אלגברה

לינארית ב'

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & o & \pi \\ \varpi & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - מרחבים וקטורים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .

$M_n\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W=\{(a,b,c)\mid a+b+c=0\}$.

ב. $W=\{(a,b,c)\mid a=c\}$.

ג. $W=\{(a,b,c)\mid a=3b\}$.

ד. $W=\{(a,b,c)\mid a<b<c\}$.

ה. $W=\{(a,b,c)\mid a=c^2\}$.

ו. $W=\{(a,b,c)\mid b=a+d,\ c=a+2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W=\{(a,b,c)\mid b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$ כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n\left[R\right]$:

א. W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A\mid A=A^T\}$.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W=\{A\mid AB=BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\mid |A|=0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A\mid A^2=A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,

$W=\{A\mid AB=0\}$.

ז. W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n\left[R\right]$.

א. W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≤ 4. כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\le 4\}$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4\le n\le 7$.

ו. $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F\left[R\right]$.

א. W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x) \mid f(-x)=f(x)\}$.

ב. W מורכב מכל הפונקציות החסומות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x) \mid \left|f(x)\right|\le M\}$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W=\left\{f(x) \mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0,1]$).

ז. $W=\left\{f(x) \mid f'(x)=0\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W=\left\{f(x) \mid f'(x)=1\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W=\left\{f(x) \mid f(x)=f(x+1)\right\}$.

(5) בדוק האם $W=\left\{\left(z_1,z_2,z_3\right) \mid z_2=\overline{z_1}, z_3=z_1+\overline{z_1}\right\}$ הוא תת מרחב של C^3:

א. מעל השדה הממשי R.

ב. מעל שדה המרוכבים C.

<u>צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית</u>

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$u_1=(4,1,1,5)$, $u_2=(0,11,-5,3)$, $u_3=(2,-5,3,1)$, $u_4=(1,3,-1,2)$.

א. 1. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?

2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלוייה לינארית ?

ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ד. נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$.

3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

ה. נתון $v=(a,b,c,d)$

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?

ו. הבע את הוקטור $(2,-3,3,1)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 ו- u_3 .

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 , u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

(7) נתונות המטריצות הבאות :

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.
2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.
3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים :

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$

$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3 .$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.
2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a,b,c הוקטורים הבאים תלויים לינארית :

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}.$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלוייה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף של הוקטורים האחרים :

א. $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

ב. $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

ג. $\{u+v,v+w,w\}$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C. ב. מעל R.

<u>בסיס ומימד</u>

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

1) $\{ (1,0,1), (0,0,1) \}$

2) $\{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$

3) $\{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

1) $$\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$$

2) $$\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$$

3) $$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

1) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3 \}$

2) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$

3) $\{ 1+2x+3x^3,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3.

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T.

ג. השלם את T' לבסיס של

<u>מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית</u>

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

(1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ (2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ (3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3) .

א) מצא בסיס וממד ל- W , U ו- V.

ב) 1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. 2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(18) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(19) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(20) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(21) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \mid A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(22) נתון $U=\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

<u>מציאת בסיס וממד לתת מרחב</u>

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

<u>מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה</u>

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת המטריצה (rank) :

(1
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס

(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{ (1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1) \}\ ,\quad B_2 = \{ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1) \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

(1 $[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$ (2 $[M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$ (3 $[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2 = \{\ 1+x^2, x+x^2,\ x^2\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

פרק 2 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. מצא מטריצה אופיינית.

ב. מצא פולינום אופייני.

ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצא וקטורים עצמיים.

ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009}.

ט. מצא את הפולינום המינימלי.

י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$

6) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R.

(2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.

ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:

1. $|A|=|B|$. 2. $tr(A)=tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP=B$ אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

פרק 3 - העתקות (טרנספורמציות) לינאריות

העתקות לינאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) לינארית. הגדר את המושג אופרטור לינארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה לינארית.

1) $T:R^2\to R^2$; $T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T:R^3\to R^3$; $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T:R^3\to R^2$; $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T:R^2\to R^3$; $T(x,y)=(xy,y,z)$

5) $T:R^3\to R^3$ $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=BA+AB$ $\left(B\in M_n[R]\right)$

7) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A+A^T$

8) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=|A|\cdot I$

9) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A\cdot A^T$

10) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A^{-1}$

11) $T:P_3[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$; $T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T:C[F]\to C[F]$; $T\left(z\right)=\overline{z}$ $\left(F=C,F=R\right)$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$T(x,y)=\left(m^2x^{2m},\,y^{2m}+x\right)\quad ;\quad T:R^2\to R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3)\,,\,T(0,1,1)=(4,5,6)\,,\,T(0,0,1)=(7,8,9)$.

ב. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,0,1)=(1,1,0)\,,\,T(0,1,1)=(1,2,1)\,,\,T(0,0,1)=(0,1,1)$.

ג. $T:R^4\to R^3$ כך ש- $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

ד. $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T\left(1-x\right)=x^2+1$.

<u>תמונה וגרעין של העתקות לינאריות</u>

(5) נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$. הגדר והדגם את המושגים:

א. הגרעין של ההעתקה - $KerT$. ב. התמונה של ההעתקה - $\mathrm{Im}T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה- $\mathrm{rank}T$ והאיפוס של העתקה - $\mathrm{null}T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה:

1) $T:R^4\to R^3\ ,\ T(x,y,z,t)=(x+y,\,y-4z+t,\,4x+y+4z-t)$

2) $T:R^3\to R^4\ ,\ T(x,y,z)=(x-4y-z,\,x+y,\,y-z,\,x+4z)$

3) $T:R^4\to R^3\ ,\ T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

4) $T:M_2[R]\to M_2[R]\ ,\ T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$

5) $T:P_2[R]\to P_2[R]\ ,\ T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

6) $D:P_3[R]\to P_3[R]\ ,\ D\left(p(x)\right)=p'(x)$

(7) מצא העתקה לינארית $T:R^3 \to R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T:R^4 \to R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T:V \to U$. הוכח כי אם $\dim \operatorname{Im} T = \dim KerT$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4 \to R^3$?

<u>העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם</u>

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על. כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא <u>חח"ע</u>, האם היא <u>על</u>, האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.

1) $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R] \to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R] \to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

<u>פעולות עם העתקות לינאריות</u>

(11) תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$S(x,y,z)=(x-z,y) \quad , \quad T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ 2) $4S$ 3) $4S-10T$ 4) TS 5) ST

6) T^2 7) T^{-1} 8) T^{-2} 9) S^{-1} 10) S^2

פרק 4 - מטריצות והעתקות לינאריות

הערה: כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

מטריצה שמייצגת העתקה

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $\left[v\right]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $\left[v\right]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

$$[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}\ (1\qquad [M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}\ (2\qquad [M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}\ (3$$

נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3\ ,\ T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$

ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_1}$.

ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_2}$.

ח. אשר את הטענות הבאות:

$$[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}\ (1\qquad\qquad [T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}\ (2$$

$$\left[M\right]_{B_2}^{B_1}\cdot\left[T\right]_{B_1}\cdot\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\left[T\right]_{B_2}\ (3$$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3. יהי T אופרטור לינארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix}$

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T: M_2[R] \to M_2[R]$, $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$

לפי הבסיס: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D: P_4[R] \to P_3[R]$, $D(p(x)) = p'(x)$

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

<u>מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס</u>

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n.

א. $T: R^2 \to R^3$, $T(x,y) = (x+y, y+z, z-x)$.

ב. $T: R^4 \to R^2$, $T(x,y,z,t) = (4x-y-z+t, x+y+4z+t)$.

(6) תהי $T: R^3 \to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T(x,y,z) = (4x+y-z, x-y+z)$.

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3 לבסיס $B_2 = \{(1,4),(1,5)\}$ של R^2. כלומר את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

פרק 5 - וקטורים

הערה: אנו נסמן את הוקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\vec{u}, \mathbf{u}$.

את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$ ז. $\underline{u}/|\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u},\underline{v})$ ט. $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$ י. $proj(\underline{u},\underline{v})$

* בסעיפים ז,ח,י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x=(1,2,3)+t(4,5,6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x=1+2t,\ y=10,\ z=4-t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו- B 2. B ו- C 3. A ו- C

ב. מי מבין הנקודות $D=(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- x , ציר ה- y וציר ה- z .

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4,5,6)$ ומקביל לציר z .

(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ והמאונך לישר $\underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר ℓ_2 העובר דרך הנקודה $P(-4,1,1)$, מאונך לישר

$\ell_1:\ (2,-3,1)+t(1,4,-3)$ וחותך אותו.

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,0,1)+s(-4,1,5)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x=1+2t-s,\ y=10+t,\ z=4-t+s$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא

הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

(11) נתונות הנקודות: $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

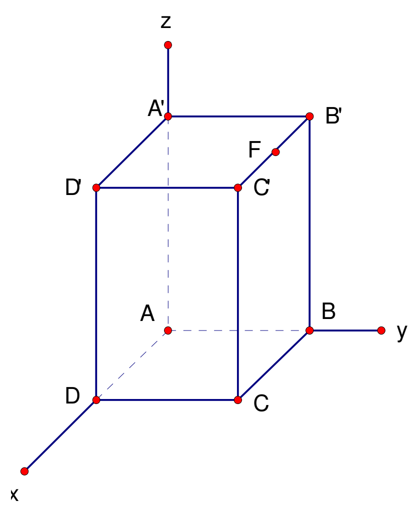
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר , המחבר את B עם C הראה כי הנקודה A לא נמצאת על

הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

(12) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ כמתואר בציור.



נתון: $|\overrightarrow{AA'}|=6$, $|\overrightarrow{AD}|=2$, $|\overrightarrow{AB}|=4$, $C'F=FB'$.

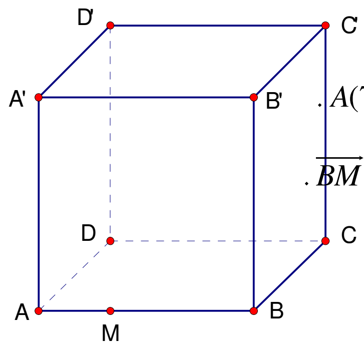
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר

דרך הנקודה F ומאונך למישור העובר

העובר דרך $A'DB$.

ב. מצא את מרחק הנקודה F מהמישור העובר

העובר דרך $A'DB$.



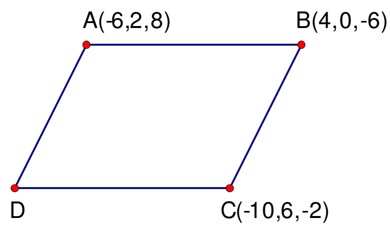
(13) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתונים הקודקודים :

$A(7,-9,5),\ B(1,-3,-7),\ C(-5,-1,-3),\ C'(-1,7,-1)$.

הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$.

א. חשב: $|\overrightarrow{MA'}|, |\overrightarrow{MC}|$.

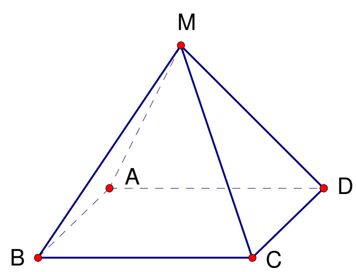
ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A'MC$.



(14 נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).

א. מצא את קודקוד D .

ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.



(15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$

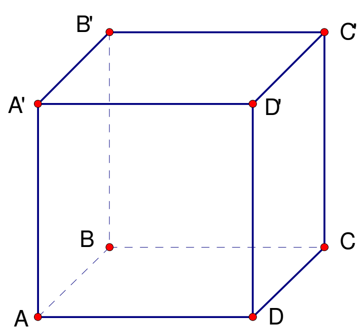
וקודקודה M (ראה ציור). נתון:

$A(3,6,-1),\ B(-1,2,-3),\ C(7,6,-3),\ M(4,-3,-4.5)$.

א. מצא את גודל זווית $\measuredangle ABC$.

ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.

ג. מצא את נפח הפירמידה.



(16) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

נתון: $A(1,2,0),\ C(4,0,1),\ D(2,2,-1),\ B'(9,12,8)$

חשב את נפח התיבה.

(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם:

נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.

א. $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0),\ \underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$.

ב. $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1),\ \underline{x}=(1,-1,0)+t(12,-3,1)$.

ג. $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1),\ \underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$.

ד. $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4),\ \underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$.

במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.

במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1:(x,y,z)=(4,3,1)+t(1,-3,2)$$
$$\ell_2:(x,y,z)=(5,-1,4)+m(-1,3,5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.

ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את ℓ_2 ומקביל ל- ℓ_1.

ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1:(x,y,z)=(3,1,1)+u(2,-1,-2)$$
$$\ell_2:(x,y,z)=(3,9,-6)+m(6,2,-1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?

ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.

אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות: $P(k,0,0)$, $Q(0,4,0)$, $R(0,k,3)$, $S(1,1,-1)$.

א. הראה שלא קיים ערך של k עבורו הישרים PQ ו- SR מקבילים.

ב. מצא עבור איזה ערך של k הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,

ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר ℓ_1 עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$.

הצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 היא: $\ell_2: (2,k+1,3)+t(k^2-9,-7,0)$.

א. 1. עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?

2. עבור איזה ערך של k הישרים מתלכדים?

ב. מצא משוואה של מישור π , המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לציר ה- z .

ג. עבור k שמצאת בתת סעיף א.1. , מצא את המרחק של ℓ_2 מהמישור π.

(22) נתונות ארבע נקודות: $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$

הישר ℓ_1 מחבר את הנקודה A עם הנקודה B.

הישר ℓ_2 מחבר את הנקודה C עם הנקודה D.

א. מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור הערך של k שמצאת בסעיף א. , מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1

ומקביל לישר ℓ_2 .

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר:

חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר ℓ עובר דרך הנקודות $A(4,-6,5)$ ו- $B(4+k,3,2)$

ונתון מישור $\pi: x-4y-kz-5=0$.

א. עבור איזה ערך של k הישר מקביל למישור?

ב. המישור π חותך את ציר ה- x בנקודה C .

עבור k שמצאת בסעיף א , חשב את הזווית בין המישור π לבין $\overrightarrow{BC}$.

(25) נתונים ישר : $\ell:(2,1,-1)+t(0,a,-1)$ ומישור : $\pi: x-2y-4z=4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר ℓ ומאונך למישור π .

(26) נתונים שני ישרים ומישור :

$$\ell_1:(x,y,z)=(2,1,1)+t(1,-1,-1)$$
$$\ell_2:(x,y,z)=(3,-1,2)+s(-2,1,1)$$
$$\pi:\ x-y+2z=3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

ב. מצא את הנקודות על הישר ℓ_2 שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$.

(27) בציור משמאל נתון טטראדר $SABC$.

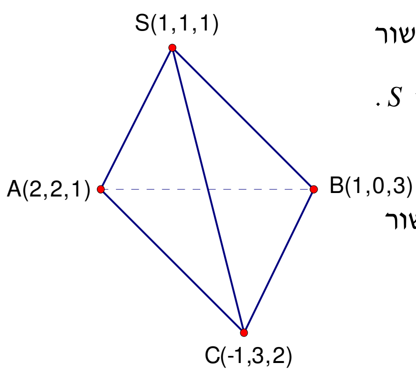
א. הוכח כי אחד המקצועות דרך S , ניצב למישור

הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך S .

ב. מצא את משוואות המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזוית שבין המקצוע AC לבין מישור

המשולש ΔSAB .



(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם :

מקבילים, מתלכדים או נחתכים.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים : $2x+3y-4z=10$, $x+2y-z=7$.

מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ_1 של שני המישורים.

ב. נתון : $\ell_2:(6,2,-2)+s(2,-1,1)$. מהו המצב ההדדי בין ℓ_1 ו- ℓ_2 .

(30) נתונים שני מישורים: $x-y+2z-7=0,\ 2x+y-3z+1=0$.

א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ של שני המישורים.

ב. עבור איזה ערך של הפרמטר C, יקביל הישר ℓ למישור $\pi: 4x-y+Cz-1=0$?

ג. עבור C שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר ℓ מהמישור π.

(31) נתונים שני מישורים: $x+y+2z=6,\ x-3y+4z=-10$ ונקודה $M(1,8,-3)$.

הישר ℓ הוא ישר החיתוך של המישורים הנ״ל.

א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה M וניצב לישר ℓ.

ב. מצא את מרחק הנקודה M מהישר ℓ.

(32) הישר $\ell: (0,-2,1)+t(-3,4,m)$ מקביל למישור $\pi_1: x-2y-4z=4$.

א. מצא את הקבוע m.

ב. הנקודה $N(2,-1,4)$ נמצאת על המישור π_1 ויוצרת עם הישר ℓ מישור π_2.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2.

(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא

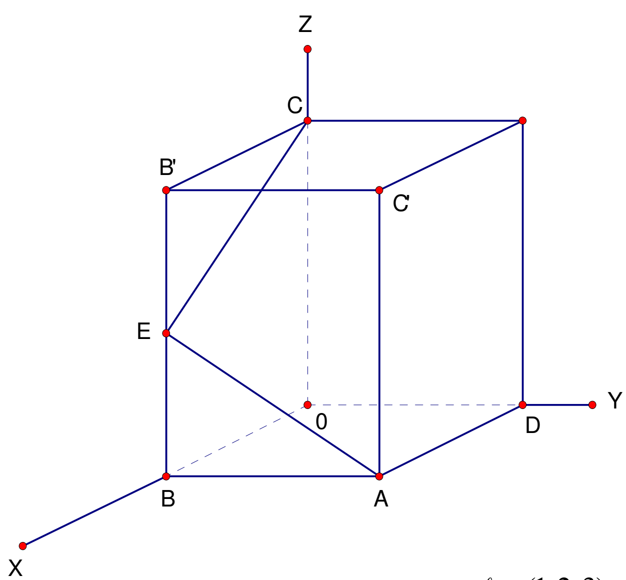
בראשית הצירים.

E אמצע BB' , $|AB|=1$.

א. חשב את זווית $\measuredangle CEA$.

ב. חשב את הזווית בין שני

המישורים AEC ו- $BODA$.



(34) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: (1,2,3)+t(3,-12,18)$$
$$\ell_2: (2,5,-1)+u(-4,16,-24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב- א., ועובר דרך הנקודה $(0,-1,0)$.

תשובות:

לתשומת לבכם!

הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

(1) $x=5, y=-2, z=6$.

(2) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$ ד. $(2.5,-1,-3.5)$
ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$ ז. $\frac{1}{\sqrt{26}}(-3,1,4)$ ח. 12.5698
ט. 14 י. $(\frac{-19}{7},\frac{19}{14},\frac{57}{14})$

(3) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

(4) א. $x=1+4t, y=2+5t, z=3+6t$ ב. $\underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

(5) א.1) $(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א.2) $(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$
א.3) $(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D
ג. 35.477°

(6) א. $t(1,0,0)$, $t(0,1,0)$, $t(0,0,1)$ ב. $(4,5,6)+t(0,0,1)$

(7) $(1,2,3)+t(2,1,0)$

(8) $(-4,1,1)+t(83,-32,-15)$

(9) א. $x=1+2t-4s, y=-2+s, z=3+t+5s$ ב. $(1,10,4)+t(2,1,-1)+s(-1,0,1)$

(10) א.1. $(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ א.2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא

(11) א. $(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. 1.4142 ג. $y-z+2=0$

(12) א. $(1,4,6)+t(6,3,2)$ ב. $\frac{18}{7}$

(13) א. $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{152}, |\overrightarrow{MA'}|=\sqrt{108}$ ב. 59.396

(14) א. $D(-20,8,12)$ ב. 81.62°

(15) א. 26.565° ב. $S=24$ ג. $V=32$

(16) $V=72$

(17) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. זווית בין הישרים 47.6°.

(18) ב. $3x+y=14$ ג. 0.31622

(19) א. מצטלבים ב. 10

(20) ב. $d=\frac{2}{15}, k=0.8$

(21) א.1. $k=-4$ א.2. $k=4$ ב. $x+y=7$ ג. 5.65685

(22) א. $k=2$ ב. $8x-4y+5z+1=0$

(23) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקי (3.5,-0.5,-2), זוית בין הישר למישור 40.78°

(24) א. $k=9$ ב. 14.67°

(25) א. $a=2$ ב. $10x+y+2z-19=0$

(26) א. ℓ_1 מוכל, ℓ_2 חותך. ב. $(-1,1,4),(\frac{11}{3},\frac{-4}{3},\frac{5}{3})$

(27) א. $SC\perp SAB$ ב. $2x-2y-z+1=0$ ג. 64.76°

(28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך : $(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$. זווית 63.612° .
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם : 0.324 ג. המישורים מתלכדים.

(29) א. $(9,0,2)+t(-5,2,-1)$ ב. מצטלבים

(30) א. $(2,-5,0)+t(1,7,3)$ ב. $C=1$ ג. 2.8284

(31) א. $5x-y-2z=3$ ב. 5.07

(32) א. $m=-8$ ב. $(2,-1,4)+t(-4,4,-8)$

(33) א. 78.463° ב. 35.26°

(34) א. $2x-10y-7z+39=0$ ב. $2x-10y-7z-10=0$

פרק 6 - מספרים מרוכבים

(1) פתור את המשוואות הבאות ומצא את z .

1) $z^2+9=0$ 2) $z^2-4z+5=0$ 3) $z^2-6z+13=0$.

(2) חשב:

1) $(i\sqrt{2})^6$ 2) $(i^5-i^{13})^2$ 3) $(4+i)-(2+10i)$ 4) $(-4-i)(2-3i)$.

(3) חשב (כתוב את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

1) $\frac{5}{2+i}$ 2) $\frac{1+i}{1-3i}$ 3) $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$

(4) פתור את המשוואות הבאות ומצא את המספר המרוכב z :

1) $2z-6i=\overline{z}-1$ 2) $z\overline{z}-5\overline{z}=10i$ 3) $(1+i)z^2+2z-i+1=0$.

(5) כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

1) $1+\sqrt{3}i$ 2) $-1-i$ 3) $-3-\sqrt{3}i$ 4) $1-i$

5) $1+i$ 6) $\sqrt{3}-i$ 7) $\sqrt{3}i$ 8) -8

(6) חשב:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ 2) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

4) $\sqrt[6]{-8}$ 5) $\sqrt[5]{1}$ 6) $\sqrt[3]{-8}$

(7) א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראה כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

(8) נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

(9) פתור את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

(10) א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .

ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

(11) א. פתור את המשוואה $z^5 = -16(\sqrt{3}-i)$.

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}$ באשר q מנת הסדרה.

(12) נתון $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$.

ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

(13) נתונה המשוואה $(iz+1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה z_1 ו- z_2 .

ב. הראה כי $\left|\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}\right| = \sqrt{3.25}$.

(14) נתונה המשוואה $(z-1)^3 = 1$. הוכח שסכום שורשיה הוא 3.

(15) נתונה המשוואה $z^3 = -\sqrt{3} + i$.

א. מצא את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3 .

ב. מצא את הסכום $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$.

ג. הראה כי הסכום $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

(16) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, z הוא מספר מרוכב.

כאשר s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .

ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצא את הפרמטרים s ו- t .

(17) א. פתור את המשוואה $\overline{z}\cdot i+\left(\overline{z}\right)^2+|z|^2+z+\overline{z}=0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א. , הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה

שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא: $1+\frac{1}{16}i$. האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$

באשר d נקרא הפרש הסידרה.

(18) נתון: $v=(5+i,2-3i,7+2i)$, $u=(3-2i,4i,1+6i)$. מצא:

1) $4u+v$ 2) $2i\cdot u-v$ 3) $u\cdot v$

4) $u\cdot u$ 5) $|u|$ 6) $|v|$

תשובות:

(1) 1) $\pm 3i$ 2) $2\pm i$ 3) $3\pm 2i$. **(2)** 1) -8 2) 0 3) $2-9i$ 4) $-11+10i$.

(3) 1) $2-i$ 2) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ 3) $-\frac{1}{2}+i$.

(4) 1) $z=-1+2i$ 2) $z=1+2i, z=4+2i$ 3) $z=i, z=-1$.

(5) (1) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ 2) $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$ 3) $\sqrt{12}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$

4) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$ 5) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ 6) $2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$

7) $\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ 8) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$ **(6)** 1) $\frac{1}{32}i$. 2) -2^9. 3) -1.

4) $k=0,1,2,3,4,5$ $8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)$.

5) $k=0,1,2,3,4$ $1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{5}+i\sin\frac{0+2\pi k}{5}\right)$.

6) $k=0,1,2$ $8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$.

(7) $z_1=cis60^\circ, z_2=cis240^0, z_3=cis120^\circ, z_4=cis300^\circ$.

(8) א. $z_1=1+\sqrt{3}i, z_2=-\sqrt{3}+i, z_3=-1-\sqrt{3}i, z_4=\sqrt{3}-i$. **(9)** $z=0$, $z=1$, $z=-1$.

(10) א. $z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_3=-i$.

(11) א. $n=1,2,3,4,5$ $z_n=2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ]$. ב. $q=cis72^\circ$.

(12) א. $z_1=cis45^\circ$, $z_2=cis165^\circ$, $z_3=cis285^\circ$. **(13)** א. $1+(1+\sqrt{3})i, -1+(1-\sqrt{3})i$.

(15) א. $z_1=\sqrt[3]{2}cis50^\circ, z_2=\sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_3=\sqrt[3]{2}cis290^\circ$. ב. 6. ג. $24i$.

(16) א. $z_2=-3s-\frac{t}{3s}i$, $z_2=-3s-\frac{t}{3s}i$. ב. $t=9$, $s=\pm1$. **(17)** א. $z_1=0$,

$z_2=-0.5+0.5i$. ב. $a_1=-8.5$. **(18)** א. $(17-7i, 2+13i, 11+26i)$.

ב. $(-1+5i, -10+3i, -19)$. ג. $20+35i$. ד. 66. ה. $\sqrt{66}$. ו. $\sqrt{92}$.