אלגברה

לינארית 2

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & o & \pi \\ \varpi & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. מצא מטריצה אופיינית.
ב. מצא פולינום אופייני.
ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
ה. מצא וקטורים עצמיים.
ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009}.
ט. מצא את הפולינום המינימלי.
י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}$ 5) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$ 6) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R.

(2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:
1. $|A|=|B|$. 2. $tr(A)=tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP=B$ אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

פרק 2 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$
9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
11) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

1) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

(1 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j\neq 1 \\ j & i<j \\ -j & i>j \end{cases}$

(2 $a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

(3 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

(4 $a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases}$

(5 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

(6 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1) \end{pmatrix}$

(*7 $a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases}$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3 , $|A|=4, |B|=2$. חשב:

(1 $|ABA^{-1}B^T|$ (2 $|4A^2B^3|$ (3 $|-A^{-2}B^TA^3|$ (4 $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4 , $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3 , $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: .1 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ .2 $|adj(A_{nxn})|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det(A_{nxn})=2, \det(B_{nxn})=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

(1
$$\begin{aligned} x+2y&=5\\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

(2
$$\begin{aligned} x+z&=3\\ 4x+y+8z&=21\\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

(3
$$\begin{aligned} x+2z+5t&=8\\ -2x-6y&=-8\\ 5x+3y-7z+4t&=5\\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1\\ x+ky+z+t+r&=1\\ x+y+kz+t+r&=1\\ x+y+z+kt+r&=1\\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

$$A=\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}\ (3 \qquad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}\ (2 \qquad A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ (1$$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix}-9&26&-1&14&10\\13&-7&87&4&0\\71&35&3&0&0\\17&2&0&0&0\\2&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix}4&0&7&5&0\\0&0&3k&0&0\\-7k^2&2&4k&k&9+k\\3&0&4&2&-1\\-5&0&-8&-3&2\end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

<u>**תשובות:**</u>

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29 . 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.

11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_2=a^2-bc, D_3=a^3-2abc$, $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$.

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13} . 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18, |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n . **(11)** 1) $x=1,\ y=2$.

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1,\ k\neq -4$. ב. $k=-2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$ 2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}-7 & 10 & 20 & -4\\ 2 & -3 & -6 & 1\\ -3 & 5 & 8 & -2\\ 1 & -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -10 & -20 & 4\\ -2 & 3 & 6 & -1\\ 3 & -5 & -8 & 2\\ -1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

פרק 3 - העתקות (טרנספורמציות) ליניאריות

העתקות ליניאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) ליניארית. הגדר את המושג אופרטור ליניארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה ליניארית.

1) $T:R^2\to R^2$; $T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T:R^3\to R^3$; $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T:R^3\to R^2$; $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T:R^2\to R^3$; $T(x,y)=(xy,y,z)$

5) $T:R^3\to R^3$ $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=BA+AB$ $\left(B\in M_n[R]\right)$

7) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A+A^T$

8) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=|A|\cdot I$

9) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A\cdot A^T$

10) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A^{-1}$

11) $T:P_3[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$; $T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T:C[F]\to C[F]$; $T\left(z\right)=\overline{z}$ $\left(F=C,F=R\right)$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)\ \ ;\ \ T:R^2\to R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3),\ T(0,1,1)=(4,5,6),\ T(0,0,1)=(7,8,9)$.

ב. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,0,1)=(1,1,0),\ T(0,1,1)=(1,2,1)\ ,\ T(0,0,1)=(0,1,1)$.

ג. $T:R^4\to R^3$ כך ש- $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

ד. $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T\left(1-x\right)=x^2+1$.

<u>תמונה וגרעין של העתקות לינאריות</u>

(5) נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$. הגדר והדגם את המושגים:

א. הגרעין של ההעתקה - $KerT$. ב. התמונה של ההעתקה - $\mathrm{Im}T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה- $\mathrm{rank}T$ והאיפוס של העתקה - $\mathrm{null}T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה:

1) $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)\ ,\ T:R^4\to R^3$

2) $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)\ ,T:R^3\to R^4$

3) $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\ ,\ T:R^4\to R^3$

4) $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A\ \ ,\ \ T:M_2[R]\to M_2[R]$

5) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)\ \ ,\ \ T:P_2[R]\to P_2[R]$

6) $D\left(p(x)\right)=p'(x)\ \ ,\ \ D:P_3[R]\to P_3[R]$

(7) מצא העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T:R^4\to R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$. הוכח כי אם $\dim \operatorname{Im}T=\dim KerT$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

<u>העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם</u>

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על. כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא <u>חח"ע</u>, האם היא <u>על</u>, האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.

1) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

<u>פעולות עם העתקות לינאריות</u>

(11) תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$S(x,y,z)=(x-z,y) \quad , \quad T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ 2) $4S$ 3) $4S-10T$ 4) TS 5) ST

6) T^2 7) T^{-1} 8) T^{-2} 9) S^{-1} 10) S^2

<u>פרק 4 - מטריצות והעתקות ליניאריות</u>

<u>הערה</u> : כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים <u>וקטור קואורדינטות</u> ביחס לבסיס ו<u>מטריצת מעבר</u> מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

<u>מטריצה שמייצגת העתקה</u>

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}\ (1\qquad [M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}\ (2\qquad [M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}\ (3$$

נתונה העתקה ליניארית : $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)\ ,\ T:R^3\to R^3$

ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ח. אשר את הטענות הבאות :

$$[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}\ (1\qquad [T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}\ (2$$

$$[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[T]_{B_1}\cdot[M]_{B_1}^{B_2}=[T]_{B_2}\ (3$$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3. יהי T אופרטור לינארי על R^3.

נתון כי: $$\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 6\\ 1 & 6 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$$ ו- $$\left[T\right]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29 & -45 & 6\\ 20 & 31 & -4\\ 13 & 19 & -1\end{pmatrix}$$

חשב את $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}$ ואת $\left[T\right]_{B_2}$.

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

<u>מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס</u>

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n.

א. $T:R^2\to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y+z,z-x)$.

ב. $T:R^4\to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$.

(6) תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$.

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$

של R^3 לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2. כלומר את $\left[T\right]_{B_1}^{B_2}$.

פרק 5 – מרחבי מכפלה פנימית

מרחבי מכפלה פנימית

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2
נגדיר $<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.

בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- R^2.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- R^2
נגדיר $<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה שלעיל מהווה
מכפלה פנימית ב- R^2.

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- R^3
נגדיר $<u,v>=x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה שלעיל מהווה
מכפלה פנימית ב- R^3.

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_n)$ ב- R^n
נגדיר $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$ כאשר $k_1,\dots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.
הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב R^n. מהי המכפלה המתקבלת עם $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$

5) לכל שתי מטריצות $A,\ B$ ב- $M_{mxn}[R]$ נגדיר: $<A,B>=tr(B^TA)$.
בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
tr מייצג את המילה $trace$ (עקבה) שהוא סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות $f,\ g$ ב- $C[a,b]$ נגדיר: $<f,g>=\int_a^b f\cdot g dx$.
בדוק האם ההגדרה שלעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

<u>תשובות</u>

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$ נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב $M_{mxn}[R]$
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב $C[a,b]$

הנורמה והמרחק

1) נתונים שלושה וקטורים ב- R^3 : $u=(1,-2,2)$, $v=(3,-2,6)$, $w=(5,3,-2)$.
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- R^3 , חשב:

$a)\ <u,v>\quad b)\ <u,w>\quad c)\ <v,w>\quad d)\ <u+v,w>\quad e)\ \|u\|$

$f)\ \|v\|\quad g)\ \|u+v\|\quad h)\ d(u,v)\quad i)\ \hat{u}\quad j)\ \hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2x3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x3}[R]$

חשב

$1.\langle A,B\rangle\quad 2.\langle A,C\rangle\quad 3.\langle A,B+C\rangle\quad 4.\langle B,C\rangle$
$5.\langle 4A+10B,11C\rangle\quad 6.\|A\|\quad 7.\|B\|\quad 8.d(A,B)$
$9.\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3\ ,\ q(x)=3x+1\ ,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$

חשב: $1.\langle p,q\rangle\quad 2.\langle p,r\rangle\quad 3.\langle p,q+r\rangle\quad 4.\langle\|p\|\rangle\quad 5.d(p,q)\quad 6.\hat{r}$

4) הוכח: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2$.

5) הוכח: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$.

6) הוכח: $<u-v,u+v>=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכח: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$

8) הוכח: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=<u,v>$.

<u>תשובות</u>

1) 1) 19
2) -5
3) -3
4) -8
5) 3
6) 7
7) $\sqrt{96}$
8) $\sqrt{20}$
9) $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$
10) $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) 1) 185
2) -12
3) 173
4) -24
5) -3168
6) $\sqrt{355}$
7) $\sqrt{139}$
8) $\sqrt{124}$
9) $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$

3) 1) 9
2) -9.5833
3) -0.5833
4) $\sqrt{\frac{37}{3}}$
5) $\sqrt{\frac{4}{3}}$
6) $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

אי שיוויון קושי שוורץ, יישומים

1) הוכח כי $|<u,v>| = \|u\|\cdot\|v\|$ אם ורק אם u,v תלויים לינארית.

2) יהיו $x_1,x_2,...,x_n$ ו- $y_1,y_2,...,y_n$ מספרים ממשיים. הוכח כי
$(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$

4) חשב את הזווית בין שני הוקטורים $v=(-2,1,2)$ $u=(1,2,2)$
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- R^3.

5) חשב את הזווית בין שני הוקטורים $v=(1,2)$ $u=(3,4)$
ביחס למכפלה הפנימית
$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ ב- R^2.

6) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$
בהתייחס למכפלה הפנימית: $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$ שב- $C[0,1]$.

7) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
בהתייחס למכפלה הפנימית: $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x2}[R]$.

<u>תשובות</u>

4) $\theta = 63.61^\circ$

5) $\theta = 9.44^\circ$

6) $\cos(\theta) = 0.173$

7) $\cos(\theta) = 0.00036$

אורתוגונליות

1) הוכח כי הוקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,2,3)$ אורתוגונליים ב- R^3.

2) מצא את ערכו של הקבוע k עבורו הוקטורים
$v=(4,7,-6)$, $u=(1,k,3)$ יהיו אורתוגונליים ב- R^3.

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הוקטורים
$v=(2,5,7)$, $u=(1,2,3)$ שב- R^3.

4) הוכח כי הפולינומים $q(x)=6x^2-6x+1$, $p(x)=2x-1$
אורתוגונליים בקטע [0,1]
(ביחס למכפלה הפנימית $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $\le n$ מעל R)
נגדיר מכפלה פנימית:
$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+...+p(n)q(n)$$
הראה כי הפולינומים:
$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)\ ,$$
$$q(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$
אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$ עם המכפלה הפנימית
שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$
בהתייחס למכפלה הפנימית: $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2x2}[R]$
מצא את הערך של הקבוע k עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי: $u\perp v\ \Leftrightarrow\ \|u+v\|=\|u-v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- R^2 ?

8) הוכח כי: $u\perp v\ \Leftrightarrow\ \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי: $\|u\|=\|v\|\ \Leftarrow\ (u-v)\perp(u+v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

<u>תשובות</u>

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6) $k=0.5$

משלים אורתוגונלי

1) יהי $W=span\{(1,2,-1,1)\ ,\ (2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$. הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $W=span\{(1,1,1)\}$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $P_2[R] \supseteq W=span\{x\}$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$
ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [0,1] .

4) יהי $P_2[R] \supseteq W=span\{x,x^2\}$. מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$
ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [0,1] .

5) יהי $M_{2x2}[R] \supseteq W=span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$ ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2x2}[R]$

6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x}=0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי.
והמושג מרחב השורות של המטריצה A

9) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W=W^{\perp\perp}$ (אם V ממימד סופי).

12) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}$

13) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1\cap W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}+W_2^{\perp}$

תשובות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\left\{\left(1.5x^2-6x+5\right)\right\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1),\ (3,-2,1)\}$ ב- R^3.
א. הראה שהקבוצה S היא אורתוגונלית.
ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ג. ללא חישוב הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- R^3.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1),\ (3,-2,1)\}$ ב- R^3. ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשום את הווקטור $(13,-1,7)$ כצירוף ליניארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4)\ ,\ (1,2,1),\ (3,-2,1)\}$ ב- R^3. רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- R^3 ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכח שלכל $v\in V$

$$v=\frac{<v,u_1>}{<u_1,u_1>}u_1+\frac{<v,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2+...+\frac{<v,u_n>}{<u_n,u_n>}u_n .$$

הערה: הקבוע $a_i=\dfrac{<v,u_i>}{<u_i,u_i>}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות
$S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,...\}$ ב- $V=C[0,\pi]$
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$. האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית. ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית. האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- R^3.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1]).

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית?
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- [0,1])

10) נתונה קבוצה $M_3[R] \supseteq$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$$

בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי ?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית , נרמל אותה.
ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות .

תשובות

1) ב. $S=\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

ההיטל של וקטור

1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$
לאורך $w=(0,1,-1)$ ב- R^3.

2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$
לאורך $w=(0,2,-1,2)$ ב- R^4. מסמנים גם $proj(v,w)$.

3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$
לאורך $q(x)=x^2$ במרחב הפולינומים עם המכפלה
הפנימית האינטגרלית ב- [0,1].

4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2
עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות

1) $c=0$, $pro(v,w)=cw=0$

2) $c=\frac{-2}{3}$, $proj(\mathrm{v},w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2)$

3) $c=\frac{5}{6}$, $proj(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2$

4) $c=\frac{1}{6}$, $proj(A,\mathrm{B})=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

תהליך גרהם שמידט

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq R^3$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq R^4$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע [-1,1] .

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות

1) $B_{ortonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3), \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$

2) $B_{ortonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$

3) $B_{ortonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$