העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-16**, קבע, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

1) $T(x,y)=(x+y,x-y)\ ;\quad T:R^2\to R^2$

2) $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

3) $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\ ;\quad T:R^3\to R^2$

4) $T(x,y)=(xy,y,z)\ ;\quad T:R^2\to R^3$

5) $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\ ;\quad T:R^3\to R^3$

6) $\left(B\in M_n[R]\right)\quad T(A)=BA+AB\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

7) $T(A)=A+A^T\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

8) $T(A)=|A|\cdot I\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

9) $T(A)=A\cdot A^T\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

10) $T(A)=A^{-1}\ ;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

11) $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\ ;\quad T:P_3[R]\to P_2[R]$

12) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

13) $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

14) $T\left(p(x)\right)=p^2(x)\ ;\quad T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$

15) $\left(F=C,F=R\right)\quad T\left(z\right)=\overline{z}\ ;\quad T:C[F]\to C[F]$

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2 \to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$?

בשאלות **17-20**, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

17) $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(0,0,1)=(7,8,9)$.

18) $T:R^3 \to R^3$ כך ש- $T(1,0,1)=(1,1,0)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(0,0,1)=(0,1,1)$.

19) $T:R^4 \to R^3$ כך ש- $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1), T(-1,0,1,1)=(1,0,0), T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

20) $T:P_2[R] \to P_2[R]$ כך ש- $T\left(1\right)=4, T\left(4x+x^2\right)=x, T\left(1-x\right)=x^2+1$.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** כן
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן

גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-10**, מצא:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

1) $T:R^4\to R^3$, $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$

2) $T:R^3\to R^4$, $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$

3) $T:R^4\to R^3$, $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$

4) $T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$

5) $T:P_2[R]\to P_2[R]$, $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

6) $D:P_3[R]\to P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

7) מצא העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

8) מצא העתקה ליניארית $T:R^4\to R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה ליניארית $T:V\to U$.

9) הוכח כי אם $\dim \operatorname{Im} T=\dim Ker T$ אז הממד של V זוגי.

10) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=2x+5 \quad , \quad p(x)=1\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=x^2, \quad p(x)=x, \quad p(x)=1\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) הוכחה.

10) לא.

העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבע האם היא <u>חח״ע</u>, האם היא <u>על</u>, האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.

1) $T:R^3\to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3 \quad , \quad T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3 \quad , \quad T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R] \quad , \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

הערה: העתקה חח״ע נקראת גם לא-סינגולרית.

תשובות סופיות

1) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח״ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח״ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

פעולות עם העתקות ליניאריות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי : $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את :

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST
6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.

תרגילי תיאוריה מתקדמים

שאלות

1) הגדירו את המושג "העתקה ליניארית ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי W".
הוכיחו או הפריכו:

א. קיימת העתקה ליניארית T מ- $I\mathbb{R}^5$ ל- $I\mathbb{R}^5$, עבורה $KerT=\operatorname{Im}T$.

ב. קיימת העתקה ליניארית T מ- $I\mathbb{R}^4$ ל- $I\mathbb{R}^4$, עבורה $KerT=\operatorname{Im}T$.

2) אם T העתקה ליניארית ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי W,
$\{v_1,v_2,...,v_t\}$ קבוצה בלתי-תלויה-ליניארית ב V, אז:

א. אם T חח"ע, אז $\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_t\}$ קבוצה בלתי-תלויה-ליניארית ב- W.

ב. אם $\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_t\}$ קבוצה בלתי-תלויה-ליניארית ב- W אז T חח"ע.

ג. אם $\dim V<\dim W$, אז T חד-חד-ערכית.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

3) תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית אז:

א. אם $KerT\neq\{0\}$, אז T אינה על.

ב. אם $KerT=\{0\}$ ו- $\dim V\geq\dim W$, אז T על.

ג. אם $KerT=\{0\}$ ו- $\dim V\leq\dim W$, אז T על.

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

4) הגדר את המושג גרעין של טרנספורמציה לינארית. הוכח או הפרך:

א. לכל מרחב ליניארי V ולכל ט"ל $T:V\to V$, מתקיים $\operatorname{Im}T^2\subseteq\operatorname{Im}T$.

ב. אם $T:V\to V$ ט"ל שמקיימת $\ker T=\ker T^2$ ו- $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$, אז $T=T^2$.

5) קיימת העתקה לינארית T, ממרחב וקטורי V למרחב וקטורי W, כך ש-
$\ker T=\operatorname{Im}T$, $\dim W=4$ ו- $\dim V$ הוא:

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

6) תהי $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אזי בהכרח:

א. אם T היא איזומורפיזם, אזי $m=n$.

ב. אם $n>m$, אזי T חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v\in V$ (כאשר A מטריצה ממשית נתונה), אזי ל-A יש m שורות ו-n עמודות.

ד. אם $T(v)=Av$ לכל $v\in V$ (כאשר A מטריצה ממשית נתונה), אזי ל-A יש n שורות ו-m עמודות.

ה. כל התשובות אינן נכונות.

7) תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3 v_4\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^4$.
אזי בהכרח מתקיים:

א. ייתכנו מקרים בהם T העתקה חד-חד-ערכית.

ב. ייתכנו מקרים בהם $T(v_1=0)$, אבל T חד-חד-ערכית.

ג. אם T העתקה על, אזי בהכרח $\ker(T)$ מכילה וקטור שונה מאפס.

ד. הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),T(v_3),T(v_4)\}$ בלתי תלויה לינארית.

ה. כל התשובות אינן נכונות.

8) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, המקיימת $\ker T=\operatorname{Im} T$.
אז בהכרח מתקיים:

א. אם T על, אז בהכרח $V=\{\underline{0}\}$.

ב. T היא איזומורפיזם.

ג. T היא העתקת האפס.

ד. כל התשובות אינן נכונות.

9) תהי $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה מגודל $m\times n$, כך ש-
$T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$, אז בהכרח:

א. אם $v\in\ker T$, אז v שייך למרחב השורות של A.

ב. אם v שייך למרחב השורות של A, אז $v\in\ker T$.

ג. אם v שייך למרחב העמודות של A, אז $v\in\operatorname{Im} T$.

ד. אם $\ker T=\{\underline{0}\}$, אז $n<m$.

ה. כל התשובות אינן נכונות.

10) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$. יהי $W=\{p(x)\in V \mid p(2)=p'(1)\}$.

א. הוכיחו כי W הוא תת מרחב וקטורי של V.

ב. נתונים שלושת תתי המרחב הבאים של V:

1. $U_1=Span\{1,2x-x^2\}$ 2. $U_2=Span\{1-x^2,3x^2-3\}$

3. $U_3=Span\{3-x-x^2\}$.

קבעו לכל $i=1,2,3$, האם $V=W\oplus U_i$. נמקו את תשובתכם.

11) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית כך ש $\dim(V)=n$, ויהיו B_1,B_2 בסיסים סדורים של V. הוכח או הפרך: אם $\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker(T)$, אז בהכרח $T\neq 0$.

12) תהי $T:M_3(\mathbb{R})\to M_3(\mathbb{R})$ העתקה ליניארית המוגדרת באופן $T(A)=A-A^t$.

אז בהכרח מתקיים:

א. $\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim(\ker(T))$

ב. $\dim(\operatorname{Im}(T))=3$ $\dim(\ker(T))=3$

ג. אף תשובה אינה נכונה.

13) תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, ותהי A מטריצה ממשית, כך שמתקיים $T(v)=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$. אזי בהכרח מתקיים:

א. אם $rank(A)=n$, אזי T לא בהכרח חד-חד ערכית.

ב. אם $T(T(v))=0$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$, אז $rank(A)\le n/2$.

ג. ייתכנו מקרים בהם $rank(A)=n$, אבל T אינה על.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $\begin{matrix} T(-1,3)=(1,1) \\ T(2,-1)=(0,-1) \end{matrix}$.

א. מצאו מטריצה A, כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in\mathbb{R}^2$.

ב. יהי $V=M_{2\times2}(\mathbb{R})$ מרחב כל המטריצות 2×2 מעל $\mathbb{R}$.

נסמן $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, ונגדיר $S:V\to V$ ע"י $S(M)=MA$, לכל $M\in V$.

הוכיחו ש- S העתקה לינארית. האם S איזומורפיזם? הסבירו.

ג. נניח ש- A,B הן מטריצות ממשיות 5×5 המקיימות $|AB|=|-BA|$.

הוכיחו שלפחות אחת המטריצות A,B אינה הפיכה.

תשובות סופיות

1) הוכחה. **2)** א **3)** ב **4)** הוכחה **5)** ד
6) ג **7)** 7 **8)** א+ב **9)** ג
10) א. הוכחה. ב. 1. לא. 2. כן. 3. לא.
11) הוכחה.
12) ג
13) ג
14) א. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$ ב. הוכחה. ג. הוכחה.