

שדות – שדה השאריות מודולו p

$$(1) \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות}$$

- א. פתור את המערכת, מעל שדה המספרים הממשיים \mathbb{R} .
 ב. פתור את המערכת, מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_7 .
 ג. פתור את המערכת, מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_5 .
 ד. פתור את המערכת, מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_3 .

$$(2) \quad \text{פתור את המערכת } \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \text{ , מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(3) \quad \text{פתור את המערכת } \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \text{ , מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$(4) \quad \text{פתור את המערכת } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ , מעל } \mathbb{Z}_5$$

$$(5) \quad \text{פתור את המערכת } \begin{cases} x + 4y + 2z + 4t = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{cases} \text{ , מעל } \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(6) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות } \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \text{ , מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

- מצא עבור אלה ערכים של הפרמטר k למערכת
 פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(7) \text{ נתונה מערכת המשוואות } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

מצא עבור אלה ערכים של הפרמטר k למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(8) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

חשב את A^{-1} .

$$(9) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_3.$$

חשב את A^{-1} .

$$(10) \text{ נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}, \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה הפיכה.

(11) נתונה הקבוצה הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$\{(k, 1, 1, 1, 1), (1, k, 1, 1, 1), (1, 1, k, 1, 1), (1, 1, 1, k, 1), (1, 1, 1, 1, k)\}$$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k הקבוצה תלויה ליניארית,
 ועבור אילו ערכים של הפרמטר k הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

(12) במרחב $(\mathbb{Z}_5)^4$, מעל השדה \mathbb{Z}_5 , נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W :

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 3x + 4y + z + t = 0, 2x + y + 2t = 0\}$$

$$W = sp\{(2, 3, 0, 4), (1, 1, 4, 1)\}$$

מצא בסיס לתתי המרחבים $U + W$, $U \cap W$, U , W .
 מה מספר האיברים בכל מרחב?

תשובות סופיות

- (1,2) ד. ג. (2,1), (4,0), (0,2), (3,3) ב. (1,6) א. (1,-1) (1)
- (0,3,0) (2)
- (1,2,1) (3)
- (0,3,0) (4)
- (1,-3,2,2) (5)
- פתרון יחיד: $k=0, k=2, k=1$, 9 פתרונות: $k=1$. (6)
- אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.
- פתרון יחיד: $k=0, k=2, k=4, k=3$, 5 פתרונות: $k=1$, אין פתרון: $k=1$. (7)
- אין אופציה של אינסוף פתרונות.
- $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$
- $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$
- $k=0, k=2, k=4$ (10)
- עבור $k=1, k=3$, הווקטורים תלויים ליניארית, (11)
- ועבור $k=0, k=2, k=4, k=5, k=6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.
- $B_U = \{(4,0,2,1), (2,1,0,0)\}$, מספר האיברים: 25. (12)
- $B_W = \{(1,1,4,1), (0,1,2,2)\}$, מספר האיברים: 25.
- $B_{U+W} = \{(1,1,4,1), (0,1,2,2), (0,0,4,0)\}$, מספר האיברים: 125.
- $B_{U \cap W} = \{(2,4,2,1)\}$, מספר האיברים: 5.