

משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה מהצורה $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, $(a \neq 0, x \neq 0)$

איך פותרים ?

פותרים את המשוואה $ak(k-1) + bk + c = 0$

ומקבלים: k_1, k_2

נפריד ל-3 מקרים:

א. אם $k_1 \neq k_2$ אז $y = c_1 |x|^{k_1} + c_2 |x|^{k_2}$

ב. אם $k_1 = k_2 = k$ אז $y = c_1 |x|^k + c_2 |x|^k \ln |x|$

ג. אם $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ אז $y = |x|^\alpha [\cos(\beta \ln |x|) + c_2 \sin(\beta \ln |x|)]$

להלן 3 דוגמאות שמדגימות את המקרים השונים:

1. פתור את המשוואה $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $(x \neq 0)$

פתרון:

עלינו לפתור את המשוואה האופיינית $ak(k-1) + bk + c = 0$

בתרגיל זה: $a = 1, b = 3, c = 1$

לכן עלינו לפתור: $k(k-1) + 3k + 1 = 0$

כלומר עלינו לפתור: $k^2 + 2k + 1 = 0$

נקבל: $k_1 = k_2 = k = -1$

זה מקרה ב ולכן הפתרון הכללי הוא: $y = c_1 |x|^{-1} + c_2 |x|^{-1} \ln |x|$

2. פתור את המשוואה $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$, $(x \neq 0)$

פתרון:

עלינו לפתור את המשוואה האופיינית $ak(k-1) + bk + c = 0$

בתרגיל זה: $a = 1$, $b = -4$, $c = 6$

לכן עלינו לפתור: $k(k-1) - 4k + 6 = 0$

כלומר עלינו לפתור: $k^2 - 5k + 6 = 0$

נקבל: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$

זה מקרה א ולכן הפתרון הכללי הוא: $y = c_1 |x|^2 + c_2 |x|^3$

3. פתור את המשוואה $x^2 y'' + xy' + y = 0$, $(x \neq 0)$

פתרון:

עלינו לפתור את המשוואה האופיינית $ak(k-1) + bk + c = 0$

בתרגיל זה: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$

לכן עלינו לפתור: $k(k-1) + k + 1 = 0$

כלומר עלינו לפתור: $k^2 + 1 = 0$

נקבל: $k_{1,2} = \pm i$

ובאריכות: $k_{1,2} = \underset{\alpha}{0} \pm \underset{\beta}{1} \cdot i$

זה מקרה ג ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = |x|^0 [c_1 \cos(1 \ln |x|) + c_2 \sin(1 \ln |x|)]$$

$$y = c_1 \cos(\ln |x|) + c_2 \sin(\ln |x|)$$

משוואת אוילר לא הומוגנית היא משוואה מהצורה $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, $(a \neq 0, x \neq 0)$

איך פותרים ?

שלב א

פותרים את המשוואה ההומוגנית $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$

ומקבלים : $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$

שלב ב

מוצאים פתרון פרטי (y_p) למשוואה הלא הומוגנית בשיטת וריאציית הפרמטרים

תזכורת לוריאציית פרמטרים (מומלץ להסתכל על השיעור בגול).

1. מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי : $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

2. מציבים בנוסחה : $y_p = y_1(x) \int \frac{-y_2(x)Q(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)Q(x)}{W(x)} dx$

דוגמאות

1. פתור את המשוואה $x^2y'' - xy' + y = x^2$, $(x > 0)$

פתרון:

שלב א :

עלינו לפתור את המשוואה ההומוגנית $x^2y'' - xy' + y = 0$

נפתור את המשוואה האופיינית $ak(k-1) + bk + c = 0$

בתרגיל זה : $a = 1, b = -1, c = 1$

לכן עלינו לפתור : $k(k-1) - k + 1 = 0$

כלומר עלינו לפתור : $k^2 - 2k + 1 = 0$

נקבל : $k_1 = k_2 = k = 1$

כזכור : אם $k_1 = k_2 = k$ אז $y = c_1|x|^k + c_2|x|^k \ln|x|$

ולכן : $y_h = c_1 \cdot \underbrace{x}_{y_1} + c_2 \cdot \underbrace{x \ln x}_{y_2}$

שלב ב :

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא ההומוגנית $x^2 y'' - xy' + y = x^2$

בשיטת וריאציית הפרמטרים.

נדאג לכך שהמקדם של y'' יהיה 1

$$x^2 y'' - xy' + y = x^2 \quad / : x^2$$

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$$

1. מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x \ln x + x - x \ln x = x$$

2. מציבים בנוסחה :

$$y_p = y_1(x) \int \frac{-y_2(x)Q(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)Q(x)}{W(x)} dx$$

$$y_p = x \int \frac{-x \ln x \cdot 1}{x} dx + x \ln x \int \frac{x \cdot 1}{x} dx$$

$$y_p = x \int (-\ln x) dx + x \ln x \int 1 dx$$

$$y_p = -x(x \ln x - x) + x \ln x \cdot x$$

$$y_p = -x^2 \ln x + x^2 + x^2 \ln x = x^2$$

שלב ג

הפתרון הכללי :

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x \ln x + x^2$$

דוגמאות

2. פתור את המשוואה $x^2 y'' + xy' = x \ln x$, $(x > 0)$

פתרון:

שלב א:

עלינו לפתור את המשוואה ההומוגנית $x^2 y'' + xy' = 0$

נפתור את המשוואה האופיינית $ak(k-1) + bk + c = 0$

בתרגיל זה: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

לכן עלינו לפתור: $k(k-1) + k = 0$

כלומר עלינו לפתור: $k^2 = 0$

נקבל: $k_1 = k_2 = k = 0$

כזכור: אם $k_1 = k_2 = k$ אז $y = c_1 |x|^k + c_2 |x|^k \ln |x|$

ולכן: $y_h = c_1 \cdot \underbrace{1}_{y_1} + c_2 \cdot \underbrace{\ln x}_{y_2}$

שלב ב:

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא ההומוגנית $x^2 y'' + xy' = x \ln x$

בשיטת וריאציית הפרמטרים.

נדאג לכך שהמקדם של y'' יהיה 1

$$x^2 y'' + xy' = x \ln x \quad / : x^2$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{\ln x}{\underbrace{x}_{Q(x)}}$$

$$1. \text{ מחשבים את הוורונסקיאן } W \text{ הנתון על ידי: } W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

2. מציבים בנוסחה :

$$y_p = y_1(x) \int \frac{-y_2(x)Q(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)Q(x)}{W(x)} dx$$

$$y_p = 1 \int \frac{-\ln x \cdot \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}} dx + \ln x \int \frac{1 \cdot \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}} dx$$

$$y_p = -\int \ln^2 x dx + \ln x \int \ln x dx$$

$$y_p = -\left[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right] + \ln x (x \ln x - x)$$

$$y_p = -x \ln^2 x + 2x \ln x - 2x + x \ln^2 x - x \ln x$$

$$y_p = x \ln x - 2x$$

שלב ג

הפתרון הכללי :

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 \ln x + x \ln x - 2x$$