

# שדה המספרים המרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

## מספרים מרוכבים

### שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות ומצא את  $z$  :

א.  $z^2 + 9 = 0$       ב.  $z^2 - 4z + 5 = 0$       ג.  $z^2 - 6z + 13 = 0$

2) חשב:

א.  $(i\sqrt{2})^6$       ב.  $(i^5 - i^{13})^2$       ג.  $(4+i) - (2+10i)$       ד.  $(-4-i)(2-3i)$

3) חשב (כתוב את התוצאה בצורה  $z = x + yi$ ):

א.  $\frac{5}{2+i}$       ב.  $\frac{1+i}{1-3i}$       ג.  $\frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2}$

4) פתור את המשוואות הבאות ומצא את המספר המרוכב  $z$  :

א.  $2z - 6i = \bar{z} - 1$       ב.  $z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i$       ג.  $(1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0$

5) כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

א.  $1 + \sqrt{3}i$       ב.  $-1 - i$       ג.  $-3 - \sqrt{3}i$       ד.  $1 - i$   
ה.  $1 + i$       ו.  $\sqrt{3} - i$       ז.  $\sqrt{3}i$       ח.  $-8$

6) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$       ב.  $(1 + \sqrt{3}i)^9$       ג.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$   
ד.  $\sqrt[6]{-8}$       ה.  $\sqrt[5]{1}$       ו.  $\sqrt[3]{-8}$

7) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ .  
 ב. הראה כי אם  $z$  הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי:  $z^6 = 1$ .

8) נתונה המשוואה  $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ .

- א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.  
 ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

9) פתור את המשוואה  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ .

10) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה  $z^3 = i$ .  
 ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא  $i$ .  
 ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

11) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה  $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$ .  
 ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.  
 הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה  $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$ , באשר  $q$  מנת הסדרה.

12) נתון  $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

- א. מצא את פתרונות המשוואה  $z^3 = w^3$ .  
 ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא  $w^3$ .

13) נתונה המשוואה  $(iz + 1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ .

- א. מצא את פתרונות המשוואה  $z_1$  ו-  $z_2$ .

ב. הראה כי  $\left|\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}\right| = \sqrt{3.25}$ .

14) נתונה המשוואה  $(z-1)^3 = 1$ .

- הוכח שסכום שורשיה הוא 3.

**(15)** נתונה המשוואה  $z^3 = -\sqrt{3} + i$ .

- א. מצא את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$ .
- ב. מצא את הסכום  $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$ .
- ג. הראה כי הסכום  $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$  הוא מספר מדומה טהור.

**(16)** נתונה המשוואה  $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב.

כאשר  $s$  ו- $t$  הם מספרים ממשיים שונים מאפס.  $z_1$  ו- $z_2$  הם פתרונות המשוואה.

- א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות  $s$  ו- $t$ .
- ב. נתון  $z_1 \cdot z_2 = -18i$ . מצא את הפרמטרים  $s$  ו- $t$ .

**(17)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה  $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$ .

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית

שכל איבריה שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא  $1 + \frac{1}{16}i$ .

האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.  
חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה:  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$ ,  
באשר  $d$  נקרא הפרש הסדרה.

**(18)** נתון:  $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$ ,  $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$ . מצא:

- א.  $4u + v$
- ב.  $2i \cdot u - v$
- ג.  $u \cdot v$
- ד.  $u \cdot u$
- ה.  $|u|$
- ו.  $|v|$

**תשובות סופיות**

- (1) א.  $\pm 3i$     ב.  $2 \pm i$     ג.  $3 \pm 2i$
- (2) א.  $-8$     ב.  $0$     ג.  $2 - 9i$     ד.  $-11 + 10i$
- (3) א.  $2 - i$     ב.  $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$     ג.  $-\frac{1}{2} + i$
- (4) א.  $z = -1 + 2i$     ב.  $z = 1 + 2i, z = 4 + 2i$     ג.  $z = i, z = -1$
- (5) א.  $2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$     ב.  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$     ג.  $\sqrt{12} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$
- ד.  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$     ה.  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$     ו.  $2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$
- ז.  $\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$     ח.  $8(\cos \pi + i \sin \pi)$
- (6) א.  $\frac{1}{32}i$     ב.  $-2^9$     ג.  $-1$
- ד.  $8^{\frac{1}{6}} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- ה.  $1^{\frac{1}{5}} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$
- ו.  $8^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2$
- (7)  $z_1 = cis60^\circ, z_2 = cis240^\circ, z_3 = cis120^\circ, z_4 = cis300^\circ$
- (8) א.  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i$
- (9)  $z = 0, z = 1, z = -1$
- (10) א.  $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i$
- (11) א.  $z_n = 2cis[30^\circ + (n-1)72^\circ] \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$     ב.  $q = cis72^\circ$
- (12) א.  $z_1 = cis45^\circ, z_2 = cis165^\circ, z_3 = cis285^\circ$
- (13) א.  $1 + (1 + \sqrt{3})i, -1 + (1 - \sqrt{3})i$
- (14) הוכחה.
- (15) א.  $z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ$     ב.  $6$     ג.  $24i$
- (16) א.  $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_1 = -3s - \frac{t}{3s}i$     ב.  $t = 9, s = \pm 1$
- (17) א.  $z_1 = 0, z_2 = -0.5 + 0.5i$     ב.  $a_1 = -8.5$
- (18) א.  $(17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i)$     ב.  $(-1 + 5i, -10 + 3i, -19)$     ג.  $20 + 35i$
- ד.  $66$     ה.  $\sqrt{66}$     ו.  $\sqrt{92}$

## חילוק פולינומים

שאלות:

צמצם עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

$$\frac{4x^4 + 6x^3 + 31x^2 + 99x + 10}{x^2 - x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \quad (4)$$

$$\frac{4x^2 + x - 1}{x - 2} \quad (3)$$

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} \quad (6)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} \quad (5)$$

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} \quad (8)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$x^2 + 1 \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$4x + 9 + \frac{17}{x - 2} \quad (3)$$

$$x - 7 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 5 \quad (5)$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad (6)$$

$$x^2 - x - 3 \quad (7)$$

$$x^2 - 4 \quad (8)$$

## פתרון משוואות פולינומיאליות

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$k^4 + 3k^3 - 15k^2 - 19k + 30 = 0 \quad (1)$$

$$k^3 + 2k^2 - 3k + 20 = 0 \quad (2)$$

$$k^5 + 3k^4 + 2k^3 - 2k^2 - 3k - 1 = 0 \quad (3)$$

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0 \quad (4)$$

$$k^6 - 3k^4 + 3k^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \quad (6)$$

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = -5 \quad (1)$$

$$k_1 = -4, \quad k_{2,3} = 1 \pm 2i \quad (2)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = -1 \quad (3)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2 \quad (4)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = -1 \quad (5)$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i \quad (6)$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_{3,4} = \pm 2i \quad (7)$$