3 מהתצפיות האמצעיות והריץ שתי רגרסיות נפרדות עם מספר שווה של תצפיות:

ברגרסיה הכוללת את הערכים הנמוכים יחסית של תשומת העבודה הוא קיבל:

$R^2=0.403$ **ESS=279.3**

ברגרסיה הכוללת את הערכים הגבוהים יחסית של תשומת העבודה הוא קיבל:

$R^2=0.238$ **ESS=493.8**

האם יש עדות לקיום הטרוסקדסטיות בנתונים? (בצעו את המבחן המתאים: רשמו השערות, חשבו סטטיסטי מבחן, רשמו כלל הכרעה והגיעו למסקנה).

2) <u>מבחן White</u>

ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות.

הביטוי המתמטי של הנחה זו היא היותה של השונות פונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים:

$$\sigma_t^2 = f(x_j, x_j^2, x_j x_j)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 x_k^2 + \ldots + \beta_k x_k^2 + \gamma_{12} x_1 x_2 + \gamma_{13} x_1 x_3 \ldots$$

האומד ל- σ_t^2 **הוא** $\hat{u}_t^2$

המבחן הוא מבחן LM:

- **אומדים את המודל המקורי ומקבלים את הסטיות מקו הרגרסיה** $\hat{u}_t$ **(המכונה ב SAS -RES).**
- **אומדים את** $\hat{u}_t^2$ **כפונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים:** $\hat{u}_t^2 / x_j, x_j^2, x_j x_j$ **זוהי רגרסיית העזר.**
- **נחשב את סטטיסטי LM:** $LM_{stat} = T_y \cdot R_y^2$
- **אם** $LM_{stat} > \chi_m^2$ **כאשר m= מס' המשתנים ברגרסיית העזר.**
- **השערות:**

$$HO: \alpha_j = \beta_j = \gamma_{jj} = 0$$
$$H1: OTHERWISE$$

נדגים על אותו הקשר שבין הכנסה לתצרוכת:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

שאנו חושדים על פי גרף השאריות כי קיים בו מצב של הטרוסקדסטיות.

בכדי לבצע את מבחן WHITE :

- **נחשב את השאריות של הרגרסיה:** $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$,
- **נעלה את השאריות בריבוע:** $\hat{u}_t^2$
- **נאמוד את המשוואה:** $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \beta_1 X_t^2 + v_t$

תוצאות האמידה מוצגות להלן:

```
The REG Procedure
Model: MODEL1
```

Dependent Variable: RES^2

```
Number of Observations Read     48
Number of Observations Used     48
```

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	---	-------	------	------	-----
Error	---	-------	------		
Corrected Total	---	----			

Root MSE	-------	R-Square	0.390763
Dependent Mean	-------	Adj R-Sq	-------

השערות:

$$H0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$$
$$H1: OTHERWISE$$

סטטיסטי המבחן:

$$LM_{stat} = T_y \cdot R_y^2 = 48 \cdot 0.3907 = 18.75$$

כלל הכרעה:

$LM_{stat} = 18.75 > \chi^2_{2(0.05)} = 5.991$ לכן יש סיבה מספקת לדחות את H0 ברמת מובהקות של 5%.

מסקנה

יש עדות לקיום של הטרוסקדסטיות בנתונים.

****<u>הערה חשובה:</u> אם חלק מערכי $\hat{u}_t^2$ יצאו שליליים (והרי שונות לא יכולה להיות שלילית) יש להוציא לוג ולאמוד את $\ln \hat{u}_t^2$ כך התחזית תצא תמיד חיובית.**

? חוקר מניח כי מכירות של חנות הן פונקציה של שיטחה, דמי שכירות והאפשרות של מכירת עיתונים.

נסמן:

Y_SALES=מכירות חודשיות (ש"ח)

X1_SQUARES=שטח החנות(מ"ר)

X2_RENT=דמי שכירות($)

PAPERS=משתנה איכותי המקבל 1-אם החנות מוכרת גם עיתונים ו-0 אם לא.

החוקר חשד כי קיימת בעיה של הטרוסקדסטיות בנתונים.

החוקר ביצע מבחן לזיהוי הטרוסקדסטיות שתוצאותיו נתונות להלן:

```
Dependent Variable:
     Number of Observations Read          20
     Number of Observations Used          20

     Analysis of Variance

                                   Sum of           Mean
           Source          DF      Squares          Square     F Value     Pr
> F
           Model          ---      -------          ------     ------      ---
--
           Error          ---      -------          ------
           Corrected Total ---      ----
                   Root MSE                -------     R-Square      0.086942
                   Dependent Mean          -------     Adj R-Sq      -------
```

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	-------	----	-------	--- --
X1_SQUARE	1	-------	-----	------	--- ---
X1_SQUARE^2	1	-------	-----	-----	--- ---
X1_SQUARE*X2_RENT	1	-------	-----	------	-- ---
X2_RENT	1	-------	--------	-----	-- --
X2_RENT^2	1	--------	--------	-----	-- ---
X2_RENT*PAPERS	1	-------	------	-----	-- ---
PAPERS	1	------	------	-----	- ---

הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת : ______________________________

על ידי מבחן : _____________________

המשתנה התלוי הינו:_________________

המשתנים הב"ת:_____________________

ההשערות הינן:_______________________

גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית):______________________

המסקנה המתקבלת היא:____

פיתרון בעיית ההטרוסקדסטיות- ריבועים פחותים משוקללים (WLS)

נניח שאנו רוצים לאמוד את המודל : $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ וידוע כי לכל קריזה שונות אחרת.

ההנחה שעומדת בבסיס שיטת ה-WLS היא כי השונות המשתנה כוללת בתוכה מרכיב קבוע ומרכיב משתנה:

$$\sigma_t^2 = Z_t \cdot \sigma^2$$

את המרכיב המשתנה בשונות (Z_t) יש לנטרל.

לשם כך ניצור משתנה חדש- W_t שיהווה השורש ההופכי לאותו מרכיב משתנה:

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{Z_t}}$$

נכפיל כל תצפית במשתנה החדש W_t וניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של המשוואה המקורית :

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \beta X_t + u_t \\ Y_t W_t &= \alpha \cdot W_t + \beta (X_t W_t) + u_t W_t \end{aligned}$$

בצורתה המפורשת המשוואה החדשה נראית כך:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{Z_t}} = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_t}} + \beta \cdot \frac{X_t}{\sqrt{Z_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{Z_t}}$$

קיבלנו מודל חדש שבו :

הקריזה היא : $\frac{u_t}{\sqrt{Z_t}}$

המשתנה המוסבר: $\frac{Y_t}{\sqrt{Z_t}}$

המשתנים המסבירים הם : $\frac{X_t}{\sqrt{Z_t}}$ **ו-** $\frac{1}{\sqrt{Z_t}}$

במודל זה __אין חותך__.

הפרמטרים β ו- α הם של המשוואה המקורית (שימו לב כי ל- α אין משמעות של חותך).

למשוואה זו אין משמעות כלכלית אך היא מאפשרת לנו לאמוד את הפרמטרים α ו- β בשיטת OLS כך שנקבל אומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ יעילים.

ניתן להוכיח כי הטרנספורמציה הליניארית של השונות הפכה אותה לקבועה:

$$V(\frac{u_t}{\sqrt{Z_t}}) = \frac{1}{Z_t} V(u_t) = \frac{1}{Z_t} \cdot \sigma^2 \cdot Z_t = \sigma^2$$

הערה: אם ביצענו את מבחן WHITE והוצאנו log לנתונים אז $Z_t = e^{\ln \hat{u}_t^2}$ כך שיש לשקלל את הרגרסיה ב: $W_t = \frac{1}{\sqrt{e^{\ln \hat{u}_t^2}}}$.

__שאלה מס' 1__

נתון המודל: **(1)** $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + U_t$

ונתון כי: $VAR(U_t) = \sigma^2 / Z_t^2$ **(** Z_t **משתנה ידוע).**

א. מהי הבעיה שנוצרת באמידת משוואה (1) ?

ב. מהן תכונות אומדי הריבועים הפחותים של משוואה (1) ?

כדי לפתור את הבעיה שנוצרה, נאמדה המשוואה הבאה:

(2) $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + U_t \cdot W_t$

ג. מהו W_t שבעזרתו ניתן לאמוד את α ו- β בצורה יעילה ?

ד. מהו האומד היעיל של σ^2 ?

ה. האם ניתן להשוות בין המודלים על בסיס R^2 ? אם לא, האם ניתן להחליט בכל זאת איזה מודל טוב יותר?

ו. חוו דעתכם על הטענות הבאות, ונמקו:

1. אם נתון כי $Z_t = a + b \cdot \overline{X}$, התשובות לסעיפים א׳ ו- ב׳ נשארות ללא שינוי.

2. המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{\varepsilon}_t = 0$ (כאשר $\varepsilon_t = U_t \cdot W_t$) היא אחת המשוואות הנורמאליות לאמידת משוואה (2).

<u>שאלה מס׳ 2</u>

ענו על שאלה מס׳ 1, כאשר נתון כי $VAR(U_t) = \sigma^2 \cdot X_t^2$.

<u>שאלה מס׳ 3</u>

נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

וקיים מדגם של 100 תצפיות

כאשר נתון כי:

$$V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} X_t \sigma^2 \Leftrightarrow t \geq 50 \\ X_t^2 \sigma^2 \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$$

(שאר ההנחות הקלאסיות מתקיימות)

א. במשוואה מס׳ 1 יש בעיה של: ______________

ב. אמידת משוואה (1) תניב אומדים בלתי מוטים ועקיבים:

נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. פיתרון הבעיה הקיימת במשוואה (1) ייתכן על ידי אמידת המשוואה הבאה:

(2) $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + \omega_t$

כאשר: $W_t =$ __________

ד. ם נתון כי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} 3\sigma^2 \Leftrightarrow t \geq 50 \\ \sigma^2 \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$

האם ישתנו תשובותיכם לסעיפים א ו-ב : **כן/ לא/ לא ניתן לדעת**

פרק 14 - מתאם סידרתי

מתאם סידרתי עוסק במצב שבו מופרת ההנחה הקלאסית מס' 6 -אי תלות בין הטעויות: $\operatorname{cov}(u_t, u_s) = 0$

זהו מצב שבו קיימת תלות סטטיסטית בין הטעויות במודל: $\operatorname{cov}(u_t, u_s) \neq 0$ **.**

תלות כזו בין הטעויות קיימת בדרך כלל כאשר הנתונים הנאספים הם נתוני סדרות עיתיות ולא נתוני חתך בהם עסקנו עד כה.

נתוני חתך- מתייחסים לפרטים שונים בתקופת זמן נתונה.

נתוני סדרות עיתיות- מתייחסים לאותו הפרט לאורך זמנים שונים.

בנתוני החתך סביר שמאחר ומדובר בפרטים שונים -הטעויות בניבוי שלהם תהיינה בלתי תלויות. לעומת זאת בנתוני סדרות עיתיות, מאחר ומדובר באותו הפרט הנמדד בזמנים שונים סביר דווקא שהטעויות בניבוי שלו תהיינה תלויות אחת בשנייה.

אם אנחנו מדברים, למשל, על פונקציות תצרוכת:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

אם מדובר בנתוני חתך- החלטות התצרוכת של פרט t לא אמורות להשפיע על החלטותיו של פרט s והנחה 6 תתקיים:

$$\operatorname{cov}(u_t, u_s) = 0$$

אולם אם מדובר על נתוני סדרה עיתית: החלטותיו של פרט מסוים היום סביר שיושפעו מהחלטות שעשה בעבר או שישפיעו על החלטות שיעשה בעתיד:

$$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) \neq 0$$

כאשר : u_t **- "קריזה" בזמן t .**

u_{t-s} **-"קריזה" בזמן t-s .**

השלכות על אומדי הריבועים הפחותים (OLS)

מבין התכונות של אר"פ (ליניאריות, חוסר הטיה, עקיבות ויעילות) היחידה שמופרת כאשר קיים מתאם סידרתי היא:

תכונת היעילות.

משום שתכונת היעילות היא היחידה מבין תכונות אר"פ התלויה להוכחתה בקיומה של הנחת אי התלות בין הטעויות.

משום הפגיעה בתכונת היעילות, בדיקת ההשערות לא תהיה תקפה.

****<u>שימו לב</u> כי במידה וקיים מתאם סידרתי חיובי בין הטעויות ולמשתנים יש מגמת זמן (X עולה או יורד עם הזמן) אומד השונות (ESS) יהיה מוטה כלפי מטה ואז נקבל R^2, F ו- t מוטים כלפי מעלה.**

מבנה המתאם הסדרתי

הגדרנו מתאם סדרתי כהפרה של הנחה מס' 6:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) \neq 0$$

נשאלת השאלה כיצד נראית הפרה זו?

<u>**מתאם סדרתי מסדר ראשון:**</u>

ההנחה היא כי יש מתאם בין קריזות במרחק אחד, כלומר u_t תלוי ישירות רק ב- u_{t-1} :

$$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-1}) \neq 0$$

את המתאם בין ה"קריזות" מסדר ראשון ניתן לנסח באופן הבא:

$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

כך ש:

(1) $\rho \neq 0$ **(כי אם** $\rho = 0$ **אין מתאם)**

(2) $-1 < \rho < 1$ **(כי אם חורג מ-1 ה"קריזה" הולכת וגדלה עם הזמן)**

(3) ρ **חיובי פירושו מתאם סדרתי חיובי ואילו** ρ **שלילי פירושו מתאם סדרתי שלילי (לא נפוץ).**

(4) ε_t **מקיים את ההנחות הקלאסיות מאחר ומהווה סטייה מקרית לחלוטין (בניגוד ל-** u_t **) כך ש:**

$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$
$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$$

המודל יכיל שתי משוואות-המשוואה העיקרית והגדרת המתאם הסדרתי (מסדר ראשון):

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

מלבד α **ו-** β **נרצה לאמוד גם את** ρ**.**

<u>מתאם סדרתי מסדר שני:</u>

$$u_t = \rho_1 \cdot u_{t-1} + \rho_2 \cdot u_{t-2} + \varepsilon_t$$

הן u_{t-1} **והן** u_{t-2} **משפיעים ישירות על** u_t**.**

<u>מתאם סדרתי מסדר P:</u>

$$u_t = \rho_1 \cdot u_{t-1} + \rho_2 \cdot u_{t-2} + \ldots + \rho_P \cdot u_{t-P} + \varepsilon_t$$

u_t **מושפע מתקופות שונות בעבר.**

תכונות המתאם הסדרתי

ניתן להוכיח כי מכיוון שכל טעות בזמן מסוים מתואמת עם הטעות הסמוכה לה בזמן:

$$r_{(u_t,u_{t-s})} = \rho^s$$

מכיוון שכך המתאם של u_t הולך ופוחת עם הזמן:

$$\rho_{u_t u_{t-1}} > \rho^2_{u_t u_{t-2}} > \rho^3_{u_t u_{t-3}} > \ldots > \rho^s_{u_t u_{t-s}}$$

בנוסף לכך, התוחלת, השונות והשונות המשותפת של הטעויות:

$$E(u_t) = 0$$

$$V(u_t) = \sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

$$COV(u_t, u_{t-s}) = \rho^s \sigma_{u_t}^2 = \rho^s \frac{\sigma_s^2}{1-\rho^2}$$

? **נתון מתאם סדרתי מסדר ראשון:** $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$

נתון כי $\rho = 0.9$ **וכי** $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 1$

מצאו את:

א. המתאם בין u_t ל- u_{t-1}

ב. המתאם בין u_t ל- u_{t-4}. הסבר את ההבדל בין המתאמים (סעיף א' ו-ב').

ג. השונות σ_u^2

ד. חזרו על סעיפים א' עד ג' עבור $\rho = 0.4$. הסבירו את ההבדל בין התוצאות.

מבחנים לזיהוי מתאם סדרתי

קיימים שני מבחנים סטטיסטיים לזיהוי קיומו של מתאם סדרתי:

מבחן DW (דרבין ווטסון) ומבחן LM.

1) <u>מבחן DW (דרבין ווטסון) לקיום מתאם סדרתי מסדר ראשון:</u>

- **נניח תחילה כי אין מתאם סדרתי ונאמוד את המשוואה הראשית בשיטת OLS.**
- **כחלק מתוצאות האמידה נקבל ציון DW (יכול לקבל ערכים בין 0 ל-4 בלבד).**
- **נתבונן בטבלת DW ולפי K= מס' המשתנים הב"ת במודל ו-T = מס' התצפיות במדגם נשלוף שני ערכים:** d_U **ו-** d_L
- **נחלק את הטווח שבין 0 ל-4 באופן הבא:**

$$0\;\_\_\;\rho>0\;\_\_\_\_\;]\;?\;[\;\_\_\_\_\;\rho=0\;\_\_\_\_\;]\;?\;[\;\_\_\_\_\;\rho<0\;\_\;4$$

$d_L \qquad d_U \qquad\qquad 4-d_U \qquad 4-d_L$

- **נראה היכן נופל ציון ה-DW שהתקבל כחלק מתוצאות האמידה.**

ניתן לדעת אם יש מתאם ואיזה סוג של מתאם רק אם ציון ה-DW ייפול בחלקים המודגשים.

<u>השערות:</u>

$$HO: \rho = 0$$
$$H1: \rho > 0, \rho < 0$$

<u>חישוב הסטטיסטי</u>

$$DW_{stat} \cong 2 \cdot (1-\hat{\rho})$$

אם אנו מקבלים ציון $\hat{\rho}$ **ניתן להציב בנוסחה ולקבל** DW_{stat}.

לדוגמא: חוקר רצה לאמוד את מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן שעובר:

$$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME_t + u_t$$

כאשר:

$CLOSE_t =$ **מחיר סגירה של מניה ב-$ ביום t.**

$TIME_t =$ **משתנה זמן שמקבל את הערכים: ...1,2,3**

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: CLOSE

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	-------		55.78	
Error	151	-------			
C Total	152	-------			

Root MSE	----	R-square	0.181
Dep Mean	----	Adj R-sq	------
C.V.	----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	1.3474	0.0148	91.047	0.0000
TIME	1	-0.00075	0.0001	-7.468	0.0000

Durbin-Watson D **0.150**

האם קיים מתאם סדרתי?

נתבונן בטבלת DW כאשר נתון כי K=1 ו-T=153 :

TABLE 12 Cutoff Points for the Distribution of the Durbin-Watson Test Statistic

Let d_α be the number such that $P(d < d_\alpha) = \alpha$, where the random variable d has the distribution of the Durbin-Watson statistic under the null hypothesis of no autocorrelation in the regression errors. For probabilities $\alpha = .05$ and $\alpha = .01$, the tables show, for numbers of independent variables, K, values d_L and d_U such that $d_L \le d_\alpha \le d_U$, for numbers n of observations.

$\alpha = .05$

n	K = 1		K = 2		K = 3		K = 4		K = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	1.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

לפי הטבלה (עבור T=100) :

$$d_L = 1.65$$
$$d_U = 1.69$$

נציב בטווח:

$$[\_\_\_\_ \rho > 0 \_\_\_\_\_]\_\_\_\_[\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \rho = 0 \_\_\_\_\_]\_\_\_\_[\_\_\_\_\_ \rho < 0 \_]$$

0   1.65   1.69   2.31   2.35   4

DW=0.150

מסקנה:

יש עדות לקיום מתאם סדרתי חיובי מסדר ראשון.

המודל הינו:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

u_t **-הפרעה מקרית קלאסית**

T=100 וידוע כי:

$$u_t = 0.9u_{t-1}$$
$$d_L = 1.57$$
$$d_U = 1.65$$

האם קיים מתאם סדרתי ברמת מובהקות של 5%?

<u>למבחן DW יש שתי בעיות עיקריות:</u>

1) **מתאים רק למתאם סדרתי מסדר ראשון**
2) **יש אזורים "מתים" בטווח בהם לא ניתן לדעת האם יש מתאם סדרתי.**

<u>בנוסף לכך על מספר תנאים להתקיים כדי שאפשר יהיה להשתמש במבחן DW :</u>

1. **הרגרסיה כוללת חותך**

2. **ה-Xים קבועים ולא משתנים**

3. **אין משתנים מסבירים שהם פיגור של המשתנה המוסבר**

4. **אין תצפיות חסרות באמצע**

5. **אם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון אז הוא מהצורה:** $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$

2) <u>מבחן LM</u>

לעומת מבחן DW מבחן LM מתאים גם לבחון קיומו של מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר מסדר ראשון.

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + u_t$$
$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

ניתן לרשום את המודל הלא מוגבל:

(U) $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$

ניתן להתייחס לבחינת קיומו של מתאם סדרתי כהוספת משתנה מסביר: $\hat{u}_{t-1}$

השלבים לביצוע המבחן:

- **נאמוד את המודל המקורי ונחשב** $\hat{u}_t$ **ו-** $\hat{u}_{t-1}$
- **נאמוד את רגרסיית העזר:** $\hat{u}_t / x_1, x_2, ..., x_k ; \hat{u}_{t-1}$
- **נחשב סטטיסטי LM:** $LM_{stat} = T_y \cdot R_y^2$
- **נדחה את H0 כאשר:** $LM_{stat} > \chi_m^2$ **כאשר m = סדר המתאם הסדרתי.**

אם נדחה את H0 נדע את סימנו של המתאם הסדרתי לפי המקדם של $\hat{u}_{t-1}$ **ברגרסיית העזר ששווה ל-** $\hat{\rho}$ **.**

שימו לב כי אם נרצה לבדוק מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר:

ההשערות:

$$HO:\rho_1=\rho_2=...=\rho_s=0$$
$$H1: \text{אחרת}$$

רגרסיית העזר: $\hat{u}_t / x_1, x_2, ..., x_k; \hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, ..., \hat{u}_{t-s}$

לדוגמא: **עבור הדוגמא הקודמת- ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן:** $CLOSE_t=\alpha+\beta\cdot TIME+u_t$

נבחן את קיומו של מתאם סדרתי מסדר ראשון באמצעות מבחן LM.

נאמוד את רגרסיית העזר:

$$u_t=\gamma_0+\gamma_1\cdot TIME_t+\rho\cdot u_{t-1}+\varepsilon_t$$

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: RES

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	2	-------			
Error	150	--------			
C Total	152	-------			

Root MSE	------	R-square	0.855
Dep Mean	----	Adj R-sq	------
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate
INTERCEP	1	-00096
TIME	1	1.16331E-05
RES1	1	0.927172

א. האם קיים מתאם סדרתי?

ב. מהו ערכו של המתאם הסדרתי הנאמד?

ג. מהו כיוונו של המתאם הסדרתי באוכלוסיה?

פיתרון בעיית המתאם הסדרתי – רגרסיית הפרשים (שיטת קוקרן-אורקט)

ניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של המשוואה המקורית שבה לא יהיה מתאם סדרתי ולכן ניתן יהיה לאמוד אותה בשיטת הריבועים הפחותים, האומדים יהיו יעילים וניתן יהיה לבצע בדיקת השערות.

משוואה (1) : המודל בזמן t: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$

משוואה (2) : המודל בזמן t-1 מוכפל ב- ρ : $\rho \cdot Y_{t-1} = \rho \cdot \alpha + \rho \cdot X_{t-1} + \rho \cdot u_t$

החסרת משוואה (2) ממשוואה (1):

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1})$$

כדי לאמוד את הפרמטרים של רגרסיית ההפרשים נגדיר:

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$
$$\alpha^* = \alpha(1-\rho)$$
$$\beta^* = \beta$$
$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$$
$$\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$$

כך "נטרלנו" את המתאם הסדרתי:

$\Leftarrow$ $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = u_t - \rho \cdot u_{t-1}$ **נזכור כי** ε_t **מקיים את כל ההנחות הקלאסיות ולכן שונות הרגרסיה וכן שונות הפרמטרים הנאמדים לא תהיה תלויה במקדם המתאם הסדרתי.**

המשוואה "המתוקנת" אותה נאמוד:

$$Y^* = \alpha^* + \beta^* X_t^* + \varepsilon_t$$

לאחר אמידת משוואה זו ניתן לחלץ את האומדים של הפרמטרים המקוריים: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$

מאחר ש- ρ איננו ידוע יש צורך לאמוד אותו.

❓ **סטודנט הניח כי במודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון בשאריות כך שמתקיים: $u_t = 0.7u_{t-1} + \varepsilon_t$ ולכן במקום לאמוד את המודל המקורי אמד את המודל:**

$$Y_t - 0.7Y_{t-1} = \alpha(1-0.7) + \beta(X_t - 0.7X_{t-1}) + u_t$$

הסטודנט טען כי במודל החדש לא קיים מתאם סדרתי .

טענת הסטודנט: נכונה /לא נכונה /לא ניתן לדעת

<u>**אמידת ρ בשיטת קוקרן אורקוט**</u>

שיטת קוקרן אורקוט לאמידת ρ היא שיטה איטרטיבית –מבוססת על חזרות של תהליך מסוים עד להתכנסות.

התהליך מתבצע באופן הבא:

אמידת המשוואה המקורית בה אנו מניחים כי קיים מתאם סדרתי.

חישוב $\hat{u}_t$ ו- $\hat{u}_{t-1}$ וקבלת האומד $\hat{\rho}$ על ידי אמידת המשוואה : $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$

הבעיה היא כי האומד איננו יעיל כיוון שהאומדים לפרמטרים במשוואה המקורית אינם יעילים (בשל קיומו של מתאם סדרתי). לכן נמשיך ונבצע את הפעולות הבאות:

הצבת האומד הזה ברגרסיית ההפרשים וחילוץ $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ חדשים. שוב נחשב $\hat{u}_t$ ו- $\hat{u}_{t-1}$ תוך שימוש באומדים החדשים ונקבל אומד $\hat{\rho}$ חדש.

נחזור על התהליך הזה מספר פעמים נוספות עד שנגיע להתכנסות (עד שהאומד $\hat{\rho}$ ישתווה לזה שקיבלנו בתחילה).

אין צורך לבצע תהליך זה ידנית משום שרוב תוכנות המחשב מבצעות הליך זה באופן מיידי ומדווחות על התוצאות הסופיות.

התהליך הממוחשב נקרא אוטו רגרסיה (AUTOREGRESION) מסדר ראשון, שני, שלישי וכו' (תלוי בסדר המתאם הסדרתי).

התיקון למתאם הסדרתי יתבצע על ידי הרצת רגרסיה עם משתנה AR(1) (אוטו רגרסיה מסדר ראשון), AR(1) ו-AR(2) (אם מניחים קיום אוטו רגרסיה מסדר שני) וכו'

אם משתנה AR מובהק זו אינדיקציה שפתרנו את הבעיה של המודל המקורי.

לדוגמא: נמשיך עם הדוגמא של ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן:

$$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME + u_t$$

נניח כי קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון בנתונים.

תוצאות האמידה בשיטת אוטורגרסיה מסדר ראשון מוצגות להלן:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	1.333			
TIME	1	-0.0006			
AR(1)	1	0.927			0.000
Durbin-Watson D		2.235			

א. בדקו האם נפתרה בעיית המתאם הסדרתי .

ב. מהי המשוואה לאמידת מחיר הסגירה הצפוי ביום המסחר הבא?

? שאלה מס' 1

נאמד הקשר שבין הכנסה לתצרוכת לתקופה ינואר 1994 עד דצמבר 1997 (T=48).

המודל הינו: $C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$

בניסיון לבדוק האם מתקיים קשר מהסוג הבא: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t$

נאמדה המשוואה הבאה: $\hat{u}_t = \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \gamma_3 \hat{u}_{t-3} + \gamma_4 Y_t + \omega_t$

תוצאות האמידה מוצגות להלן:

Depended Variable: RES

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-54.709	710.85	-0.076	0.939
RESID1	1	0.705	0.152	4.631	0.000
RESID2	1	-0.0066	0.188	-0.035	0.972
RESID3	1	-0.337	0.167	-2.012	0.051
Y	1	0.0027	0.032	0.085	0.932

Durbin-Watson D 1.954

נתון בנוסף כי $R^2 = 0.479$

א. הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת : ___________________

על ידי מבחן : _____________________

ההשערות הינן:________________________

גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית):______________

המסקנה המתקבלת היא:_________________________

בהנחה כי קיים מתאם סדרתי מסדר שלישי בנתונים נאמד מחדש הקשר שבין ההכנסה לתצרוכת בהתאם לשיטתם של קוקרן ואורקוט.

תוצאות האמידה מוצגות להלן:

Depended Variable:C

Parameter Estimates

Parameter	Standard	T for H0:

Variable	DF	Estimate	Error	Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-2103.53	1128.38	-1.864	0.069
Y	1	0.71944	0.0510	14.086	0.000
AR(1)	1	0.7070	0.1525	4.634	0.000
AR(2)	1	-0.0064	0.1889	-0.034	0.972
AR(3)	1	-0.3282	0.1669	-1.966	0.0562

Durbin-Watson D 1.954

ב. רשמו את המשוואה המתוקנת המשמשת לעריכת תחזיות.

<u>שאלה מס' 2</u>

חוקר רצה לאמוד את עקומת הביקוש לטיסות לאירופה.

לרשותו נתונים שבועיים לאורך 3 שנים (52 שבועות).

נסמן: Y_t=מספר כרטיסי הטיסה לאירופה שנמכרו בשבוע t

p_t = מחיר ממוצע ב-$ של הכרטיסים שנמכרו בשבוע t

החוקר אמד את המודל: $Y_t = e^{\alpha} \cdot P_t^{\beta_1} \cdot P_{t-1}^{\beta_2} \cdot e^{u_t}$

וקיבל לאחר הטרנספורמציה הלוגריתמית: $R^2 = 0.81$.

לבדיקת ההשערה כי קיים מתאם סדרתי בנתונים מסדר ראשון הוא חישב את ערכי $\hat{u}_t$ ולאחר מכן חישב את הרגרסיה: $u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln P_t + \gamma_2 \ln P_{t-1} + \gamma_3 u_{t-1} + v_t$

מקדם ההסבר המרובה ברגרסיה זו הוא 0.282

א. נסח את ההשערה ובחן אותה בר"מ של 0.05.

החוקר מניח שיש מתאם סדרתי מסדר ראשון.

לאחר תיקון Cochrane-Orcutt התקבל:

$$\hat{\ln} Y_t = 7.3 - 0.2 \ln P_t + 0.4 \ln P_{t-1}$$

$$\hat{\rho} = 0.2$$

הניחו שהשבוע ובשבוע שעבר מחיר ממוצע של כרטיס היה 500$.

השבוע נמכרו 6,185 כרטיסים. בשבוע הבא צפוי מחיר של 400$.

ב. כמה כרטיסים יימכרו?

החוקר גם מנסה לקבוע האם בנתונים אלה קיים מתאם מסדר שני.

ג. רשמו את המשוואה הנוספת שעליו לאמוד.

במשוואה הנוספת התקבל מתאם מרובה השווה ל- 0.12.

ד. מהי המסקנה בר"מ של 0.05?

פרק 15 - סיכום בעיית המתאם הסדרתי וההטרוסקדסטיות

	מתאם סדרתי	הטרוסקדסטיות
המשוואה העיקרית של המודל	**למשל:** $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	
ההנחה הקלאסית המופרת	$\text{cov}(u_t, u_{t-s}) = 0$	$V(u_t) = \sigma^2$
המצב לאחר ההפרה	$\text{cov}(u_t, u_{t-s}) \neq 0$	$V(u_t) = \sigma_t^2$
המשוואה המאפיינת את ההפרה	$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$	$V(u_t) = W_t \sigma^2$
מה קורה אם אומדים ב-OLS	**מתקבלים אומדים חסרי הטיה ועקיבים, אך תכונת היעילות נפגעת.**	
זיהוי הבעיה	**מבחן DW** **מבחן LM**	**מבחן GQ** **מבחן White**
פתרון הבעיה	**שיטת קוקרן –אורקוט (רגרסיית ההפרשים)** **הכנסת משתנה מוסבר בפיגור (מודל דינמי)**	**שיטת WLS**

פרק 16 - מודלים דינמיים

מודל דינמי הוא מודל שיש בו משתנה מוסבר בפיגור, כלומר Y היום מושפע מ-Y של אתמול:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$$

המכפילים הדינמיים

ניתן לדבר על שלוש סוגים של השפעות בהקשר של המודל הדינמי (מיכפלים):

1) **מכפל לטווח קצר (מיידי):**

איך X היום משפיע על Y היום: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}$

2) **מכפל ביניים מסדר j (מכפיל דינמי):**

איך X מלפני j תקופות משפיע על Y היום: $\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}$

3) **מכפל טווח ארוך (מצב עמיד):**

איך X משפיע על Y לאורך P תקופות: $\frac{\partial Y^*}{\partial X^*}$

כאשר X ו-Y נותרים קבועים על פני הזמן (מצב עמיד):

$$Y_t = Y_{t-1} = ... = Y_{t-p} = Y^*$$
$$X_t = X_{t-1} = ... = X_{t-p} = X^*$$

מציאת המכפילים במודל הדינמי:

לעיתים אנו מתבקשים למצוא את המכפילים של מודל דינמי מסוים (לטווח קצר, בינוני וארוך) ואף מתבקשים לבדוק השערות ביחס אליהם.

אדגים את מציאת המכפילים על המודל הדינמי הבא: $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$

1) מכפל טווח קצר (מיידי):

X היום משפיע על Y היום דרך β_0 **:** $\frac{\partial Y_t}{\partial X_t} = \beta_0$

2) מכפל ביניים מסדר j (מכפיל דינמי):

בכדי למצוא את המכפיל הדינמי "נגלגל" את המודל 2 תקופות אחורה:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$$
$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1(\alpha + \beta_0 X_{t-1} + \beta_1 Y_{t-2} + u_{t-1}) + u_t$$
$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1\alpha + \beta_1 \beta_0 X_{t-1} + \beta_1^2 Y_{t-2} + \beta_1 u_{t-1} + u_t$$
$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1\alpha + \beta_1\beta_0 X_{t-1} + \beta_1^2(\alpha + \beta_0 X_{t-2} + \beta_1 Y_{t-3} + u_{t-2}) + u_t$$
$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1\alpha + \beta_1\beta_0 X_{t-1} + \beta_1^2\alpha + \beta_1^2\beta_0 X_{t-2} + \beta_1^3 Y_{t-3} + \beta_1^2 u_{t-2} + u_t$$

ההשפעה של X_t **על** Y_t **היא:** β_0

ההשפעה של X_{t-1} **על** Y_t **היא:** $\beta_0\beta_1$

ההשפעה של X_{t-2} **על** Y_t **היא:** $\beta_0\beta_1^2$

מכאן ניתן להסיק שבאופן כללי ההשפעה של X_{t-j} **על** Y_t **היא:**

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}} = \beta_0\beta_1^j$$

חישוב מכפל הביניים בדרך קצרה:

β_1	β_0	
Y_{t-1}	X_t	Y_t

Y_{t-1}	X_{t-1}	Y_{t-2}
Y_{t-2}	X_{t-2}	Y_{t-3}

ניתן לראות כי X_{t-2} משפיע על Y_t דרך β_0 , β_1 , β_1 כלומר $\beta_0\beta_1^2$.

סביר שככל ש-X רחוק יותר בזמן כך השפעתו קטנה יותר ולכן $\beta_1 < 1$.

3) מכפל טווח ארוך:

מכפל טווח ארוך מהווה את סך ההשפעות:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial X^*} = \sum_{j=0}^{P} \beta_0\beta_1^j = \beta_0 + \beta_0\beta_1 + \beta_0\beta_1^2 + \ldots + \beta_0\beta_1^p =$$
$$= \beta_0(1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_1^p)* =$$
$$= \beta_0 \cdot \frac{1}{1-\beta_1}$$

*** סכום של טור הנדסי יורד.**

? חשבו את שלושת סוגי המכפלים של המודלים הדינמיים הבאים:

א. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$

ב. $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$

הקשר בין מתאם סדרתי למודלים דינמיים

המתאם הסדרתי נובע מהשמטה של דינמיות מבנית במודל. המודל המקורי היה צריך להיות מודל דינמי אך נאמד בטעות מודל סטטי. הדינמיות תבוא אז לידי ביטוי ב"קריזות", כלומר במתאם הסדרתי.

רגרסיית ההפרשים, המהווה פיתרון למתאם הסדרתי, היא למעשה מודל דינמי:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha(1-\rho) + \beta X_t + \beta\rho X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha_0 + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

<u>לסיכום:</u> בכדי לפתור את בעיית המתאם הסדרתי יש לאמוד מלבד את המשתנה המוסבר בזמן t גם את המשתנה המוסבר והמסביר בזמן t-1 .

המשתנה בפיגור Y_{t-1} נועד לפתור מתאם סדרתי מסדר ראשון , Y_{t-2} ישמש לפתירת מתאם סדרתי מסדר שני וכך הלאה.

בכדי לבדוק קיומו של מתאם סדרתי במודל דינמי לא נוכל לבצע מבחן DW אלא רק מבחן LM.

השלכות על אל"פ של משתנה מוסבר בפיגור כמשתנה מסביר

בניגוד למשתנה מסביר רגיל (X), Y_{t-1} הינו משתנה מקרי.

משום כך אר"פ ברגרסיה הכוללת משתנים כאלה הם מוטים (להזכירכם בהוכחת חוסר הטיה של האומדים השתמשנו בהנחה מס' 4 הגורסת כי המשתנים המסבירים <u>אינם</u> משתנים מקריים).

$$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{Y_t Y_{t-1}}}{S_{Y_{t-1} Y_{t-1}}}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + E\left(\frac{\sum (Y_{t-1} - \bar{Y})u_t}{\sum (Y_{t-1} - \bar{Y})^2}\right) \neq \beta$$

מאחר והמשתנה המקרי נשאר בתוך התוחלת, לא ניתן להשתמש בהנחה מספר 1: $E(u_t) = 0$. לכן הביטוי השני איננו מתאפס והאומד הוא אומד מוטה.

בנוסף לכך העקיבות של האומדים תלויה בקיום מתאם סדרתי:

$$\hat{\beta} \rightarrow \beta + \frac{COV(Y_{t-1}, u_t)}{V(Y_{t-1})}$$

אם אין מתאם סדרתי $COV(Y_{t-1}, u_t) = 0 \Leftarrow$ האומד עקיב.

אם יש מתאם סדרתי $COV(Y_{t-1},u_t)\neq 0 \Leftarrow$ והאומד איננו עקיב.

<u>לסיכום: ההשלכות על אר"פ:</u>

1) **האומדים מוטים ולכן ניתן לבצע בדיקת השערות רק במדגמים גדולים (T>30).**

2) **אם אין מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים עקיבים ויעילים (ניתן לבצע בדיקת השערות במדגמים גדולים).**

אם יש מתאם סדרתי $\Leftarrow$ האומדים אינם עקיבים ואינם יעילים (לא ניתן לבצע בדיקת השערות גם במדגמים גדולים).

שאלות מסכמות-מתאם סדרתי ומודלים דינמיים

<u>שאלה מס' 1</u>

המודל הבא הורץ ב- SAS עם מדגם בעל 100 תצפיות: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$

א. מהפלט עולה DW=0.195 לפיכך:

1. לא קיים מתאם סדרתי

2. קיים מתאם סדרתי והוא:______________

3. לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.

ב. לפי תשובתך לסעיף א חווה דעתך על תכונות האומדים:

מוטים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ליניאריים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

יעילים   נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

עקיבים   נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. אמידה של איזו משוואה תפתור באופן מלא את הבעיה שנוצרה במודל:

1. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + u_t$

2. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_{t-1} + u_t$

3. $Y_t = \alpha + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$

ד. בדוק את ההשערה כי לפי מודל (3) השפעת X על Y הולכת ופוחתת עם הזמן.

מצורף החלק הרלוונטי מהפלט:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	0.42	0.06	7.00	0.000
X	1	0.25	0.03	8.33	0.000
Y1	1	0.85	0.05	17.00	0.000

ה. מהו המכפיל הדינמי בתקופה t-8 ?

<u>שאלה מס' 2</u>

הקשר בין כמות הכסף לבין רמת האינפלציה במשק נאמד בסדרה עתית על ידי המשוואה הבאה:

$$M_t = \alpha + \beta \cdot P_t + U_t \qquad (1)$$

כאשר : M_t = **כמות הכסף במשק בחודש t**

P_t = **מדד המחירים לצרכן במשק בחודש t**

משוואה (1) נאמדה בפלט מס' 1.

א. לפי מבחן על הסטטיסטי DW , נראה כי ב- U_t **:**

1. **לא ניתן לחשב את הסטטיסטי DW מהנתונים הקיימים**
2. **קיים מתאם סדרתי שלילי**
3. **קיים מתאם סדרתי חיובי**
4. **לא קיים מתאם סדרתי**
5. **לא ניתן לקבוע אם המתאם הסדרתי מובהק.**

ב. סמנו את התשובה הנכונה בהכרח:

1. **האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים אך לא יעילים**
2. **האומדים ליניאריים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים**
3. **האומדים מוטים אך עקיבים**
4. **האומדים חסרי הטיה, אך לא עקיבים**
5. **כל התשובות אינן נכונות.**

ג. אומד השונות מוטה ובדיקת השערות לא תקפה: נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

חוקר טען כי הבעיה שנוצרה במשוואה (1) תיפתר ע"י אמידת המשוואה הבאה:

$$M_t = \alpha_1 + \beta_1 \cdot P_t + \beta_2 \cdot M_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

כאשר M_{t-1} **הינה כמות הכסף בשנה הקודמת.**

משוואה (2) נאמדה בפלט מס' 2, כמו כן נאמדה על ידי החוקר המשוואה המופיעה בפלט מס' 3.

ד. הרגרסיה המופיעה בפלט מס' 3 נועדה לבדיקת : ________________________

במשוואה: __________________________

על ידי מבחן: __________________________

גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשום תוצאה מספרית):____________________

ה. לאור תשובתך לסעיף ג' טענת החוקר: נכונה / לא נכונה/ אי אפשר לדעת

ו. האומד ל- β_1 במשוואה (2) הוא מוטה אך עקיב: נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ז. ניתן להשתמש בסטטיסטי DW לבדיקת מתאם סדרתי במשוואה (2):
נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת.

ח. חשבו את המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה t-i

ט. בדקו את הטענה כי המכפיל הדינמי לשינוי P בתקופה t-1 ($\frac{\partial M_t}{\partial P_{t-1}}$) הינו 90% מהמכפיל המיידי בטווח הקצר.

י. רשמו את השערת האפס עבור הטענה כי המכפיל בט"א שווה ל- 1 .

מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבחינת ההשערה?

סעיף 2 - פלט מס' 1 - משוואה (1)

pendent Variable: m

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	44.03828	44.03828	5145.80	<.0001
Error	103	0.88148	0.00856		
Corrected Total	104	44.91976			

Root MSE	0.09251	R-Square	0.9804
Dependent Mean	8.53854	Adj R-Sq	0.9802
Coeff Var	1.08344		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	1.49372	0.09862	15.15	<.0001
p	1	1.69267	0.02360	71.73	<.0001

Durbin-Watson D 0.208

סעיף 2 - פלט מס' 2 - משוואה (2)

pendent Variable: m

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	42.19946	21.09973	15988.1	<.0001
Error	101	0.13329	0.00132		
Corrected Total	103	42.33275			

Root MSE	0.03633	R-Square	0.9969
Dependent Mean	8.55393	Adj R-Sq	0.9968
Coeff Var	0.42469		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.40374	0.06790	5.95	<.0001
m1	1	0.81811	0.03857	21.21	<.0001
p	1	0.28127	0.06633	4.24	<.0001

$m1 = m_{t-1}$

שאלה 2 - פלט מס' 3

Dependent Variable: res Residual   RES = $\hat{\varepsilon}_t$ = טעות אמידה משוואה (2)

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	0.00032896	0.00010965	0.08	0.9695
Error	99	0.13173	0.00133		
Corrected Total	102	0.13206			

Root MSE	0.03648	R-Square	0.0025
Dependent Mean	0.00033853	Adj R-Sq	-0.0277
Coeff Var	10775		

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	Intercept	1	0.03298	0.08192	0.40	0.6881
p		1	0.02640	0.07979	0.33	0.7415
m1		1	-0.01672	0.04705	-0.36	0.7230
res1		1	-0.01304	0.11039	-0.12	0.9062

RES1 = $\hat{\varepsilon}_{t-1}$

Dependent Variable: lny   שאלה 3 - פלט מס' 1 - משוואה (1)

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	71.06922	14.21384	40.35	<.0001
Error	397	139.83633	0.35223		
Corrected Total	402	210.90554			

Root MSE	0.59349	R-Square	0.3370
Dependent Mean	7.14247	Adj R-Sq	0.3286
Coeff Var	8.30934		

Parameter Estimates

Variable	Label	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	Intercept	1	6.44240	0.10765	59.84	<.0001
d1		1	-0.28522	0.13600	-2.10	0.0366
d2		1	-0.77210	0.13276	-5.82	<.0001
d3		1	0.43817	0.06804	6.44	<.0001
exp	exp	1	0.07116	0.00860	8.28	<.0001
exp2		1	-0.00144	0.00015662	-9.17	<.0001

<u>**פרק 17 - משוואות סימולטניות**</u>

עוסקות בהפרה של הנחה 4 המדברת על כך שהמשתנים הב״ת במשוואת הרגרסיה אינם משתנים מקריים ולכן לא מתואמים עם הטעויות: $\text{cov}(x,u)=0$.

במילים אחרות ה-Xים במשוואה נחשבו <u>משתנים אקסוגניים</u>- משפיעים על Y אך לא מושפעים ממנו בחזרה.

זהו סוג של משתנים כלכליים הנשלט על ידי קובעי המדיניות או גורמים חיצוניים אחרים.

דוגמא למשתנה אקזוגני: שער חליפין קבוע (הנקבע באופן אקזוגני על ידי הבנק המרכזי) המשפיע על כמות הכסף במשק אך לא מושפע ממנה בחזרה.

לעומת זאת, קיים סוג נוסף של משתנים כלכליים ב״ת הקרויים <u>משתנים אנדוגניים</u>- משפיעים על Y אך גם מושפעים ממנו בחזרה.

מאחר ומשתנים אלו הם גם מסבירים וגם מוסברים, הם נחשבים כמשתנים מקריים, המתואמים עם הטעויות במודל: $\text{cov}(x,u)\neq 0$.

לדוגמא: התצרוכת הפרטית מושפעת בדר״כ מרמת ההכנסה, וזו מושפעת מן הביקושים השונים לתוצר, ולכן גם ההכנסה וגם התצרוכת נקבעים ביחד באופן אנדוגני במערכת.

משוואות המבנה(משוואות סימולטניות)

מערכת משוואות הכוללות משתנים מסבירים אנדוגניים ואקסוגניים הנמצאות בשיווי משקל.

בדר״כ מדובר בשתי משוואות אשר המשתנה המוסבר בראשונה הוא משתנה מסביר בשנייה והמשתנה המוסבר בשנייה הוא משתנה מסביר בראשונה.

משתנים המופיעים באחת המשוואות כמוסברים ובאחרת כמסבירים הם משתנים אנדוגניים. יתר המשתנים במשוואות הם אקסוגניים.

לדוגמא:

(1)

(2)

X ו-Y הם משתנים אנדוגניים הנקבעים סימולטנית במערכת (למשל, תצרוכת והכנסה) ואילו ה-Zים הם משתנים אקזוגניים (כמו למשל, שער הדולר ומגדר):

$\operatorname{cov}(x,u) \neq 0$, $\operatorname{cov}(y,u) \neq 0$ **ואילו-** $\operatorname{cov}(z_{jt},u) = 0$

יתכן והמערכת תכלול משוואה נוספת המתארת מצב של שיווי משקל בין שתי המשוואות.

לדוגמא:

נניח שאנו רוצים לאמוד את הביקוש לתירס ואת ההיצע של התירס במדינה. הכמות המבוקשת והכמות המוצעת מושפעות מן המחיר ומשפיעות עליו.

מערכת משוואות הביקוש וההיצע של התירס הנה מהצורה:

משוואת הביקוש: $Qd_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 X_t + u_t$

משוואת ההיצע: $Qs_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + v_t$

משוואת שיווי המשקל: $Qd_t = Qs_t = Q$

כאשר:

Qd_t=**כמות ביקוש של תירס**

Qs_t=**כמות היצע של תירס**

P_t=**מחיר התירס**

X_t =הכנסה **Z_t =מי גשם**

שלושת משוואות אלו מכונות <u>המשוואות המבניות</u> שכן הן מתארות את מבנה שוק התירס.

תחילה יש להחליט מהם המשתנים האנדוגניים והאקסוגניים במערכת:

- **משתנה תלוי הוא תמיד אנדוגני (Q_t).**

- **השאלה היא איזה מהמשתנים <u>המסבירים</u> הוא אנדוגני: כזכור הכמות המבוקשת והמוצעת מושפעות מן המחיר אך גם משפיעות עליו. לפיכך מחיר התירס הוא אנדוגני (P_t).**

- **המשתנים האנדוגניים נקבעים סימולטנית במערכת ומתואמים עם הטעויות במערכת:** $\text{cov}(p_t,u_t)\neq 0;\text{cov}(Q_t,u_t)\neq 0$

- **המשתנים האקזוגניים במערכת: מי גשם (Z_t) שהוא כמובן משתנה חיצוני שלא מושפע מן הביקוש וההיצע וכמו כן, בהנחה שהמשק לא מייצר רק תירס אז גם הכנסה (X_t) היא משתנה אקזוגני למערכת:** $\text{cov}(z_t,u_t)=0;\text{cov}(x_t,u_t)=0$

המטרה היא , כמו תמיד, לאמוד בצורה יעילה את הפרמטרים (אלפות ובטות) ולבצע בדיקת השערות.

הבעיה היא כי ברגע שקיים משתנה <u>מסביר</u> אנדוגני במערכת, אמידת כל אחת מהמשוואות המבניות בנפרד בשיטת OLS תניב אומדים <u>לא ליניאריים, מוטים, לא יעילים ולא עקיבים.</u>

השלכות על אל״פ

הנחה 4 שימשה אותנו להוכחת ליניאריות, חוסר הטיה ועקיבות.

לכן הפרתה של הנחה זו משמעה פגיעה בכל תכונות אר״פ. האומדים לא ליניאריים, מוטים לא עקיבים ולכן גם לא יעילים (לפי גאוס מרקוב). אומד השונות מוטה גם הוא ובדיקת ההשערות לא תקפה (ללא תלות בגודל המדגם).

נלמד 3 שיטות אמידה אחרות: ILS, TSLS ו-IV. אך ראשית יש לבטא את המשוואות המבניות בצורה אחרת הנקראת: "הצורה המצומצמת".

הצורה המצומצמת של מודל עם משוואות סימולטניות

משוואות הצורה המצומצמת הן פיתרון עבור המשתנים האנדוגניים במערכת: הגדרת המשתנים האנדוגניים כפונקציה של המשתנים האקזוגניים במערכת בלבד.

מספר המשוואות המצומצמות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת (במקרה זה שניים).

התהליך האלגברי הוא כדלקמן:

- **נשווה בין שתי המשוואות בשיווי משקל:** $Qd_t = Qs_t$

$$\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 X_t + u_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + v_t$$

- **נחלץ את P:**

$$P_t = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} X_t + \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} Z_t + \frac{v_t + u_t}{\alpha_1 - \beta_1}$$

- **הצורה המצומצמת:**

$$P_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t + \lambda_2 Z_t + \varepsilon_{1t}$$

כאשר:

$$\lambda_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\varepsilon_{1t} = \frac{v - u}{\alpha_1 - \beta_1}$$

- **כדי לבטא את Q במונחים של משתנים אקזוגניים בלבד, נצטרך להציב את P באחת המשוואות (לא משנה איזה כי הן נמצאות בשיווי משקל):**

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1(\lambda_0 + \lambda_1 X_t + \lambda_2 Z_t + \varepsilon_t) + \alpha_2 X_t + u_t$$

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_0 + (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2)X_t + \alpha_1\lambda_2 Z_t + \alpha_1\varepsilon_t + u_t$$

- **הצורה המצומצמת עבור Q:**

$$Q_t = \mu_0 + \mu_1 X_t + \mu_2 Z_t + \varepsilon_{2t}$$

כאשר:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda_0 \\ \mu_1 &= \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2 \\ \mu_2 &= \alpha_1\lambda_2 \\ \varepsilon_2 &= \alpha_1\varepsilon_1 + u_t \end{aligned}$$

<u>משוואות הצורה המצומצמת שהתקבלו:</u>

$$P_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t + \lambda_2 Z_t + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \mu_0 + \mu_1 X_t + \mu_2 Z_t + \varepsilon_{2t}$$

<u>תכונות המשוואות מהצורה המצומצמת</u>

- **מס' המשוואות הוא כמספר המשתנים האנדוגניים במערכת (P ו-Q).**
- **המשתנה המוסבר הוא אנדוגני וכל המסבירים אקסוגניים.**
- **המשתנים המסבירים הם זהים בכל המשוואות (X ו-Z).**
- **מכיוון שכל המשתנים המסבירים הם אקסוגניים ניתן לאמוד את הפרמטרים (ה-λות וה-μים) ב-OLS ולקבל אומדים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים עם יכולת לבצע בדיקת השערות.**

<u>אמידת הפרמטרים של משוואות המבנה באמצעות משוואות הצורה המצומצמת</u>

משוואות הצורה המצומצמת מאפשרות, כאמור, לאמוד את הפרמטרים (ה- λ ות וה- μ ים) בשיטת OLS אבל אנחנו מעוניינים למעשה לאמוד את הפרמטרים של המשוואות המקוריות- משוואות המבנה (ה- α ות וה- β ות).

מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת נחלץ את הפרמטרים של משוואות המבנה: מתוך ה- λ ות נחלץ את ה- α ות ומתוך ה- μ ים נחלץ את ה- β ות.

בתהליך החילוץ של הפרמטרים המבניים ייתכנו 3 מצבים:

1) **<u>אין זיהוי:</u> לא ניתן לחלץ את הפרמטרים המבניים (ה- α ות וה- β ות) מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת (ה- λ ות וה- μ ים). זה קורה כשיש פחות משוואות מנעלמים (כלומר פחות λ ות ו- μ ים מ- α ות ו- β ות) אז יש אינסוף פתרונות.**

2) **<u>זיהוי מדויק:</u> יש רק דרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מהפרמטרים של הצורה המצומצמת, זה קורה כשיש בדיוק אותו מספר משוואות ונעלמים (פיתרון יחיד).**

3) **<u>זיהוי יתר:</u> יש יותר מדרך אחת לחלץ את הפרמטרים המבניים מתוך הפרמטרים של הצורה המצומצמת. זה קורה כשיש יותר משוואות מנעלמים (יותר מפתרון אחד).**

בכדי להקל על בעיית הזיהוי מומלץ לאמץ את הכלל הבא:

עבור כל אחת מהמשוואות המבניות יש לחשב:

1) $g-1$: מס' אנדוגניים במשוואה הספציפית פחות 1

ולהשוות עם:

2) $K-k$: מספר אקסוגניים סה"כ בשתי המשוואות כולל חותך (K) פחות מספר אקסוגניים במשוואה הספציפית כולל חותך (k).

אם 1= 2 זיהוי מדויק ; 1 > 2 זיהוי יתר; 1 >2 אין זיהוי

בדוגמא שלנו:

משוואת הביקוש: $Qd_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 X_t + u_t$

משוואת ההיצע: $Qs_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + v_t$

<u>עבור משוואת הביקוש:</u>

g-1: 2-1=1

K-k: 3-2=1

מכיוון ש: $g-1 = K-k$

הזיהוי של ה- α **ות מתוך משוואות הצורה המצומצמת יהיה <u>מדויק</u>.**

<u>עבור משוואת ההיצע:</u>

g-1: 2-1=1

K-k: 3-2=1

מכיוון ש: $g-1 = K-k$

הזיהוי של ה- β **ות מתוך משוואות הצורה המצומצמת יהיה <u>מדויק</u>.**

? חוקר רצה לאמוד את פונקצית הביקוש ואת פונקצית ההיצע לתות שדה.

הוא אסף נתונים עבור 30 תקופות:

Pt **- מחיר קופסא בש"ח בתקופה *t*.**

Qt **- כמות נקנית בק"ג בתקופה *t*.**

Zt **- מחיר פרי תחליפי בש"ח בתקופה *t*.**

INCOMEt **- הכנסת הצרכנים באלפי ש"ח בתקופה *t*.**

Lt **- מחיר שעת עבודה בש"ח בתקופה *t*.**

א. החוקר מניח שהכמות המבוקשת היא פונקציה של מחיר התות שדה, של מחיר הפרי התחלפי ושל הכנסת הצרכנים, והכמות המוצעת היא פונקציה של מחיר התות שדה ושל מחיר העבודה.

נסחו את המודל הסימולטני, תחת ההנחה שהגמישויות קבועות.

הציגו גם את תנאי הסדר וקבעו עבור כל משוואה אם היא מזוהה במדויק, ביתר או בחסר, וקבעו האם ניתן לזהות את מקדמי המשוואות, באילו שיטות ומהן תכונות האומדנים שיתקבלו?

ב. עיינו במודל 1 שבדפי הפלט והשיבו: איזו פונקציה נאמדה, והאם תוצאות האמידה שהתקבלו מתיישבות עם התיאוריה הכלכלית? נמקו!

ג. עיינו בדפי הפלט המתאימים והשיבו: אם העלות של שעת עבודה תעלה באחוז אחד, מהם השינויים הצפויים בכמות ובמחיר של שווי משקל?

ד. בתקופה מסוימת אנו צופים שמחיר המוצר התחלפי יהיה 10 ₪, ההכנסה תהיה 50 אלף ₪, מחיר שעת עבודה 25 ₪. מה יהיה מחיר שווי המשקל של תות השדה? האם ניתן גם לאמוד את כמות שווי המשקל?

להלן הפלטים:

Model 1: TSLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: l_Q

Instruments: l_L

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.83485	1.14385	-1.604	0.10869
l_P	-1.34898	0.645690	-2.089	0.03669 **
l_Z	1.72145	0.467875	3.679	0.00023 ***
l_income	0.984145	0.483543	2.035	0.04182 **

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 2.67757

Standard error of residuals = 0.32091

Unadjusted R-squared = 0.222881

Adjusted R-squared = 0.133214

F-statistic (3, 26) = 2.48564 (p-value = 0.0829)

Model 3: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: l_Q

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	0.499595	0.630065	0.793	0.43500
l_L	-0.611731	0.163450	-3.743	0.00091 ***
l_income	0.395076	0.142590	2.771	0.01019 **
l_Z	0.937441	0.197381	4.749	0.00007 ***

Mean of dependent variable = 2.8776

Standard deviation of dep. var. = 0.300322

Sum of squared residuals = 0.834357

Standard error of residuals = 0.179139

Unadjusted R-squared = 0.681008

Adjusted R-squared = 0.644201

F-statistic (3, 26) = 18.5023 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 11.1662

(Log-likelihood for Q = -75.1618)

Model 4: OLS estimates using the 30 observations 1-30

Dependent variable: l_P

VARIABLE	COEFFICIENT	STDERROR	T STAT	P-VALUE
const	-1.73053	0.419481	-4.125	0.00034 ***
l_L	0.453478	0.108821	4.167	0.00030 ***
l_income	0.436678	0.0949326	4.600	0.00010 ***
l_Z	0.581185	0.131411	4.423	0.00015 ***

Mean of dependent variable = 2.99427

Standard deviation of dep. var. = 0.314761

Sum of squared residuals = 0.369832

Standard error of residuals = 0.119266

Unadjusted R-squared = 0.871281

Adjusted R-squared = 0.856428

F-statistic (3, 26) = 58.6632 (p-value < 0.00001)

Log-likelihood = 23.3704

(Log-likelihood for P = -66.4576)

שיטות לפיתרון משוואות סימולטניות

קיימות 3 שיטות לפיתרון משוואות סימולטניות: ILS, TSLS ו-IV.

1) **<u>שיטת ריבועים פחותים עקיפה (ILS)</u>**

א. יש להציג את מערכת משוואות המבנה בצורתה המצומצמת.

ב. יש לאמוד בשיטת OLS את הפרמטרים של המשוואות בצורה המצומצמת (ה- λ ות וה- μ ים).

ג. יש לחלץ מן הפרמטרים של המערכת המצומצמת את הפרמטרים של הצורה המבנית (ה- α ות וה- β ות).

משום שתהליך החילוץ איננו ליניארי האומדים המבניים המתקבלים הם מוטים אך עקיבים.

כאשר <u>הזיהוי מדויק</u> האומדים יהיו גם אסימפטוטית יעילים (במדגמים גדולים).

כאשר <u>הזיהוי הוא יתר</u>: האומדים לא יהיו יעילים.

בדוגמא שלנו:

<u>מערכת המשוואות המבניות:</u>

משוואת הביקוש: $Qd_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 X_t + u_t$

משוואת ההיצע: $Qs_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + v_t$

<u>מערכת המשוואות בצורתה המצומצמת:</u>

$$P_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t + \lambda_2 Z_t + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \mu_0 + \mu_1 X_t + \mu_2 Z_t + \varepsilon_{2t}$$

<u>נאמוד את הפרמטרים של הצורה המצומצמת</u> בשיטת OLS ונקבל את האומדים:

$$\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$$

אומדים אלו יקיימו את כל תכונות אר"פ.

התמודדנו קודם לכן עם <u>שאלת הזיהוי</u> וקבענו כי עבור שתי המשוואות <u>הזיהוי הוא מדויק</u>, כלומר קיים פיתרון אחד עבור כל אומד.

כעת נוכל <u>לחלץ את האומדים המבניים</u> מתוך האומדים של הצורה המצומצמת.

אלו האומדים של הצורה המצומצמת:

$$\hat{\mu}_0 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1\hat{\lambda}_0 \qquad \hat{\lambda}_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1}$$

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\alpha}_1\hat{\lambda}_1 + \hat{\alpha}_2 \qquad \hat{\lambda}_1 = -\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1}$$

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\alpha}_1\hat{\lambda}_2 \qquad \hat{\lambda}_2 = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1}$$

אנחנו צריכים לבטא את האומדים המבניים: $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ במונחי האומדים המצומצמים:

נתחיל מ- $\hat{\alpha}_1$: $\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}$

$\hat{\alpha}_2$:

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_1 - \hat{\alpha}_1\hat{\lambda}_1$$

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_1 - \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}\hat{\lambda}_1$$

$\hat{\alpha}_0$:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\mu}_0 - \hat{\alpha}_1\hat{\lambda}_0$$

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\mu}_0 - \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}\hat{\lambda}_0$$

נעבור ל- λ ות:

נתחיל מ- $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\alpha}_2 + \hat{\lambda}_1\hat{\alpha}_1}{\hat{\lambda}_1}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\mu}_1 - \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_1\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}}{\hat{\lambda}_1}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1}$$

$\hat{\beta}_2$ **:**

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\lambda}_2(\hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1)$$
$$\hat{\beta}_2 = \hat{\lambda}_2(\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2} - \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1})$$
$$\hat{\beta}_2 = \hat{\mu}_2 - \frac{\hat{\lambda}_2\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1}$$

$\hat{\beta}_0$ **:**

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\lambda}_0(\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1) + \hat{\alpha}_0$$
$$\hat{\beta}_0 = \hat{\lambda}_0(\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2} + \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1}) + \hat{\mu}_0 - \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}\hat{\lambda}_0$$
$$\hat{\beta}_0 = \hat{\lambda}_0\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1} + \hat{\mu}_0$$

לסיכום:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\mu}_0 + \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}\hat{\lambda}_0 \qquad \hat{\beta}_0 = \hat{\lambda}_0\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1} + \hat{\mu}_0$$
$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1}$$
$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_1 - \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2}\hat{\lambda}_1 \qquad \hat{\beta}_2 = \hat{\mu}_2 - \frac{\hat{\lambda}_2\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1}$$

אומדים אלו יהיו אמנם מוטים אך עקיבים ויעילים אסימפטוטית כך שניתן יהיה לבצע בדיקת השערות במדגמים גדולים.

כעת משנתונות לנו תוצאות האמידה של המשואות המצומצמות, נוכל לחשב את האומדים של המשוואות המבניות.

למשל:

תוצאות האמידה של מערכת המשוואות בצורתה המצומצמת:

$$P_t = 1.2 + 3.4X_t + 4Z_t$$

$$Q_t = 3 + 1.3X_t + 2Z_t$$

חשב את האומדים לשיפוע מחיר התירס הן במשוואת הביקוש והן במשוואת ההיצע.

<u>**תשובה:**</u>

נחשב את α_1 **ואת** β_1 **:**

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\lambda}_2} = \frac{2}{4} = 0.5$$
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\lambda}_1} = \frac{1.3}{3.4} = 0.38$$

? נניח שאנו מתכוונים לאמוד את המשוואות:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$
$$Y_t = C_t + Z_t$$

כאשר:

C_t= **הוצאות לתצרוכת פרטית**

Y_t= **הכנסה לאומית**

u_t= **הפרעה אקראית**

א. מהי הבעיה באמידת המשוואות בשיטת הריבועים הפחותים? מהן תכונות אר"פ?

ב. האם המשוואות מזוהות?

ג. אמדו את מערכת המשוואות בצורתה המצומצמת באופן ידני.

ד. מהו הפיתרון של המשוואות המצומצמות בשיטת ILS?

להלן תוצאות אמידת מערכת המשוואות בצורה המצומצמת:

Dependent Variable: C

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	14848.38	2568.8	5.78027	0.000
Z	1	-0.087066	0.3036	-0.2867	0.776

Dependent Variable: Y

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	14848.38	2568.8	5.78027	0.0000
Z	1	0.912934	0.3036	3.00699	0.0049

ה. חשבו את האומדים המבניים

2) <u>שיטת ריבועים פחותים בשני שלבים (2SL2)</u>

לשיטה זו שני שלבים:

א. אמידת משוואות הצורה המצומצמת בשיטת OLS ושימוש בתוצאות האמידה כדי לחשב את המשתנים האנדוגניים (המסבירים).

ב. הצבת המשתנים האנדוגניים שהתקבלו במשוואות המבנה ואמדתן ב-OLS.

אם משוואות המבנה <u>מזוהות בדיוק או ביתר</u>- האומדים שיתקבלו יהיו אמנם מוטים אבל עקיבים ויעילים אסימפטוטית.

אם הזיהוי מדויק-האומדים שיתקבלו יהיו זהים לאומדים שהתקבלו בשיטת הריבועים הפחותים העקיפה.

<u>כאשר אין זיהוי:</u> אין אקסוגניים ולכן אין משתנים מסבירים בצורה המצומצמת או שכל האקזוגניים בצורה המצומצמת כבר קיימים במשוואה המקורית ולכן החלפת x ב- $\hat{x}$ תיצור בעיה של מולטיקולינאריות מלאה.

בדוגמא שלנו:

<u>מערכת המשוואות המבניות:</u>

משוואת הביקוש: $Qd_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 X_t + u_t$

משוואת היצע: $Qs_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + v_t$

<u>מערכת המשוואות בצורתה המצומצמת:</u>

$$P_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t + \lambda_2 Z_t + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \mu_0 + \mu_1 X_t + \mu_2 Z_t + \varepsilon_{2t}$$

א. <u>אמידת $\hat{p}_t$ במשוואה המצומצמת ב-OLS:</u>

$$\hat{P}_t = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 X_t + \hat{\lambda}_2 Z_t$$

חישוב $\hat{p}_t$

ב. <u>הצבת $\hat{p}_t$ במשוואות המבנה ואמידתן ב-OLS :</u>

$$Qd_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{P}_t + \alpha_2 X_t + u_t$$

$$Qs_t = \beta_0 + \beta_1 \hat{P}_t + \beta_2 Z_t + v_t$$

? תאר את תהליך האמידה בשני שלבים (2SLS) של משוואות המבנה:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$
$$Y_t = C_t + Z_t$$

כאשר:

C_t=**הוצאות לתצרוכת פרטית**

Y_t=**הכנסה לאומית** u_t=**הפרעה אקראית**

1. **מה ניתן יהיה לומר על האומדים שהתקבלו בשיטה זו?**
2. **מה יהיה ערכם של האומדים $\hat{\beta}$ ו- $\hat{\alpha}$?**

להלן תוצאות האמידה בשיטת 2 השלבים:

Dependent variable: C

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	16264.47	8221.233	1.978349	0.0520
y	1	-0.095370	0.364274	-0.261808	0.7943

Dependent variable: Y

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-9.95E-09	3.52E-09	-2.828212	0.0062
C	1	1.00000	2.08E-13	4.80E+12	0.0000
Z	1	1.00000	1.99E-13	5.04E+12	0.0000

? לפניך המודל הסימולטני הבא:

משוואת הביקוש $Q_t^D = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Z_t + u_t$

משוואת ההיצע $Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 P_t + v_t$

$$Q_t^D = Q_t^S$$

P_t - **מחיר המוצר בתקופה *t***

Q_t^D - **כמות מבוקשת בתקופה *t***

Q_t^S - **כמות מוצעת בתקופה *t***

Z_t - **מחיר המוצר התחלפי בתקופה *t***

Z_t **הוא משתנה אקסוגני.**

א. רשום את המשוואות המצומצמות וקבע את התכונות של אומדי OLS למשוואות אלה.

ב. היעזר בשיטת ILS לאמידת הפרמטרים של המשוואה שניתן לזהות, אם התקבלו המשוואות המצומצמות הבאות:

$$\hat{Q}_t = 2 + 3Z_t$$

$$\hat{P}_t = 1 + 4Z_t$$

ג. באם ננסה לאמוד את משוואת הביקוש בשיטת TSLS:

האם ניתן יהיה לאמוד מספרית את המשוואה של השלב הראשון? נמק!
האם ניתן יהיה לאמוד מספרית את המשוואה של השלב השני? נמק!

ד. החוקר מנסה לאמוד את משוואת ההיצע בשיטת TSLS.
למה שווה האומדן שיתקבל ל- β_1 ?

3) שיטת משתני עזר (IV)

משתנה עזר הוא משתנה שיחליף את המשתנה המסביר האנדוגני במשוואת המבנה ויעזור לאמוד את הקשר בינו לבין התלוי.

משתנה העזר צריך להיות:

1. **משתנה אקזוגני או פונקציה ליניארית של משתנים אקזוגניים:**
   $\text{cov}(Z,u) = 0$

2. **מתואם עם המשתנה האנדוגני אותו הוא מחליף:** $\text{cov}(Z,X) \neq 0$.

ככל שהמתאם גבוה יותר, האומד שיתקבל באמצעותו יהיה טוב יותר.

לדוגמא:

נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ **כאשר:** $\text{cov}(X_t,u_t) \neq 0$.

הבעיה: אומדני OLS שיתקבלו יהיו מוטים, לא עקיבים ולא יעילים.

הפיתרון בשיטת IV: אמידת ההשפעה של X על Y עם משתנה אחר Z שמתואם עם X אך לא עם u:

$$\operatorname{cov}(Z, X) \neq 0$$
$$\operatorname{cov}(Z, u) = 0$$

<u>תכונות האומדים שיתקבלו באמצעות משתני העזר:</u>

אם יש יותר ממשתנה עזר אחד המקיימים את התנאים הנ"ל, האומדים שיתקבלו יהיו כולם מוטים אך עקיבים (ניתן להשתמש בהם במדגמים גדולים).

משתנה העזר היחיד שיניב אומד יעיל יהיה בעל המתאם הגבוה ביותר עם המשתנה האנדוגני אותו הוא בא להחליף.

<u>משתנה העזר הטוב ביותר</u> (והיחיד שיניב אומדים יעילים):

אומדן לאנדוגני שהתקבל מאמידת משוואת הצורה המצומצמת בשלב הראשון של 2SLS.

<u>משתנה לא יוכל לשמש כמשתנה עזר:</u>

אם נוסחתו מכילה רק משתנים אקזוגניים המצויים במשוואת המבנה בה הוא משמש כמשתנה עזר, שכן אז תיווצר בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.

במילים אחרות, נוסחת משתנה העזר צריכה להיות מורכבת מלפחות משתנה אקזוגני אחד שלא מופיע במשוואה כדי שהמשתנה יוכל לשמש כמשתנה עזר.

<u>משתני עזר שונים יכולים להניב את אותם האומדים לפרמטרים:</u>

נבדוק זאת בצורה הבאה: נמחק מהנוסחאות של משתני העזר את המשתנים האקסוגניים המופיעים במשוואה. אם נשארנו עם שני ביטויים שהם מכפלה אחד של השני, יתקבלו אותם האומדים.

לדוגמא:

נתונה משוואת המבנה הבאה:

$$Y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{2t} + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + \ldots + \beta_k Z_{(k-1)t} + u_t$$

המשתנים האנדוגניים: Y_1, Y_2

המשתנים האקזוגניים: $Z_1 \ldots Z_{k-1}$

בשיטת IV נחפש משתנה עזר שיחליף את המשתנה המסביר האנדוגני Y_2

משתנה עזר תקף: Z_k

שכן הוא מקיים את התנאים הבאים:

1) **לא משפיע באופן ישיר על Y_1 (אינו נמצא במשוואת המבנה).**

2) $\operatorname{cov}(Z_k, u_t) = 0$ **(משתנה אקזוגני).**

3) $\operatorname{cov}(Z_k, Y_2) \neq 0$ **(מתואם עם המשתנה האנדוגני אותו הוא מחליף).**

ככל שהקשר שלו עם האנדוגני טוב יותר כך משתנה העזר יניב אומדים יעילים יותר לפרמטרים.

****<u>הערה חשובה:</u> שיטת האמידה בשני שלבים- 2SLS היא מקרה פרטי של שיטת משתנה העזר:**

האומדן לאנדוגני שמתקבל בשלב הראשון מהווה את משתנה העזר היחיד שיניב אומדים יעילים (מבין אפשרויות אחרות של משתני עזר שיניבו אומדים עקיבים בלבד).

בדוגמא שלנו:

ניצור משתנה עזר $\hat{Y}_{2t}$ שיחליף את Y_{2t} על ידי אמידת המשוואה המצומצמת בשלב הראשון של 2SLS

משוואת הצורה המצומצמת:

$$Y_{2t} = \pi_0 + \pi_1 Z_{1t} + \ldots + \pi_{k-1} Z_{k-1} + v$$

<u>שלב ראשון 2SLS :</u> נריץ רגרסיה של המשוואה המצומצמת בשיטת OLS כדי לאמוד את Y_{2t} :

$$\hat{Y}_{2t} = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Z_{1t} + \ldots + \hat{\pi}_{k-1} Z_{k-1}$$

$\hat{Y}_{2t}$ מהווה משתנה עזר העומד בכל התנאים הדרושים:

1) אינו נמצא במשוואת המבנה ($\hat{Y}_{2t} \neq Y_{2t}$).

2) הוא פונקציה של משתנים אקזוגניים בלבד ולכן לא מתואם עם הטעויות במשוואת המבנה ($\operatorname{cov}(\hat{Y}_{2t}, u) = 0$), כלומר, הוא מהווה משתנה אקזוגני במשוואת המבנה בניגוד למשתנה אותו הוא מחליף- Y_{2t}.

3) מקיים קשר עם Y_{2t} ($\operatorname{cov}(\hat{Y}_{2t}, Y_{2t}) \neq 0$). למעשה, זהו האומד שהקשר שלו עם Y_{2t} יהיה החזק ביותר מבין משתני העזר האפשריים ולכן היחיד שיניב אומדים יעילים לפרמטרים.

<u>בשלב השני של 2SLS:</u> נריץ רגרסיה בשיטת OLS של משוואת המבנה תוך שימוש במשתנה העזר $\hat{Y}_{2t}$ במקום Y_{2t} :

$$Y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 \hat{Y}_{2t} + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + ... + \beta_k Z_{(k-1)t} + u_t$$

ההנחות הקלאסיות מתקיימות בשלב השני מכיוון ש- $\operatorname{cov}(\hat{Y}_{2t}, u) = 0$.

$\hat{\beta}_1$ מהרגרסיה הזו הוא האומד הטוב ביותר בשיטת IV של β_1 .

? נתונות המשוואות הבאות :

(1)

(2)

נתון כי: משתנים אנדוגניים ו- משתנים אקסוגניים.

חוו דעתכם על כל אחת מהטענות הבאות, והסבירו:

א. ניתן להשתמש ב- כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס׳ (1).

ב. ניתן להשתמש ב- כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס׳ (2).

ג. יתכנו מספר אומדים עקיבים שונים זה מזה ל- במשוואה מס׳ (2).

ד. שימוש ב- כמשתנה עזר לאמידת משוואה מס׳ (2) יניב אומדים עקיבים וגם יעילים.

ה. משתנה העזר $Z_{1t}+Z_{2t}$ **יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב׳.**

ו. משתנה העזר $3Z_{1t}+5Z_{2t}$ **יניב אותם אומדים כמו משתנה העזר בסעיף ד׳.**

ז. **משתנה העזר** $7Z_{1t}+5Z_{2t}$ **יניב אומדים זהים לאלו שהתקבלו בסעיף ב׳.**

<u>סיכום תוצאות אמידה של משוואות סימולטניות</u>

מס׳ האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות ותכונותיהם תלויים בזיהוי של המשוואה:

אם <u>המשוואה לא מזוהה:</u> לא ניתן להשתמש באף אחת מהשיטות.

כאשר <u>המשוואה מזוהה</u> (בדיוק או ביתר):האומדים שיתקבלו בשלושת השיטות יהיו תמיד מוטים אך עקיבים.

תכונת היעילות ומס' האומדים האפשרי מסוכמים בטבלה הבאה:

	מזוהה בדיוק	מזוהה ביתר
שיטת ILS	אומד אחד לפרמטר יעיל	יתכן יותר מאומד אחד לפרמטר לא יעילים
שיטת 2SLS	אומדן אחד למשתנה האנדוגני יעיל	
שיטת IV	אינסוף משתני עזר אם משתנה העזר זהה לאומדן לאנדוגני המתקבל בשלב הראשון בשיטת- 2SLS הוא יהיה גם יעיל.	

כאשר <u>הזיהוי מדויק</u> יתקבל אותו אומד מוטה אך עקיב ויעיל בשלושת השיטות: ILS, 2SLS ו- IV (במידה ומשתנה העזר הוא $\hat{X}_t$ מהשלב הראשון של 2SLS).

משתנים בפיגור ומשוואות סימולטניות

אם X_t אקסוגני אז גם המשתנים בפיגור X_{t-p} בוודאות אקסוגניים.

אם Y_t אנדוגני אז מעמדם של המשתנים בפיגור תלוי בקיומו של מתאם סדרתי:

אם יש מתאם סדרתי ($\mathrm{cov}(Y_{t-1},u_t)\neq 0$) אז Y_{t-1} אנדוגני.

אם אין מתאם סדרתי ($\mathrm{cov}(Y_{t-1},u_t)=0$) אז Y_{t-1} אקסוגני.

מבחנים סטטיסטיים:

1) **מבחן האוזמן (Hausman Test)**

מבחן המשמש אותנו לבחינת אנדוגניות של משתנה מסוים.

- **השלב הראשון לביצוע מבחן האוזמן הוא הרצת המשוואה המצומצמת – כלומר,המשתנה שחושדים שהוא אנדוגני כתלוי על כל האקסוגניים.**
- **מאמידה זו נשמור את סידרת השאריות הנאמדות (vhat).**
- **כעת נאמוד את המודל המקורי (משוואת המבנה) ונוסיף לו את (vhat) כמשתנה מסביר חדש.**
- **לפי תוצאות האמידה- אם המקדם של vhat מובהק נסיק כי המשתנה הוא אכן משתנה אנדוגני במודל.**

לדוגמא:

נניח שאתם מעוניינים לאמוד את הקשר בין כלכלה לפיתוח פוליטי. לכל מדינה i נסמן ב Y_i – את הרמה הנאמדת של ההכנסה, נסמן ב - s_i את שיעור החיסכון במדינה i וב - D_i את האיתנות הנאמדת של השלטון הדמוקרטי. אתם שוקלים לאמוד מודל ליניארי של הכנסה ושיעור החיסכון על איתנות הממשל דמוקרטי:

$$D_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 s_i + \varepsilon_i$$

אבל אתם חוששים ש - $Cov(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$.

הסבירו כיצד תשתמשו ב – *Hausman Test* כדי לבחון את ההשערה:

$H_0 : Cov(Y_i, \varepsilon_i) = 0$?

<u>תשובה:</u>

- **נאמוד בשיטת הריבועים הפחותים את המשוואה המצומצמת:** $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 s_i + v_i$
- **נחזה את השאריות:** $\hat{v}_i$.
- **נאמוד את משוואת המבנה המקורית בתוספת הטעות כמשתנה מסביר נוסף:**

$D_i = \beta_1 + \beta_2 y_i + \beta_3 s_i + \delta \hat{v}_i + u_i$ **ונבצע מבחן להשערה:** $H0 : \delta = 0$

אם דוחים את H0 נוכל להסיק כי המשתנה אנדוגני ולהפך.

2) מבחן לחוזק IV:

מבחן שמתבצע על המשוואה המצומצמת שבה נעשה שימוש במשתני העזר.

בודקים:

א. האם משתנה העזר לניבוי המשתנה התלוי מובהק באופ' באמצעות מבחן t למובהקות מקדם הרגרסיה. אם כן- ניתן להסיק כי המשתנה האקסוגני, המשמש כמשתנה עזר, מתואם עם האנדוגני אותו הוא אמור להחליף.

ב. אולם בכדי לבדוק האם משתני העזר חזקים מספיק נבצע מבחן F למובהקות כל משתני העזר המוצעים במשוואה המצומצמת. כלל אצבע-רק אם $F_{stat} > 10$ נוכל להסיק כי משתני העזר חזקים מספיק בכדי שנוכל לקבל תוצאות אמינות כאשר אנו משתמשים בהם.

לדוגמא:

נתונה מערכת המשוואות הסימולטניות הבאות –

$$Y_{1i} = \gamma Y_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$
$$Y_{2i} = \delta Y_{1i} + \beta_3 X_{3i} + \nu_i$$

כאשר X_1, X_2, X_3 הינם משתנים אקסוגניים.

להלן מערכת המשוואות של הצורה המצומצמת:

$$Y_{1i} = \pi_{11} X_{1i} + \pi_{12} X_{2i} + \pi_{13} X_{3i} + \tilde{u}_i$$
$$Y_{2i} = \pi_{21} X_{1i} + \pi_{22} X_{2i} + \pi_{23} X_{3i} + \tilde{v}_i$$

תארו כיצד בודקים ש - X_{1i} ו - X_{2i} אינם משתני עזר חלשים ל - Y_{1i} במשוואה השנייה?

<u>תשובה:</u>

נריץ את המשוואה המצומצמת הראשונה: $Y_{1i} = \pi_{11} X_{1i} + \pi_{12} X_{2i} + \pi_{13} X_{3i} + \tilde{u}_i$.

נבצע מבחן F להשערה: $H0: \pi_{11} = \pi_{12} = 0$.

נאמר ש: X_{1i} ו - X_{2i} הם משתני עזר חלשים אם $F_{stat} < 10$.

תרגילים מסכמים

? נתונות המשוואות הבאות:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_{1t} + \alpha_3 Z_{2t} + \alpha_4 Z_{3t} + \alpha_5 Z_{4t} + u_t \quad \textbf{(1)}$$

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_{1t} + \beta_3 Z_{2t} + \beta_4 Z_{5t} + v_t \quad \textbf{(2)}$$

נתון כי: $\mathrm{cov}(Z_j, u_t) = 0$ **עבור** $j = 1,\ldots,5$ **(כלומר ה-Z-ים אקסוגניים).**

א. אמידת כל אחת מהמשוואות תניב אומדים:

1. מוטים נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

2. עקיבים נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ב. משוואה (1) מזוהה בדיוק/מזוהה ביתר/ בלתי מזוהה

משוואה (2) מזוהה בדיוק/ מזוהה ביתר/ בלתי מזוהה

ג. חווה דעתך על הטענות הבאות:

1. תוך שימוש בשיטת ILS ניתן לאמוד את משוואה (1) באופן עקיב וחד ערכי: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

2. תוך שימוש בשיטת ILS ניתן לאמוד את משוואה (2) באופן עקיב וחד ערכי: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ד. משוואות הצורה המצומצמת הן:

$$Y_t = \lambda_0 + \lambda_1 Z_{1t} + \lambda_2 Z_{2t} + \lambda_3 Z_{3t} + \lambda_4 Z_{4t} + \lambda_5 Z_{5t} + \varepsilon_{1t}$$
$$X_t = \mu_0 + \mu_{1t} + \mu_2 Z_{2t} + \mu_3 Z_{3t} + \mu_4 Z_{4t} + \mu_5 Z_{5t} + \varepsilon_{2t}$$

נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ה. אמידת משוואות הצורה המצומצמת ב-OLS תניב אומדים חסרי הטיה, עקיבים ויעילים: נכון/לא נכון/ אי אפשר לדעת

ו. להלן רשימה של משתני עזר פוטנציאליים:

1. Z_5

2. $\frac{Z_1+Z_5}{2}$

3. $2Z_1+3Z_2+Z_3$

4. Z_3+Z_4

5. $3Z_3+4Z_4$

6. $3Z_3+3Z_4$

7. Z_1

עבור כל משתנה רשום באיזה משוואה ניתן להשתמש בו אם בכלל.

ז. איזה מבין משתני העזר הבאים יניבו את אותם האומדים עבור אותה המשוואה (תתכן יותר מתשובה אחת נכונה):

1. **1 ו-2**
2. **4 ו-6**
3. **5 ו-6**
4. **4 ו-5**

ח. האם משתנה עזר 1 (Z_5) יניב אומדים יעילים?

ט. אם ידוע כי אין מתאם סדרתי, האם Y_{t-1}, X_{t-1} הם אנדוגניים או אקסוגניים?

י. האם הוספה של משתנה אקזוגני נוסף למשוואה 1 תשנה את הזיהוי של משוואה 2?

יא. האם הוספה של משתנה אקסוגני נוסף למשוואה 2 תשנה את הזיהוי של משוואה 1?

יב. הנח כי הוטלו המגבלות הבאות על הפרמטרים המבניים:

$\alpha_2 = \beta_2 = 0$. **האם ניתן כעת לזהות את יתר הפרמטרים במודל?**

? היצע העבודה של נשים נשואות היה נושא מרכזי במחקר הכלכלי. לצרוך אמידת היצע זה נבחר המודל הבא:

$$HOURS = \beta_1 + \beta_2 WAGE + \beta_3 EDUC + \beta_4 AGE + \beta_5 KIDSL6 + \beta_6 KIDS618 + \beta_7 NWIFEINC + \varepsilon$$

כאשר:

HOURS- היצע העבודה בשעות

WAGE- שכר לשעה

EDUC-מספר שנות הלימוד

AGE- גיל

KIDSL6-מספר הילדים בבית מתחת לגיל 6

KIDS618-מספר הילדים בגילאים 6-18

NWIFEINC-הכנסת משק הבית ממקורות שאינם מעבודתה של האישה

א. מהם הסימנים שתצפו לקבל בכל אחד מהמקדמים?

ב. הסבירו מדוע לא ניתן לאמוד את משוואת ההיצע הנ"ל בשיטת הריבועים הפחותים.

ג. הניחו כי אנחנו משתמשים בניסיון של האישה בשוק העבודה (EXPER) ובריבועו ($EXPER^2$) כמשתני עזר למשתנה WAGE. הסבירו מדוע משתני העזר הללו עונים על הדרישות שלנו ממשתני עזר.

ד. תארו את השלבים (לא בפקודות מחשב) שתבצעו כדי לקבל את האומדים בשיטת TSLS.

? נתונה מערכת המשוואות הסימולטניות הבאה –

$$Y_{1i} = \gamma Y_{2i} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$
$$Y_{2i} = \delta Y_{1i} + \beta_3 X_{3i} + v_i$$

כאשר X_1, X_2, X_3 הינם משתנים אקסוגנים.

א. חלצו את מערכת המשוואות המצומצמת ה (Reduced Form Equations) של Y_1 ו - Y_2 (ז"א פתרו את המערכת המבנית עבור שני המשתנים האנדוגניים Y_1 ו - Y_2 על מנת לקבל את הצורה המצומצמת. כתבו את המקדמים והשאריות במערכת המצומצמת למטה כפונקציות של הפרמטרים והשאריות במערכת המבנית)

$$Y_{1i} = \pi_{11} X_{1i} + \pi_{12} X_{2i} + \pi_{13} X_{3i} + \tilde{u}_i$$
$$Y_{2i} = \pi_{21} X_{1i} + \pi_{22} X_{2i} + \pi_{23} X_{3i} + \tilde{v}_i$$

ב. הראו שבהינתן אומדים עקיבים ל - $\pi_{11},\ldots,\pi_{23}$, ניתן למצוא אומד עקיב ל - γ

ג. האם γ ניתן לזיהוי כאשר $\beta_3 = 0$?

ד. אילו תנאים צריכים X_{1i} ו - X_{2i} לקיים בכדי להיות משתני עזר ל - Y_{1i} במשוואה השנייה?

ה. תארו כיצד בודקים ש - X_{1i} ו - X_{2i} אינם משתני עזר חלשים ל - Y_{1i} במשוואה השנייה?

? נניח שאתם מעוניינים לאמוד את הקשר בין כלכלה לפיתוח פוליטי. לכל מדינה i נסמן ב Y_i – את הרמה הנאמדת של ההכנסה וב - D_i את האיתנות הנאמדת של השלטון הדמוקרטי. אתם שוקלים לאמוד מודל ליניארי של הכנסה על ממשל דמוקרטי:

$$D_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \varepsilon_i$$

אבל אתם חוששים ש - $Cov(Y_i, \varepsilon_i) \neq 0$.

א. הסבירו מדוע החשש שההכנסה מתואמת עם השגיאה במשוואה הנ"ל הגיוני?

ב. האם אומד הריבועים הפחותים של β_2 הינו חסר הטיה?

ג. נסמן ב - s_i את שיעור החיסכון במדינה i. הסבירו אלו תנאים צריך משתנה עזר (IV) לקיים. נמקו מדוע s_i מתאים או לא מתאים לשמש כמשתנה עזר.

ד. הסבירו כיצד תשתמשו בשיטת *2SLS* כדי לאמוד את β_2. האם האומד המתקבל עקיב?

ה. הסבירו כיצד תשתמשו ב – *Hausman Test* כדי לבחון את ההשערה

$H_0: Cov(Y_i, \varepsilon_i) = 0$?

פרק 18 - סיכום תכונות אר"פ

אם המודל שאותו אנו אומדים מנסח נכון את הקשר המתמטי בין המשתנים וכולל את כל המשתנים הרלוונטיים להסבר התופעה ורק אותם ולא קיים קשר חזק או מלא בין המשתנים הבלתי תלויים במודל וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות, אזי האומדים שאותם נקבל הם א.ח.ה, הם BLUE (יעילים) והם עקיבים.

הבעיה במודל	כולל את כל המשתנים הרלוונטיים	לא כולל משתנים שאינם רלוונטיים	אין קשר חזק או מלא בין הב"ת	כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות	פגיעה בתכונות אר"פ
אין בעיה	√	√	√	√	אין פגיעה
השמטת משתנים רלוונטיים	×	√	√	√	פגיעה בכל התכונות- *מוטים, לא יעילים ולא עקיבים
הוספת משתנים לא רלוונטיים	√	×	√	√	אין פגיעה
מולטיקוליניאריות חלקית	√	√	×	√	אין פגיעה
מולטיקוליניאריות מלאה	√	√	×	√	אר"פ אינם מוגדרים
הטרוסקדסטיות	√	√	√	$V(u_t)=\sigma_t^2$ ×	יעילות
מתאם סדרתי	√	√	√	$\mathrm{cov}(u_t,u_s)\neq 0$ ×	יעילות
מודלים דינמיים	√	√	√	$\mathrm{cov}(x,u)\neq 0$ ×	מוטים היעילות והעקיבות תלויים בקיום מתאם סדרתי
משוואות סימולטניות	√	√	√	$\mathrm{cov}(x,u)\neq 0$ ×	**אומדים מוטים אך עקיבים. היעילות תלויה בשיטה.

*אלא אם אין מתאם בין המשתנה הב"ת שהושמט לאלו המצויים במודל.

**בהנחה שהמשוואות מזוהות.