

אלגברה

לינארית

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \omicron & \pi \\ \wp & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

פרק 1- ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון.....	3
פרק 2 - העתקות (טרנספורמציות) לינאריות.....	4
פרק 3 - מטריצות והעתקות לינאריות.....	7

תרגילים – פרק 1

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות :

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009} .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R .

- (2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
 ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי :
 1. $|A| = |B|$. 2. $tr(A) = tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP = B$ אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

תרגילים – פרק 2**העתקות (טרנספורמציות) לינאריות****העתקות לינאריות**

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) לינארית. הגדר את המושג אופרטור לינארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה לינארית.

$$T(x, y) = (x + y, x - y) \quad ; \quad T : R^2 \rightarrow R^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) \quad ; \quad T : R^2 \rightarrow R^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[R]) \quad T(A) = BA + AB \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 \quad ; \quad T : P_3[R] \rightarrow P_2[R] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x + 1) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_{2n}[R] \quad (14)$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} \quad ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית :

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T : R^2 \rightarrow R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T : R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,1,0) = (1,2,3)$, $T(0,1,1) = (4,5,6)$, $T(0,0,1) = (7,8,9)$

ב. $T : R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,1) = (1,2,1)$, $T(0,0,1) = (0,1,1)$

ג. $T : R^4 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,2,-1,0) = (0,1,-1)$, $T(-1,0,1,1) = (1,0,0)$, $T(0,4,0,2) = (2,2,-2)$

ד. $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1-x) = x^2 + 1$

תמונה וגרעין של העתקות לינאריות

(5) נתונה העתקה לינארית $T : V \rightarrow U$. הגדר והדגם את המושגים :

א. הגרעין של ההעתקה - $\text{Ker} T$. ב. התמונה של ההעתקה - $\text{Im} T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה - $\text{rank} T$ והאיפוס של העתקה - $\text{null} T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה :

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t) , T : R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z) , T : R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} , T : R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A , T : M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4) , T : P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x) , D : P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

(7) מצא העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4), (-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T: R^4 \rightarrow R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1), (1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow U$. הוכח כי אם $\dim \text{Im} T = \dim \text{Ker} T$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T: R^4 \rightarrow R^3$?

העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על. כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא חח"ע, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

פעולות עם העתקות לינאריות

(11) תהיינה $S: R^3 \rightarrow R^2$ ו- $T: R^3 \rightarrow R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z) \quad , \quad S(x, y, z) = (x - z, y)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

$$ST \quad (5) \quad TS \quad (4) \quad 4S - 10T \quad (3) \quad 4S \quad (2) \quad S + T \quad (1)$$

$$S^2 \quad (10) \quad S^{-1} \quad (9) \quad T^{-2} \quad (8) \quad T^{-1} \quad (7) \quad T^2 \quad (6)$$

תרגילים – פרק 3

מטריצות והעתקות לינאריות

הערה: כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

מטריצה שמייצגת העתקה

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{ (1,1,0), (0,1,0), (0,1,1) \} , \quad B_2 = \{ (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1) \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

נתונה העתקה לינארית : $T : R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$:

ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_1}$.

ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[T]_{B_2}$.

ח. אשר את הטענות הבאות :

$$[T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2} \quad (2) \quad [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1} \quad (1)$$

$$[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2} \quad (3)$$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3 . יהי T אופרטור ליניארי על R^3 .

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix} \text{ ו- } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ נתון כי:}$$

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$, $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ לפי הבסיס:}$$

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D: P_4[R] \rightarrow P_3[R]$, $D(p(x)) = p'(x)$,

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות ביחס לבסיסים

הסטנדרטיים של R^n .

א. $T(x, y) = (x + y, y + z, z - x)$, $T: R^2 \rightarrow R^3$.

ב. $T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t)$, $T: R^4 \rightarrow R^2$.

(6) תהי $T: R^3 \rightarrow R^2$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי $T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$.

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

של R^3 לבסיס $B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\}$ של R^2 . כלומר את $[T]_{B_1}^{B_2}$.