מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:
$<u,v>=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$ ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:
$<u,v>=x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.
עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$,
נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\dots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.
הראה כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.
מהי המכפלה המתקבלת עם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $<A,B>tr\left(B^TA\right)$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
tr מייצג את המילה $trace$ (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות f,g ב- $C[a,b]$, נגדיר: $<f,g>=\int_a^b f\cdot g dx$.
בדוק האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^n$, חשב:

א. $<u,v>$ ב. $<u,w>$ ג. $<v,w>$ ד. $<u+v,w>$ ה. $\|u\|$

ו. $\|v\|$ ז. $\|u+v\|$ ח. $d(u,v)$ ט. $\hat{u}$ י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2\times3}[R]$,

חשב:

א. $\langle A,B\rangle$ ב. $\langle A,C\rangle$ ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle A,C\rangle$ ה. $\langle 4A+10B,11C\rangle$ ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$ ח. $d(A,B)$ ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ q(x)=3x+1,\ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$,

חשב:

א. $\langle p,q\rangle$ ב. $\langle p,r\rangle$ ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\langle\|p\|\rangle$ ה. $d(p,q)$ ו. $\hat{r}$

4) הוכח: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2$.

5) הוכח: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$.

6) הוכח: $<u-v,u+v>=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכח: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכח: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=<u,v>$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8

ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$

ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24

ה. -3168 ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח.

ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833

ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$ ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכח כי $|<u,v>|=\|u\|\cdot\|v\|$, אם ורק אם u,v תלויים לינארית.

2) יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\ldots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכח כי $\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2\le\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכח כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u=(1,2,2),\ \ v=(-2,1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

5) חשב את הזווית בין שני הווקטורים $u=(3,4),\ \ v=(1,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

6) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית : $<p,q>\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$ שב- $C[0,1]$.

7) מצא את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&3\end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית : $<A,B>=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times2}[R]$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\theta = 63.61°$
5) $\theta = 9.44°$
6) $\cos\theta = 0.173°$
7) $\cos\theta = 0.00036°$

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכח כי הווקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,2,3)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $v=(4,7,-6)$, $u=(1,k,3)$
יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצא וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $v=(2,5,7)$, $u=(1,2,3)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכח כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ q(x)=6x^2-6x+1$
אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $<p,q>\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:
$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n)$.
הראה כי הפולינומים:
$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$
אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}k&1\\3&-1\end{pmatrix}$.
בהתייחס למכפלה הפנימית: $<A,B>=tr(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,
מצא את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכח כי: $\|u+v\|=\|u-v\|\Leftrightarrow u\perp v$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכח כי: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2\Leftrightarrow u\perp v$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכח כי: $(u-v)\perp(u+v)\Leftarrow\|u\|=\|v\|$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) $k=2$
3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) $k=0.5$
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W=span\left\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\right\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w=span\left\{(1,1,1)\right\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראה כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W=span\left\{x\right\}\subseteq P_2\left[R\right]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $\left[0,1\right]$.

4) יהי $W=span\left\{x,x^2\right\}\subseteq P_2\left[R\right]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $\left[0,1\right]$.

5) יהי $W=span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_{2\times2}\left[R\right]$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=tr\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times2}\left[R\right]$.

6) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצא בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot\underline{x}=0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תן פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $W_1\subseteq W_2\Rightarrow W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$.

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכח כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V ממימד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכח כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp}=span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp}=span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp}=span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp}=span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp}=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

7) $B_{W^{\perp}}=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

קבוצה ובסיס אורתוגונלי

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראה שהקבוצה S היא אורתוגונלית.

ב. נרמל את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכח שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשום את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף ליניארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
רשום את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכח שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{<v,u_1>}{<u_1,u_1>}u_1+\frac{<v,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2+\dots+\frac{<v,u_n>}{<u_n,u_n>}u_n$.
הערה: הקבוע $a_i=\frac{<v,u_i>}{<u_i,u_i>}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i,
או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמל אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדוק האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
(ענה ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $M_3[R] \supseteq S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.
בדוק: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמל אותה.
ענה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$ ג. הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\dots\right\}$$

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\dots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

7) הקבוצה לא אורתוגונלית.

8) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$$

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

היטל של וקטור

שאלות

1) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$
לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$
לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$. מסמנים גם $proj(v,w)$.

3) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$
לאורך $q(x)=x^2$, במרחב הפולינומים עם המכפלה
הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצא את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2
עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובות סופיות

1) $c=0$, $proj(v,w)=cw=0$

2) $c=\frac{-2}{3}$, $proj(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2)$

3) $c=\frac{5}{6}$, $proj(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2$

4) $c=\frac{1}{6}$, $proj(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

תהליך גרהם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$. מצא בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצא בסיס אורתונורמלי ל- U, בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7&14\\-9&-2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4&3\\2&-2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$