מטריצה שמייצגת העתקה

הערה:
כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת-מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים).
לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

שאלות

1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\ \ B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$

2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$

3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\rightarrow R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.

נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\ \ B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1.
סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_1}$.

ב. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2.
סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_2}$.

ג. אשר את הטענות הבאות:

1. $[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}$

2. $[T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}$

3. $\left[M\right]_{B_2}^{B_1}\cdot\left[T\right]_{B_1}\cdot\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\left[T\right]_{B_2}$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

3) נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס $B=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,
היא $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.
מהי נוסחת ההעתקה? פתור בשתי דרכים שונות.

4) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3, ויהי T אופרטור ליניארי על R^3.
נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-9&6\\1&6&-4\\1&5&-2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29&-45&6\\20&31&-4\\13&19&-1\end{pmatrix}$.
חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

5) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:
$T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}A$,
לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

6) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_4[R],\ D(p(x))=p'(x)$,
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,
היא: $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה לינארית $T:P_2[R]\to P_2[R]$.
נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס $B=\{1,1-x,x+x^2\}$,
היא: $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$.

א. מצא את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצא את $T\left(p(x)\right)$.
* פתור בשתי דרכים שונות.
ב. מצא את $T^2\left(p(x)\right)$.

10) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית, ותהי A מטריצה ממשית,
כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$.
נתון כי B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ו- $rank(A)=n$.
הוכח כי $[T]_B$ הפיכה.

11) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to P_3[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. מצא את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה לינארית $T:M_2[R]\to M_2[R]$.
ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בבסיס הסטנדרטי,
היא $[T]_E=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצא גרעין ותמונה של ההעתקה.
ב. חשב את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.
ג. מצא את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה לינארית: $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2)=b+cx$.
הוכח ש- T העתקה נילפוטנטית.

14) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל $\mathbb{R}$.

נתון הבסיס $B=\{1,x,x^2\}$. ונתונה ההעתקה הלינארית

$T:V\to V\ ;\ T\left(p(x)\right)=xp''(x)-p'(x)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B$.

ב. מצאו בסיסים וממדים עבור $\mathrm{Im}T, KerT$.

הערה – בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות שנוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

תשובות סופיות

1) א. $(x, y-x-z, z)$ ב. $(x, y, z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-2&-2&0\end{pmatrix}$ ג. הוכחה.

ד. לא. ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.

3) $T(x,y,z)=(x+y, y+z, z-x)$

4) $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0.5&-0.5&1\\-0.75&2.75&0.5\end{pmatrix}$, $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}2&3&0\\-0.5&-1&0.5\\-0.25&-1&0.75\end{pmatrix}$

5) $[T]_B=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-1&0&2\\3&5&4&-2\\0&-2&0&6\end{pmatrix}$ **6)** $[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

7) $T\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

8) $T:P_2[R]\to P_2[R]$; $T(p(x))=p(x+1)$

9) א. $T(a+bx+cx^2)=(a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2$

ב. $T^2(a+bx+cx^2)=(a+2c)1+(10a+8b+4c)x+(8a+6b+4c)x^2$

10) הוכחה.

11) א. $Ker(T)=sp\{-x+x^3,-1+x^2\}$, $\text{Im}(T)=sp\{1+x^2, x+x^3\}$

ב. $T(a+bx+cx^2+dx^3)=(b+d)(1)+(a+c)x+(b+d)x^2+(a+c)x^3$

12) א. $Ker(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$, $\text{Im}(T)=sp\left\{\begin{pmatrix}1&4\\7&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. $tr(T)=15$, $\det(T)=0$, $rank(T)=2$

13) הוכחה.

14) א. $[T]_B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ב. $B_{\text{Im}T}=\{1\}$, $\dim(\text{Im}T)=1$

$B_{KerT}=\{1,x^2\}$, $\dim(KerT)=2$

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

שאלות

1) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות, ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של R^n :

א. $T:R^2 \to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y+z,z-x)$

ב. $T:R^4 \to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$

2) נתונה העתקה לינארית $T:R^4 \to R^2$; $T(x,y,z,t)=(x+y,z+t)$
מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מהבסיס הסטנדרטי של R^4 לבסיס הסטנדרטי של R^2.

3) תהי $T:R^3 \to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי :
$$T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$$
חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ של R^3, לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2.
כלומר, את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

4) עבור העתקה לינארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,
כאשר : $B_2=\{(1,0),\ (0,1)\}$, $B_1=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$
מצא את נוסחת ההעתקה.

5) עבור העתקה לינארית $T:R^3 \to R^2$ מתקיים: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$
כאשר $B_2=\{(1,1),\ (1,2)\}$, $B_1=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (0,0,1)\}$.
מצא את נוסחת ההעתקה.

6) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R] \to P_2[R]$.
המטריצה שמייצגת את ההעתקה T, מהבסיס הסטנדרטי של $P_3[R]$ לבסיס הסטנדרטי של $P_2[R]$, נתונה על ידי: $[T]=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&0&2&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

7) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ אשר המטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, שהמטריצה המייצגת אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא: $[T]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

מצא את נוסחת ההעתקה.

9) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, כך ש- $\dim(V)=n$,
ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכח או הפרך:

א. $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$

ב. אם T העתקה זהות, אז בהכרח $[T]_{B_1}^{B_1}=I_n$.

ג. אם T העתקה זהות, אז בהכרח $[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_1}^{B_2}=I_n$.

10) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[R]\to R^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\left(a+b,b+c,c\right)$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}(a,b,c)$.

ג. חשב את $T^4\left(a+bx+cx^2\right)$.

11) נתונה העתקה ליניארית $T:M_2[R]\to P_3[R]$, המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\left(a-b\right)+\left(c+d\right)x+\left(a-c\right)x^2+dx^3$$

א. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס. (הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכח שההעתקה הפיכה וחשב את $T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)$.

12) חשב את ST ואת TS, עבור ההעתקות:

$$S:R^2\to R^3 \quad ; \quad S(x,y)=(x-y,x+y,y)$$

$$T:P_2[R]\to R^2 \quad ; \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b,b-c)$$

תשובות סופיות

1) א. $[T]=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ב. $[T]=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$

2) $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

3) $[T]=\begin{pmatrix}25&0&-6\\-20&0&5\end{pmatrix}$

4) $T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5y+6z)$

5) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

6) $T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=(b+2c)1+(2c+6d)x+(3d)x^2$

7) $T\left(a+bx+cx^2\right)=(a+b,b+c,c)$

8) $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-b)+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

9) הוכחה.

10) א. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ ב. $T^{-1}(a,b,c)=(a-b+c)1+(b-c)x+cx^2$

ג. לא ניתן.

11) א. $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

ב. $T^{-1}(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c-d&-a+b+c-d\\b-d&d\end{pmatrix}$

12) $ST\left(a+bx+cx^2\right)=(a+c,a+2b-c,b-c)$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה לינארית

שאלות

1) נתונה העתקה לינארית, $T:M_2(R)\to M_2(R)$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 2.
מצאו את קבוצת כל המטריצות P, שעבורן המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
היא וקטור עצמי של ההעתקה.
הוכיחו כי קבוצת המטריצות לעיל היא ת"מ של $M_2(R)$ ומצאו לה בסיס.

2) נתונה העתקה לינארית, $T:M_{10}(R)\to M_{10}(R)$; $T(X)=PX$,
כאשר P מטריצה לא ידועה מסדר 10.
ידוע כי A היא מטריצה הפיכה שמהווה וקטור עצמי של
ההעתקה המתאים לערך העצמי 4.
חשב את $|P|$.

3) מצא העתקה לינארית T, שעבורה המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$,
היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(4x-y-z,x+2y-z,x-y+2z)$
מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ב. נתונה העתקה לינארית: $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)$.
מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.
האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

5) נתונה העתקה לינארית $T(x,y,z)=(x+z,y,x+z)$.
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?
ג. במידה שכן חשב $T^{2009}(x,y,z)$.

6) נתונה העתקה לינארית :

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad ; \quad T:M_2[R]\to M_2[R]$$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה ותשובתך לסעיף ג' חיובית, חשב את $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

7) נתונה העתקה לינארית : $T:P_2[R]\to P_2[R] \quad ; \quad T\big(p(x)\big)=p(x+1)$

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.

ב. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

תשובות סופיות

1) $\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \ \lambda\in R\right\}$

2) $4^{10}=|P|$

3) $T:M_{2x3}(R)\to M_{2x3}(R) \quad T(X)=4X$

4) א. $v^{(2)}_{\lambda=3}=(1,0,1)$, $v^{(1)}_{\lambda=3}=(1,1,0)$, $v_{\lambda=2}=(1,1,1)$, ניתנת לליכסון.

ב. ערך עצמי : $x=0$, וקטור עצמי : $v_{x=0}=(1,-1,1)$, לא.

5) $v_{\lambda=2}=(1,0,1)$, $v_{\lambda=1}=(0,1,0)$, $v_{\lambda=0}=(-1,0,1)$ ב. ניתנת ללכסון.

ג. $T^{2009}(x,y,z)=\left(2^{2008}x+2^{2008}z,y,2^{2008}x+2^{2008}z\right)$

6) א. $[T]_E=A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $v^{(2)}_{x=2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)}_{x=0}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v^{(1)}_{x=0}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג. כן. ד. $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t \\ 2^9x+2^9z & 2^9y+2^9t \end{pmatrix}$

7) א. $[T]_E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $v_{\lambda=1}=1$ ג. לא ניתנת לליכסון.